J . REY PASTOR

CÁLCULO

INFINITESIMAL

CURSO

DE

CALCULO INFINITESIMAL

CURSO

DE

CALCULO INFINITESIMAL

POR

J. REY PASTOR

4.ª EDICION
MUY AMPLIADA

BUENOS AIRES

1944

PROLOGO

Hemos procurado en estas lecciones —decíamos en la primera edición— precisar los conceptos fundamentales con la mayor claridad y concisión posibles, sin entrar en cuestiones de interés puramente teórico, ni en casos singulares poco frecuentes, o aludiéndolos apenas en las notas impresas en letra menuda, dedicadas a los lectores más curiosos, que desean ampliar su horizonte de conocimientos.

No es ocasión de exponer cuáles deben ser las características de un curso dedicado a la enseñanza de técnicos, para quienes la Matemática es un medio y no un fin. Después de laboriosas discusiones habidas en Europa en reuniones internacionales diversas, llegóse en los comienzos del siglo a conclusiones concretas, entre ellas las siguientes:

La enseñanza debe ser sistemática y lógica, propendiendo a una educación de la inteligencia en el razonamiento matemático; y no empírica, con carácter recetario, para la resolución de casos concretos.

De los problemas de existencia que tienen tanta importancia y dificultad para el matemático, (raíces de las ecuaciones, existencia de la derivada, de la función implícita, etc.), sólo interesan al técnico los resultados y no las demostraciones.

De los métodos de resolución teórica, muchos de los cuales apenas si son demostraciones de existencia, sólo importan los que conducen rápidamente al resultado apetecido, con aproximación suficiente.

Además de los ejemplos abstractos, para ejercitar los métodos aprendidos, es conveniente tratar los problemas y magnitudes que se presentan en las ciencias físicas, para llenar el vacío que el ingeniero salido de las aulas suele encontrar entre la Matemática abstracta y la realidad concreta.

El graficismo, la intuición geométrica son los recursos esenciales del técnico para la visión de los fenómenos en su conjunto, para

adivinar las soluciones y calcularlas aproximadamente; pero la intuición por sí sola es fundamento demasiado inseguro para apoyar las demostraciones y conceptos fundamentales. Con dibujos y llamamientos a la intuición se puede probar, con apariencia de verdad, cualquier resultado falso.

Cuando la demostración convincente, esto es, aritmética, sea demasiado laboriosa, debemos omitirla, conformándonos con una representación gráfica que dé cierta verosimilitud al teorema; quien desee conocer la demostración, deberá acudir a los tratados de Análisis.

Esta cuestión del método nos conduce al discutido punto del RIGOR. *No falta quien opina que el rigor, es decir, la precisión y la claridad, son exigencias del matemático puro y que la mente del ingeniero puede llenarse con vagos juegos de palabras, de sabor metafísico, que disimulen la oscuridad del pensamiento.*

Repase el lector las antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial,... y después de larga cavilación sobre los puntos CONSECUTIVOS *de una curva, sobre el infinitésimo que ni es cero ni tiene valor ninguno, sobre los infinitésimos que se desprecian sin alterar la exactitud del resultado, deberá descansar en la fe y aceptarlo todo como dogma.*

Al cabo del tiempo se pusieron en claro todos estos conceptos; la Matemática dejó de ser Metafísica para hacerse Aritmética, es decir, clara, sencilla, limpia de nebulosidades y libre de discusiones. Pues bien: nadie como el técnico, que ha de manejar realidades y no abstracciones, debe ser exigente en claridad y precisión; nada más lejano de la Metafísica que el hierro y el hormigón.

Una vez pasado ese obscuro túnel de los conceptos fundamentales, para entrar en el campo de los desarrollos, ¿qué significado tienen esas palabras tan frecuentemente usadas en los antiguos tratados: número muy pequeño, número muy grande, números aproximados?... Todo número es muy pequeño y muy grande, según con cuál se le compare; dos números cualesquiera son aproximados.

Sobre estas palabras relativas, a las que se pretende dar valor absoluto, por desconocimiento del término de comparación, se basan esos cálculos ilusorios, en que lo despreciado vale más que lo conservado. El técnico no puede decir que un número es muy pequeño o despreciable, sin saber que se conserva inferior al límite de error admitido; no debe usar ninguna fórmula sin conocer su límite de error.

esto es, sin saber cuál es el número ε que limita el error de la función cuando los de las variables son inferiores a un número δ.

Ahora bien; esta dependencia entre los números ε y δ que condiciona un incremento a otro incremento, no es sino la noción clara de APROXIMACIÓN SUFICIENTE, *y ésta es la esencia del rigor. Nadie como el técnico necesita este rigor; para nadie es tan necesario el* SENTIDO DE LA APROXIMACIÓN. *Quien, ardiendo en fiebre de exactitud, llega hasta apreciar las millonésimas en un cálculo cuyos datos tienen solamente tres o cuatro cifras exactas, y cuantas más cifras amontona más se aleja de la verdad, carece de este sexto sentido, tan necesario al ingeniero como la vista al pintor.*

Cultivar el sentido de la aproximación es el principal objeto de estas lecciones.

He aquí algunas de las teorías agregadas en la 2.ª edición: asíntotas de las curvas planas, series de términos complejos, interpolación, teorema de Cauchy del valor medio y sus aplicaciones, fórmulas de Frenet - Serret, líneas de curvatura y geodésicas, representación de superficies, superficies regladas, envolventes de curvas y superficies, cálculo vectorial y sus aplicaciones cinemáticas y geométricas, funciones de variable compleja, nociones de representación conforme, y multitud de ampliaciones en diversas teorías, especialmente en la de ecuaciones diferenciales.

En esta 3.ª edición hemos concedido la extensión que merece a la teoría de la representación conforme, estudiada muy elementalmente y hemos ampliado y aclarado diversos capítulos, como notará el lector; pero la mejora esencial estriba en las numerosas figuras que aclaran el texto y en la agregación de varias lecciones sobre Geometría analítica del espacio, que serán bien recibidas por quienes no la hayan estudiado en cursos anteriores.

NOTA SOBRE ESTA CUARTA EDICION

Aunque hemos procurado conservar el aspecto del libro, son importantes las mejoras y adiciones incorporadas a esta edición, gracias al aprovechamiento del espacio, que ha aumentado el contenido mucho más de lo que corresponde a las 40 páginas agregadas, muchas de ellas en composición densa y concisa.

Nos propusimos, al redactar este Cálculo, desarrollar los tópicos esenciales para las ciencias de aplicación, con el rigor posible dentro de los límites de extensión y elementalidad que corresponden a tales cursos; y es obvio que rigor implica concentración de pensamiento y abandono de imágenes intuitivas, rápidas pero engañosas. Quienes se conformen con ese criterio de verdad *probable*, podrán consultar con fruto el viejo libro de Appell, o nuestro *Curso cíclico*, donde todo es sencillo y convincente, mientras el lector no se percata del escaso valor de tales razonamientos. Son los propios técnicos quienes exigen rigor, que equivale a claridad, aunque lograda a más alto precio; y por ello ha sido transformado radicalmente el citado libro francés, mejorando en cuanto al rigor, pero perdiendo toda su primitiva sencillez.

No es tarea fácil la que nos propusimos desde nuestra primera edición, de alcanzar el rigor por caminos más breves y sencillos que los seguidos en los tratados más prestigiosos. Quienes lean el nuevo capítulo de *Complementos de Cálculo integral*, pequeña ventana abierta hacia el Análisis moderno, comprenderán quizás el enorme esfuerzo que significa organizar el copioso material de esta obra, eludiendo el uso de las poderosas herramientas, de costosa adquisición, con las cuales los matemáticos profesionales desarrollan cómodamente el Análisis, distribuído en varios cursos, sin trabas de extensión, tiempo ni esfuerzo. Para ellos todo es importante, porque su vida entera pende de la interminable cadena de diminutos eslabones, que forman esta sólida disciplina; y suprimir algunos de ellos es como atentar contra su vida. Mientras los ingenieros encuentran este libro demasiado científico y riguroso, recargado de

concisas informaciones de carácter superior, impresas en letra menuda, nuestros colegas matemáticos notan, en cambio, la falta de muchos conceptos que juzgan capitales; pero el hecho de haber podido desarrollar tan amplio programa sin necesitarlos, ya indica que no son tan importantes como se figuran; y aunque su uso depara sin duda satisfacción al profesional de la Matemática, no es precisamente ese placer intelectual, del que no participan los discentes, la finalidad de sus cátedras de preparación para otras disciplinas.

Se impone, pues, el sacrificio de callar mucho de lo que se sabe, y con esta norma hemos accedido a tales sugestiones solamente cuando las aplicaciones ya logradas de ciertas teorías aconsejan ocupar en ellas a quienes tienen otro rumbo en la vida y mucho que estudiar en su profesión.

Si apenas tenemos la pretensión de servir a sus necesidades matemáticas actuales, menos podemos pretender escribir un libro para los siglos venideros, en que sin duda tales teorías matemáticas, y otras que nacerán, habrán fructificado.

BIBLIOGRAFIA. — Tratados rigurosos de Cálculo son el *Cours d'Analyse infinitesimale* de Vallèe-Poussin, en dos volúmenes y el de Beppo Levi en un apretado volumen, titulado *Analisi matematica algebraica ed infinitesimale*. De más fácil lectura son las *Lezioni di Calcolo infinitesimale* de Pincherle y el *Calcolo infinitesimale* de Pascal, en tres pequeños volúmenes, con otro más de ejercicios críticos, y las *Lezioni di Analisi matematica* de Vivanti.

Más orientado hacia las aplicaciones es el de Fubini: *Lezioni di Analisi Matematica* y el de Courant: *Differential-and Integralrechnung* en dos volúmenes (hay traducción inglesa en uno sólo), así como el de Cisotti: *Lezioni di Analisi matematica* de tipo intuitivo, y el más elemental de Granville.

Los libros franceses de *Mathématiques générales* (Zoretti, Garnier, . . .) carecen de todo rigor, como corresponde a tal grado de enseñanza; y los grandes tratados de Goursat, Hadamard, etc., se apoyan en ellos, suponiendo ya conocidos los fundamentos. En definitiva, quedan sin establecer en parte alguna, de modo adecuado. El libro de Appell ha sido reformado por Valiron en tal sentido.

Casi ninguno de los citados se ocupa del Cálculo de variaciones, ni de los métodos gráficos y mecánicos; ninguno trata las funciones de variable compleja, a pesar de sus importantes aplicaciones, ni tampoco el Cálculo tensorial.

INDICE DE ADICIONES

A las observaciones de los colegas y discípulos Balanzat, Frenkel, Gaspar y muy especialmente Pi Calleja, se deben muchas de las mejoras intruducidas. La revisión efectuada por este competentísimo profesor nos ha sido muy valiosa; y para corresponder a su esfuerzo hemos intercalado en el texto complementario, impreso en tipo menor, multitud de nociones, sin duda interesantes, pero que todavía no tienen interés técnico, violentando algo nuestro criterio arriba declarado.

A cambio de no aceptar todas las sugestiones de los lectores, que habrían dilatado desmesuradamente este volumen, hemos agregado una breve exposición del Cálculo tensorial, tan abstrusamente tratado en general, que nadie se atrevió a sugerirnos tal ensayo, el cual corresponde de lleno al criterio de utilidad que nos ha guiado. Este capítulo y el de Complementos de Cálculo integral, son las novedades más importantes.

Los lectores sin base adecuada que se inicien en el razonamiento riguroso a esta altura de su vida, encontrarán sin duda alguna dificultad hasta educar su mentalidad; no creemos que encuentren más fáciles los libros rigurosos antes citados. Respondemos así a una observación muy explicable de algunos lectores, educados en el Cálculo newtoniano, que pretenden saltar ágilmente por encima de todo el denso y fecundo siglo XVIII, que separa ambas concepciones.

La otra observación, muy general, se refiere a la escasez de ejercicios y a la concisión de los ejemplos numerosos. Hemos creído que entre la somera lista de ejercicios, copiados de cualquier colección, sin indicaciones para resolverlos, y el ejemplo desmenuzado hasta eliminar toda colaboración del lector, cabe ese tipo intermedio del ejemplo a medio aclarar, o del ejercicio a medio resolver, que vienen a ser la misma cosa. Se trata, pues, de una cuestión de rótulo; y esas lagunas que el lector encuentra en los numerosos ejemplos, donde debe caminar algún trecho sin andadores y lápiz en ristre, responden precisamente al fin que nos hemos propuesto. Hemos agregado además no pocos ejercicios nuevos al final de varias lecciones.

He aquí la lista de las principales modificaciones introducidas:

CAP. I. — Concepto de número real por el método más simple. — *Fundamento de la Geometría Analítica.* — Ampliación del Concepto de función, con ejemplos. — Curvas algebraicas notables, con figuras. — Variación de las funciones. — Funciones elementales, con sus gráficas. — Medida radial de ángulos (sin *radián*). — Aclaración del concepto de límite. Propiedades de los límites. — Teorema de las sucesiones convergentes, con sencilla demostración. — Definición de arco. — Operaciones con funciones continuas. — *Perfeccionamiento de la clasificación de las discontinuas,*

con ejemplos. — Demostración directa y sencilla del Teorema de Bolzano-Weierstrass. — Aclaraciones sobre infinitésimos e infinitos. — Ejercicios sobre *límites indeterminados*. — *Perfeccionamiento del concepto de asíntota* y ejemplos. — Condición necesaria de la convergencia de series. — Ejercicios y criterio de Cauchy. — Demostración del desarrollo en serie exponencial.

CAP. II. — Relación entre inclinación y pendiente. — Puntos angulosos, cuspidales, e inflexiones, con ejemplos y figuras. — Nueva demostración de la derivada de *función compuesta*. — *Nuevos ejercicios sobre derivadas.* — Aclaraciones sobre el Teorema del valor medio. — Ejercicios sobre Límites indeterminados. — Demostración del Teorema de Rolle. — Rectificación histórica sobre la regla de l'Hôpital.

CAP. III. — Fórmula de Leibniz. — Nueva demostración del orden de contacto. — Mejora de notaciones y figuras en la exposición del radio de curvatura.

CAP. IV. — Multiplicación de series por la Regla de Cauchy. — Am*pliaciones sobre el radio de convergencia y mejora del Teorema (101).* — Aclaraciones sobre funciones hiperbólicas.

CAP. V. — Considerable ampliación del cálculo de integrales racionales, dando para cada caso el método más conveniente, con ejemplos variados. — *Propiedades fundamentales de las integrales definidas.* — *Nuevos ejemplos* de integrales elípticas. — Ecuación del péndulo simple. — Aclaración de la fórmula de Simpson. — Demostración rigurosa y sencilla de la derivación bajo el signo integral. — Ampliaciones de concepto y figuras sobre la línea elástica. — Mejora de la exposición sobre la Teoría del planímetro.

CAP. VI. — Aclaraciones, ejemplos y figuras sobre funciones periódicas. — Interpolación trigonométrica. — Simplificación del criterio para funciones especiales. — La demostración rigurosa en el capítulo de Complementos.

Complementos de Cálculo Integral. — Lema de Borel. — La continuidad uniforme. — Integración de funciones continuas. — Rectificación de curvas. — Series e integrales sobre intervalo infinito. — Cálculo de la integral de Gauss o Poisson. — Criterio de Mac-Laurin. — Convergencia absoluta y condicional. — Criterios de Abel y de Dirichlet. — Series funcionales. — Convergencia uniforme; propiedades. — Relación de los coeficientes de Fourier de primitiva y derivada. — Teorema de unicidad. — Tipos *I* y *II* de Series de Fourier.

CAP. VII. — Variación de la razón simple. — Noción de coordenadas plückerianas; ley de dualidad. — Fórmula del seno. — Algebra tensorial: concepto de *vector* y de *tensor;* diadas, tensores de inercia y elástico.

CAP. VII. — Aclaraciones sobre las cuádricas alabeadas y puntos cíclicos.

CAP. IX. — Entornos circulares. — *Notación general de los puntos.* — Continuidad de las funciones derivables. — Función con derivadas nulas. — *Mejora de la derivación de funciones compuestas.* — Concepto general de diferencial de Thomae. — Alusión al recíproco del Teorema de Euler. —

Derivadas sucesivas. — Fórmula diferencial de Taylor. — Mejora de la clasificación de los puntos de una superficie. — Extremos de variables ligadas.

CAP. X. — Demostración de la fórmula directa del radio de curvatura. — Aclaraciones sobre la curvatura de superficies. — Fórmula de Euler. — Definición de líneas asintóticas. — Aclaración del concepto de superficie, — Reordenación de la teoría de envolventes. — Teoría vectorial de superficies. — Cálculo diferencial absoluto.

CAP. XI. — Demostración rigurosa del cambio de variables. — Mejoras en la exposición de la teoría de momentos y rigorización de la teoría de las integrales curvilíneas. — Aplicación en Aerotécnica de las funciones analíticas.

CAP. XII.—Método de la derivación para resolver la ecuación de Clairaut. — Complemento sobre el factor integrante; su verdadero alcance. — Nota sobre ecuaciones incompletas de segundo orden. — Cálculo de una integral particular en las ecuaciones lineales completas.

El índice alfabético ha sido completado, agregando los nombres de los matemáticos que aparecen en el nuevo texto, con sus correspondientes fechas de nacimiento y muerte. Muchas figuras nuevas han sido intercaladas y otras renovadas, para mayor claridad.

PRIMERA PARTE

Funciones de una variable

CAPITULO I

LIMITES DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Lección 1

CONCEPTO DE FUNCION

1. — Variables independientes.

El problema de la medida de magnitudes conduce prácticamente a números *racionales* del tipo $\pm A, a\breve{b} \ldots k$; pero tanto en Aritmética como en Geometría se presentan expresiones decimales de infinitas cifras con signo $+$, o signo $-$. Tal sucede al extraer raíces, calcular distancias, rectificar curvas, cuadrar superficies, etc.

Número real es un símbolo $\pm A, abcd \ldots$ con infinitas cifras decimales. Cuando éstas son nulas desde una en adelante, es sabido cómo se obtiene una fracción equivalente, cuyo denominador sólo contiene factores 2 y 5; más en general, si la sucesión de cifras es periódica, se obtiene una fracción equivalente cuyo denominador contiene otros factores primos. El número *irracional* o *inconmensurable* es una expresión decimal no periódica. Por ej. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, π.

Suponemos conocida la Aritmética de los números reales: suma, diferencia, producto y cociente (de divisor no nulo) conducen a otro número real; las operaciones de extraer raíces y tomar logaritmos de números positivos son siempre posibles en el campo real.

Las operaciones aritméticas entre números reales tienen interpretación geométrica mediante puntos de una recta; y recíprocamente, la Geometría de la recta se reduce al Algebra, gracias al concepto cartesiano de *abscisa*. Elegidos en la recta un origen O y un segmento OU como unidad, cada número real a está representado por un punto A tal que la medida del segmento dirigido OA con la unidad OU es el número a, el cual se llama *abscisa* de A. Recíprocamente, cada punto de la recta tiene una abscisa real, y se llama *afijo* de este número.

Esta correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales es el fundamento de la Geometría Analítica.

Es, por tanto, legítimo, usar lenguaje geométrico en el Cálculo, sin menoscabo del rigor aritmético, que excluye apoyarse para las deducciones en imágenes intuitivas. Así, pues, cuando usemos las palabras: *punto c; puntos a la derecha de c, puntos a la izquierda de c.* etc., debe entenderse: *número* c, números *mayores* que *c*, números *menores* que *c*, etc.

Dar una *variable independiente* x es dar el conjunto de valores numéricos, reales o complejos, que puede tomar. Solamente consideramos en este curso variables *reales:* y el conjunto de valores que cada variable puede tomar se llama su *campo de variabilidad.*

La variable real x se llama *continua* cuando puede tomar todos los valores comprendidos entre dos números a y b; o bien todos los valores mayores que un número a; o bien los menores que un número b; o finalmente cabe que pueda tomar todos los valores reales.

Tales conjuntos de valores se llaman *intervalos;* en el primer caso el intervalo se llama *finito* y los números o puntos a y b son sus *extremos;* en los otros casos el intervalo se llama *infinito* y tiene un solo extremo o ninguno. Los restantes puntos del intervalo se llaman *interiores.* Los intervalos definidos por las condiciones:

$$a < x < b \quad ; \quad x > a \quad ; \quad x < b \quad :$$

se designan respectivamente así: (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ no debiendo considerarse ∞ como número, sino como símbolo convencional para el crecimiento o decrecimiento indefinido de la variable.

El intervalo se llama *completo* o *cerrado* cuando en él se incluyen sus extremos. Los intervalos completos $a \leqq x \leqq b$; $x \geqq a$; $x \leqq b$ se representan así: $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$.

Entorno de un punto x es todo intervalo (a, b) al cual es interior dicho punto x. Suele tomarse simétrico, es decir, del tipo $(x - d, x + d)$ y el número $d > 0$ es su *semiamplitud,* o su *radio.*

Las expresiones aritméticas en que figura una variable x determinan el campo de variabilidad de ésta. Son los ejemplos más sencillos de *función,* concepto que definimos en (2) con la más amplia generalidad.

EJEMPLO 1. — En la expresión $\sqrt{x}$ el intervalo de variabilidad de x es $x \geqq 0$, pues para valores negativos no tiene valor real la raíz cuadrada.

EJEMPLO 2. — En la expresión $1:x$, la x puede tomar cualquier valor no nulo, pues la división por 0 carece de sentido; el campo de variabilidad de x se compone de dos intervalos infinitos.

EJEMPLO 3. — En todo problema físico donde intervienen temperaturas centígradas, el intervalo de variabilidad de éstas tiene —273° como extremo inferior, y el superior depende de la índole del problema.

2. — Variables dependientes o funciones.

Hasta los comienzos del S. XIX la palabra *función* era sinónima de *expresión aritmética*, incluyendo el paso al límite como operación aritmética; pero ciertos problemas físicos obligaron a adoptar este concepto, mucho más amplio, de Dirichlet:

DEFINICIÓN. Se dice que la variable y es *función* de la variable independiente x si a cada valor de x corresponde un valor de y, determinado por una ley aritmética, geométrica o arbitraria.

La palabra *función* equivale, pues, a variable *dependiente* de otra variable. También se usa la palabra función para designar a la *ley* de correspondencia y se representa por una letra: f, F, φ, Φ,... llamada *característica*, que antepuesta a la variable x indica las operaciones aritméticas, geométricas o arbitrarias que determinan el valor de y.

Cada función de uso frecuente se suele representar por un signo especial, que suele ser abreviatura del nombre de la función; así, por ejemplo, el *logaritmo*, *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, de x, se representan así: lx (logaritmo natural); $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

La palabra función se usa a veces para las correspondencias en que cada valor de x determina *varios* de y; pero entonces se llama *función multiforme*, y su estudio se hace descomponiéndolas en varias funciones, como veremos en la lección siguiente.

Hemos distinguido en la definición de función no tres *clases* de funciones, sino tres *modos* de definir funciones, que se reducen, como veremos, al primero.

EJEMPLOS. — Está definida aritméticamente la función $y = x^2$; pues de cada valor de x se deduce el de y por la operación aritmética de elevar al cuadrado.

Está definida geométricamente la función $y = \operatorname{sen} x$; pero se puede expresar también, como veremos, por una serie, es decir, por operaciones aritméticas combinadas con el *paso al límite*.

Está definida arbitrariamente la función siguiente en el intervalo $[0,2\pi]$:

$y = x$ para $0 < x < \pi$;

$y = x - \pi$ para $\pi < x < 2\pi$;

$y = \pi/2$ para $x = 0$, y para $x = \pi$.

A pesar de estar dada la correspondencia por *tres* expresiones (y por ello se consideraba como tres funciones en la Matemática euleriana) obtendremos en (160) una sola expresión de tal correspondencia.

3. — Representación gráfica de las funciones.

Una función $y = f(x)$ puede representarse gráficamente por una escala rectilínea, llevando a partir de un origen O segmentos iguales a los valores de y, pero anotando en el extremo el valor correspondiente de x.

EJEMPLO. — Cada una de las escalas que forman la regla de cálculo es una escala logarítmica, es decir, la representación gráfica de la función $y = \log x$; pero si se quiere utilizar para el cálculo de logaritmos, debe acoplarse una escala natural que sirva para medir las distancias.

El método más usado para representar gráficamente funciones es el de las coordenadas cartesianas; pero igualmente puede utilizarse cualquier otro sistema de coordenadas (polares, proyectivas, ...).

La determinación de puntos de la gráfica da idea de la variación de la función, pero por muchos que sean es arriesgado enlazarlos por un trazo continuo, sin un previo estudio aritmético de la función. En cambio, hecho este estudio, bastarán pocos puntos para efectuar un trazado muy aproximado.

Tal estudio de las funciones, que haremos oportunamente, nos dará las propiedades fundamentales de continuidad y existencia de tangentes, que facilitan notablemente el trazado de la gráfica.

EJEMPLOS. — Sea la función $y = 5x^5 - 4x$.

Atribúyanse a x los valores -2, -1, 0, 1, 2, ... y dibújese el trazo que los une del modo que parece más directo y natural. Véase después que tal dibujo es absurdo, dando a x valores entre 0 y 1.

Hágase lo mismo con la función $y = 2x^3 - x$.

4. — Funciones y leyes naturales.

Los fenómenos naturales ofrecen ciertas dependencias entre unas y otras variables; cuando esta dependencia *determina* el valor de una variable mediante los de otras, aquélla se dice *función* de éstas.

El *valor* numérico de una variable natural procede de una medida y, por tanto, adolece de un error; en realidad, nunca se tiene un *número*, sino un *intervalo*, en que el valor está comprendido. Se comprende, pues, que la expresión aritmética de las funciones naturales es y será siempre *aproximada*; y cabe por tanto, obtener multitud de expresiones para cada función. El problema capital de las Ciencias naturales exactas es obtener para cada fenómeno la *ley matemática*, esto es, la expresión *más aproximada* y *más sencilla*.

Mediciones más exactas pueden descubrir en toda ley natural errores intolerables que obligarán a sustituirla por otra mejor.

EJEMPLOS. — El volumen de una cierta cantidad de gas no sólo *depende* de la presión, sino que está *determinado* por la presión, si se supone fija la temperatura; luego es *función* de la presión, en igualdad de temperatura.

¿Cuál es la ley natural de este fenómeno físico? Durante mucho tiempo se consideró como tal la de BOYLE-MARIOTTE, o sea: $pv =$ constante; pero las experiencias de Regnault (con gran escándalo de casi todos los físicos que creían ciegamente en aquella ley) revelaron grandes discrepancias al aumentar la presión, y VAN DER WAALS dió posteriormente su ecuación más exacta (véase: Curso cíclico, t. II). ¿Podemos, pues, rechazar la antigua ley por *inexacta* y sustituirla por la nueva, que es la *verdadera*? Sólo podemos decir que ésta expresa mejor los hechos; y sin duda vendrá después otra que la superará.

LECCIÓN 2

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES

5. — Expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Las funciones más sencillas son las *enteras* así llamadas porque las únicas operaciones a que está sometida la variable son: adición, sustracción y multiplicación. Están definidas para todo valor de x, *sin excepción*. Se llaman *lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.*, según el grado de la variable.

EJEMPLOS. — Son enteras las funciones:

$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{2}$ lineal

$y = \frac{3}{4}x^2 - x + \pi$ cuadrática

Si la variable figura como divisor, pero no está sometida a radicaciones, la función se llama *fraccionaria;* las enteras y las fraccionarias se llaman *racionales*.

EJEMPLOS. — Son racionales fraccionarias:

$y = x^{-1} + 1$ „ $y = 1:(x^2 - 1)$

La primera tiene el valor excepcional $x = 0$; la segunda los valores excepcionales $x = \pm 1$, que anulan al denominador.

Si la variable figura bajo signo radical, la función se llama *irracional;* éstas y las racionales forman las funciones algebraicas explícitas, o *expresiones algebraicas*.

EJEMPLOS. — Son irracionales las funciones:

$y = \sqrt{x}$; $y = 1:(x^{1/2} - 1)$

6. — Funciones algebraicas y curvas algebraicas.

En general, se dice que y es función *algebraica* de x, cuando está ligada con ella por una ecuación de la forma: polinomio en x, y, igual a cero. Obsérvese que en los ejemplos anteriores se puede llegar a tal resultado: $P(x, y) = 0$. La curva que representa se llama *curva algebraica* y el número de puntos que tiene común con cualquier recta ,según se demuestra en Algebra, es igual al grado de la ecuación. Hay funciones algebraicas que no se pueden despejar mediante radicales, es decir, funciones algebraicas no expresables mediante expresiones algebraicas. Se llaman funciones *algebraicas implícitas*. Tales son las definidas por estas ecuaciones:

$$y^5 - xy + 1 = 0 \quad , \quad xy^6 - y + x = 0.$$

NOTA. — Si para el valor x_0 corresponden m raíces y_1, y_2, y_m de la ecuación algebraica, y se cumple cierta condición que veremos en (203), resultan m funciones uniformes al variar x en un entorno suficientemente pequeño de x_0; pero al ampliar éste se confunden y entrecruzan. (*V. Elem. de la T. de funciones*). Esto se ve más claramente en las ecuaciones que se descomponen en factores racionales; tal por ejmplo $y^2 - x^2 = 0$, que se descompone en $y = x$, $y = -x$. Si se parte de los valores $y_1 = + \sqrt{4} = 2$, $y_2 = -2$; y se amplía el entorno más allá del origen el valor positivo se hace negativo y viceversa.

El examen de la ecuación $P(x, y) = o$ permite a veces decir inmediatamente algunas propiedades de la curva:

a) Si todos los términos tienen coeficientes *positivos* y los exponentes son *pares* no existe curva; pues el primer miembro toma valor positivo, para todo (x, y) excepto si $x = y = 0$ y no hay término constante, resultando punto único el origen

Toda ecuación algebraica admite, sin embargo, soluciones complejas (x, y) que reciben el nombre de *puntos imaginarios*; y cuando no hay soluciones reales, o sólo hay número finito, se dice que representa una *curva imaginaria;* por ej.:

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad\qquad 2x^2 + y^2 + 1 = 0$$

b) Si la y figura solamente con exponentes *pares*, al punto (x, y) *de la curva corresponde también el* $(x, -y)$; *es decir*, la curva es *simétrica* respecto del eje x.

EJEMPLO. — Son simétricas respecto del eje x:

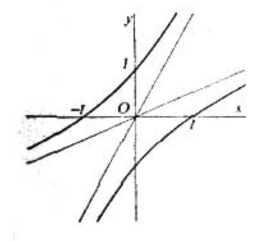
$$x^2 - 2y^2 + 3x - 1 = 0 \qquad (\textit{cónica})$$

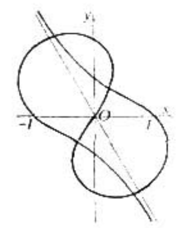
$$y^2(2a - x) = x^3 \qquad (\textit{cisoide})$$

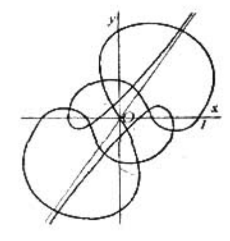
Son simétricas respecto de ambos ejes las *espíricas:*

$$(x^2 + y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) = c$$

c) Si en cada término los exponentes de x, y, son ambos pares o ambos impares, al punto (x, y) de la curva corresponde el $(-x, -y)$, es decir: la curva es simétrica respecto del origen O.







EJEMPLOS. — Son simétricas respecto de O las curvas representadas en la figura. La 1.ª es la hipérbola: $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 2$; la 3.ª es de grado 25; la 2.ª parecería de 5.º grado, pero su ecuación, de 9.º grado es:

$$(2x + y)\ (x^2 + y^2)^4 + 2y(5x^4 + 10x^2y^2 - 3y^4) - 2x + y = 0 \quad ;$$

7. — *Funciones pares e impares.*

En lo sucesivo, la palabra *función* significará función uniforme.

La función $y = f(x)$ se llama *par*, cuando a valores opuestos de x corresponde el mismo valor de y.

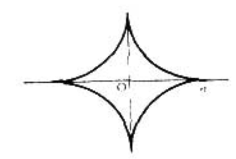
La función se dice *impar*, cuando a valores opuestos de x corresponden valores opuestos de y.

Es par $\cos x$; son impares $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y; pues si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, y)$.

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen O; pues si el punto (x, y) está en la curva, también está el $(-x, -y)$.

NOTA. — Lo dicho en el párrafo anterior vale si en vez de *potencias* pares o impares figuran funciones pares o impares; es decir:



Si y figura solamente bajo funciones *pares* la *curva es simétrica respecto* del eje x; si x figura solamente bajo funciones pares, la curva es simétrica respecto del eje y. Por ejemplo, la curva:

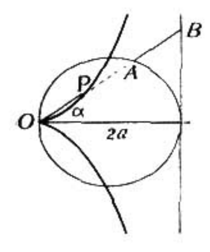
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (astroide)$$

es simétrica respecto de ambos ejes.

Si en la ecuación polar $r = f(\alpha)$ la función es *par*, al punto (r, α) corresponde el $(r, -\alpha)$ y la curva es simétrica respecto del eje x; si la función es *impar*, al punto (r, α) corresponde el $(-r, -\alpha)$ y la curva es simétrica respecto del eje y.

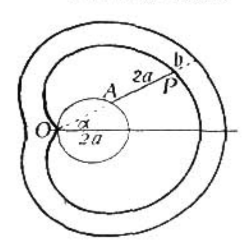
EJEMPLOS. — He aquí tres curvas clásicas, que tienen un eje de simetría, con sus correspondientes ecuaciones polares; compruébese en ellas el criterio enunciado para reconocer la simetría.

Cisoide de Diocles.



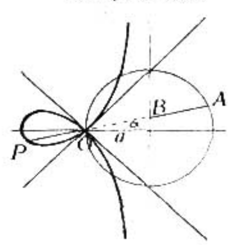
$r = 2a(\sec\alpha - \cos\alpha)$

Caracol de Pascal.



$r = 2a.\cos.\alpha + b$

Estrofoide recta.



$r = a \,.\, \cos 2\alpha / \cos\alpha$

8. — Funciones elementales.

Se llama así a las funciones circulares y a las funciones aritméticas:

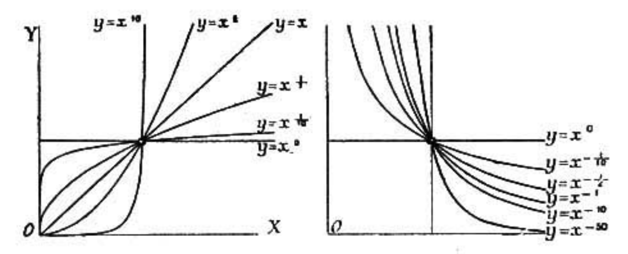
$$y = x^m \qquad \text{función } \textit{potencial}$$
$$y = a^x \qquad \text{,, } \textit{exponencial}$$
$$y = \log_a x \qquad \text{,, } \textit{logarítmica}$$

y también a las compuestas con ellas mediante operaciones aritméticas, únicas que estudia el Cálculo elemental. Como todas las circulares son combinaciones aritméticas de sen x, y ésta se puede expresar por exponenciales, como veremos, no son funciones *simples*.

La función $y = \log_a x$ se define por la relación $x = a^y$; es decir, si y es función logarítmica de x, es x función exponencial de y. Se expresa esto diciendo que las funciones exponencial y logarítmica son *inversas*, concepto sobre el cual insistiremos más adelante.

NOTA. — La potencia x^m es función exponencial de su logaritmo, que es $m.\log x$; luego resulta: todas las funciones llamadas *elementales* son funciones compuestas de la *exponencial* o del *logaritmo*, siendo ésta la única función elemental *simple*.

EJERCICIOS. — Construir la gráfica de la función potencial para diversos valores enteros, fraccionarios, positivos y negativos del exponente m. Obsérvese para qué tipo de exponentes existe curva a la izquierda del eje y.



FUNCIONES CIRCULARES. — Aunque éstas son bien conocidas desde cursos anteriores, conviene puntualizar algunos conceptos esenciales.

Adoptamos la definición *geométrica* usual en Trigonometría, pero una vez demostrados en Cap. IV sus desarrollos en serie, se comprenderá que es posible partir de éstos, como definición *aritmética*, la cual vale para valores complejos de x. Es claro que entonces desaparecen las nociones usuales: circunferencia, cuerdas, grados, etc.; la variable x es un número abstracto.

Este significado de número puro es el único admisible en Análisis, aun en el campo real.

Partiendo, pues, del significado angular de la variable x, y referido el ángulo a su rayo origen como semieje cartesiano positivo de abscisas, establezcamos de una vez para todo el curso estas definiciones:

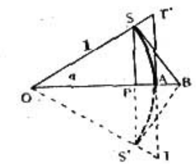
Como medida de un ángulo se adopta la razón de la longitud del arco central al radio. El ángulo recto tiene medida $\pi/2$; el ángulo de una vuelta, 2π; etc. No conviene hablar siquiera del *radian*, en mala hora introducido en la enseñanza.

*Seno de x es la razón de la ordenada al radio; **coseno** es la razón de la abscisa al radio;* ***tangente*** *es la razón de la ordenada a la abscisa;etc.*

Tanto x como sus funciones circulares son, pues, números reales abstractos; por ej.: $\text{sen}\,1 = 0{,}84$.

El ángulo de 1.° *viene expresado por el número* $\pi/180 = 0{,}017453\ldots$, que debe retener en la memoria todo técnico, por su gran utilidad.

La medida de un arco de circunferencia respecto del radio se define mediante los perímetros de las quebradas inscriptas y circunscriptas por el proceso llamado de las sucesiones convergentes que trataremos en (11). Dado un ángulo AOS, y su simétrico AOS', para rectificar el arco doble SAS', tenemos:



1.° quebrada inscripta: cuerda $SS' = 2 \,.\, \text{sen}\, a$

" " circunscripta: $SBS' = 2\, \text{tg}\, a$

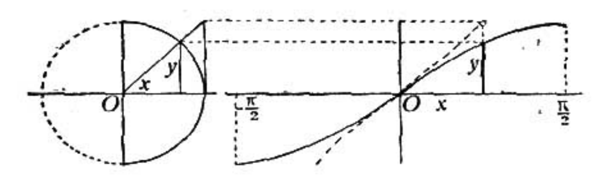
Por tanto:

$$2\,\text{sen}\, a < 2a < 2\,\text{tg}\, a$$

$$\text{sen}\, a < a < \text{tg}\, a$$

El concepto de función inversa dado en Trigonometría, donde se admiten *infinitos arcos, también se modifica aquí.*

Las funciones $x = \text{arc sen}\, y$, $x = \text{arc tg}\, y$, significan: arco cuyo seno es y, *arco cuya tangente es y; pero ese arco o ángulo es precisamente el comprendido* entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, es decir, se considera solamente la semicircunferencia de la derecha, a fin de que esté unívocamente determinado.



Esto equivale a limitar la gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y de la curva tangentoide se toma solamente su rama 1.ª.

Análogamente, $\text{arc cos}\, x$ designa el único arco entre 0 y π, cuyo coseno es x

EJERCICIOS:

1. — *La cisoide de Diocles* se deduce de la circunferencia de radio a y su tangente en M llevando en cada secante por O el segmento $OP = AB$. Dedúzcase la ecuación polar (7) y de ella la cartesiana (6).

2. — La ***estrofoide*** **recta** se construye asimismo llevando $OP = AB$, pero la recta es perpendicular al radio de 0 en el centro.

Para la *trisectriz de Mac-Laurin* la recta es perpendicular en el punto medio del radio.

Dedúzcanse las ecuaciones cartesianas y polares de estas curvas.

3. — Demostrar que representa una estrofoide recta, simétrica respecto del eje y la ecuación: $r = a \,.\, \text{tg}\, \frac{1}{2}\, \alpha$.

4. — ¿Qué posición relativa respecto de la bisectriz $x = y$ ocupan las gráficas de dos funciones inversas $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$?

5. — En la gráfica de las funciones x^m señálense las funciones que son inversas *una de otra.*

Lección 3

CONCEPTO DE LIMITE

9. — Definición de límite.

Se dice que la función $y = f(x)$ se *aproxima infinitamente* al valor l, o *converge* hacia el valor l, *tiende* hacia el límite l, o *tiene* el límite l, para $x = a$, cuando la diferencia $y - l$, tomada en valor absoluto, se conserva *arbitrariamente* pequeña, tomando x *suficientemente* próxima al número a.

En términos precisos, escribiremos:

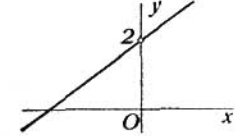
$$\text{lím. } f(x) = l, \text{ para } x = a, \text{ o mejor: } x \to a$$

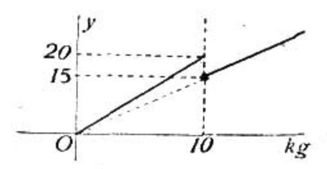
cuando para cada número positivo ε existe otro número positivo δ, tal que para todos los valores de x (excepto el mismo a), que cumplan la condición:

$$|x - a| < \delta \text{ se verifica: } |y - l| < \varepsilon.$$

Obsérvese que en esta definición no intervienen más que los valores de la función $y = f(x)$ en la proximidad de $x = a$, pero no el mismo valor a, en el cual la función puede no tener valor ninguno, o tener valor cualquiera. Por esto parece más adecuado escribir debajo o a la derecha de la abreviatura *lím.* la indicación: $x \to a$, en vez de $x = a$.

Ejemplo 1. — Sea la función $y = (x^2 + 2x) : x$. Su límite para $x \to 0$ es 2, puesto que para todo valor $x \neq 0$ es $y = x + 2$, y por tanto: $y - 2 = x$ llega a ser tan pequeño como se quiera, luego: lím. $(x^2 + 2x) : x = 2$. Sin embargo, para $x = 0$, la función no tiene valor correspondiente, pues carece de sentido aritmético dividir por cero.





Ejemplo 2. — Supongamos que el precio de una mercadería es 2 pesos kg. y desde 10 kg. en adelante se reduce a 1,50 pesos kg. La gráfica del valor de cantidades crecientes de dichas mercaderías se compone de dos segmentos de recta con pendientes 2 y 1,50 respectivamente, extendiéndose el segundo segmento infinitamente hacia la derecha.

La función $y = f(x)$ es creciente desde 0 hasta 10, sus valores se van acercando hacia 20, y llegan a diferir de 20 tan poco como se quiera; por ejemplo: será $20 - f(x) < 0{,}01$ (es decir, el valor diferirá de 20 pesos en menos de un centavo) si la cantidad de mercadería difiere de 10 kg. en menos de 5 gr., es decir: si es $10 - x < 0{,}005$ o sea desde $x = 9{,}995$. Podemos, pues, escribir: para valores *crecientes* de x es lím. $f(x) = 20$, si nos limitamos a considerar el intervalo 0 a 10.

Sin embargo, no llega a alcanzarse este valor 20; pues para $x = 10$, el valor es $y = 15$, según la nueva tarifa de 1,50 el kg.

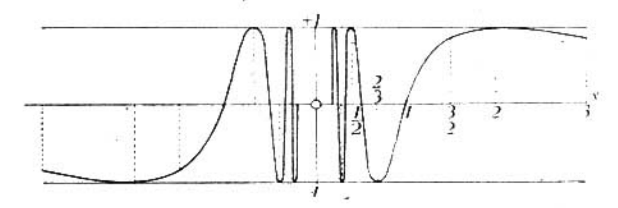
En cambio, si nos acercamos hacia $x = 10$ por la derecha ,es decir, decreciendo x, resulta lím. $f(x) = 15$.

En Análisis se distinguen estos dos modos de tender x al valor a, escribiendo respectivamente:

$$x \to a^- \quad ; \quad x \to a^+$$

Demuéstrese que el límite para $x \to 0+$ de $\sqrt{x}$ y de $1 : \log x$ es cero.

EJEMPLO 3. — Representar gráficamente la función $y = \text{sen}\ \pi/x$.



Observe el lector que al tender x a 0, y oscila indefinidamente sin tender hacia ningún valor fijo; por el contrario toma infinitas veces todos los valores entre -1 y $+1$. El símbolo lím. para $x \to 0$, aplicado a esta función, carece, por tanto, de sentido.

EJEMPLO 4. — Análogamente, si se representa la función $y = x.\text{sen}\ \pi/x$, las ordenadas de la función anterior están multiplicadas por x, que va disminuyendo; las infinitas ondas de altura 1 decrecen y quedan entre las dos bisectrices, puesto que el coeficiente angular de la cuerda que une cada punto con 0 es $y : x = \text{sen}\ \pi/x$ y por tanto oscila entre -1 y $+1$; es decir: el ángulo oscila entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$.

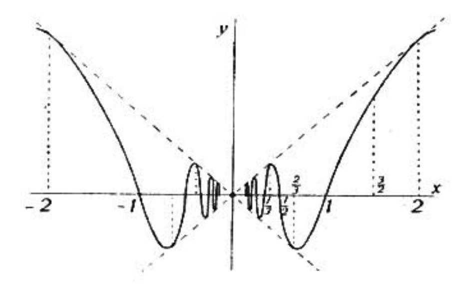
En este caso es:

$$\text{lím. } x \text{ sen } \pi/x = 0 \text{ para } x \to 0$$

pues en valor absoluto, la diferencia con el límite es:

$$| x.\text{sen}\ \pi/x | \leqq | x |$$

y, por tanto, llegará a ser menor que ε, sin más que tomar $| x | < \varepsilon$.



Nota. — Vemos en este ejemplo que la función puede alcanzar infinitas veces su valor límite, mientras que x no alcanza el valor a. Esto mismo acontece ya en el caso más simple: *El límite de una constante es la misma constante.*

10. — Propiedades de los límites.

Si $l = \lim. f(x)$ es positivo, desde un valor de x difiere $f(x)$ de l en menos de l, luego es $f(x) > 0$. Análogamente, si l es negativo, resulta $f(x) < 0$. Es decir: *Desde un valor de x en adelante la función tiene el mismo signo de su límite.*

Corolario: Si $a < l$, como $f(x) - a$ tiene límite $l - a > 0$, será desde un x en adelante: $f(x) - a > 0$, es decir: $f(x) > a$.

Si $f(x)$ está comprendida entre dos funciones $g(x)$ y $h(x)$ que tienen el mismo límite para $x \to a$, la diferencia entre $f(x)$ y l está comprendida entre las diferencias $g(x) - l$ y $h(x) - l$, luego será menor que ε en valor absoluto si éstas lo son. Por tanto: *Si una función está comprendida entre otras dos que tienen el mismo límite para $x \to a$, tiene este mismo límite.*

Como en la definición de límite sólo intervienen los valores de $f(x)$ en la proximidad del punto $x = a$, pero no el valor $f(a)$, resulta: *Dos funciones que son iguales para todos los valores de x distintos del $x = a$, tienen el mismo límite para $x \to a$.*

Por tanto, es legítimo, antes de calcular el límite, hacer en la función todas las simplificaciones convenientes, incluso la supresión de factores comunes que se anulan para $x = a$, siempre que éstos no se anulen para otros valores de x próximos a a.

Así, en el ejemplo anterior 1, simplificaremos suprimiendo el factor x, y después calcularemos el límite.

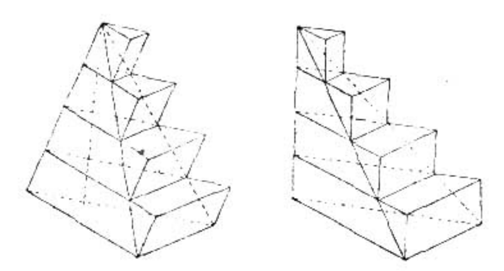
11. — Método infinitesimal o paso al límite.

Esta operación de tomar límites en una igualdad, o pasar al límite, es el fundamento del método infinitesimal.

Mas no vaya a creerse que éste consiste en sustituir una variable por su límite, lo que implicaría un error, y, por tanto, las conclusiones y fórmulas del Cálculo infinitesimal serían aproximadas. El método infinitesimal consiste en *pasar de una igualdad entre dos variables a otra igualdad entre sus límites;* es decir: de la igualdad $y = z$ se deduce: lím. $y =$ lím. z que es rigurosamente exacta.

Un ejemplo clásico aclarará esta idea. Una pirámide es límite de la suma de prismas que resultan tomando como bases las secciones por planos paralelos; pero no es legítimo tomar como volumen V de la pirámide la suma S_n de los prismas, pues, por muchos que sean éstos, hay una diferencia o error por defecto o por exceso, respecto de la pirámide dada.

Ahora bien: si tenemos dos pirámides de igual altura y bases equivalentes y efectuamos en ambas la descomposición con igual número de planos equidistantes, cada prisma es equivalente a su homólogo, como se demuestra en Geometría elemental; por tanto, $S_n = S'_n$ y tomando límites resulta la igualdad *rigurosamente* exacta: $V = V'$. *Es así como se demuestra en Geometría* que dos pirámides de igual altura y bases equivalentes tienen igual volumen.



En este ejemplo se admite intuitivamente la existencia de límite, o sea el volumen V; pero tal existencia resulta rigurosamente del importante teorema siguiente:

Teorema de las sucesiones monótonas convergentes.

Todo par de sucesiones numéricas del tipo:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

tales que la diferencia $b_n - a_n$ tiende a 0 al crecer n, determinan un número real que pertenece a todos los intervalos $[a_n, b_n]$.

Expresados decimalmente a_n y b_n, si su diferencia es menor que una unidad decimal de orden m, tienen comunes al menos $m - 1$ cifras decimales. Al crecer

n, las cifras comunes componen un número $\xi = E, a\,b\,c \ldots\ldots$ **contenido en todo intervalo** $[a_n, b_n]$.

Tal número, llamado *frontera*, es el único contenido en todos los intervalos; pues si hubiera otro, se conservaría $b_n - a_n$ mayor que la diferencia entre ambos, contra la hipótesis.

NOTAS

Ejemplos de método infinitesimal en Matemáticas elementales.

En Geometría elemental se utiliza frecuentemente el método infinitesimal; he aquí algunos ejemplos:

La longitud de una curva se define como límite de los perímetros de las quebradas inscritas o circunscritas; análogamente el área del círculo y de todas las figuras limitadas por curvas se define y calcula como límite de las áreas de polígonos inscritos o circunscritos, o bien, como límite de la suma de triángulos cuyo número va creciendo, a medida que tienden sus áreas a cero.

Este método, que consiste en sumar n elementos variables y pasar al límite para $n \to \infty$, se llama *integración*.

Son, pues, integraciones: el cálculo de la longitud de la circunferencia, del área del círculo, de la superficie lateral del cono o cilindro, del volumen del cono, etc., que se efectúan en Geometría elemental.

EJERCICIOS

1\. — Demostrar: $\quad$ lím. sen $x = 0$, lím. cos $x = 1$ $\quad$ para $x \to 0$.

2\. — Dice la obra de *Häffner* titulada: *Einführung in die Differential- und Integralrechnung*, en la pág. 117 (2.ª ed.):

"En la gráfica se ve fácilmente que al hacerse el arco cada vez más pequeño, la cuerda (sen x) cada vez coincide más con su correspondiente arco x, y finalmente, *en el límite*, se puede considerar como igual a éste; de donde resulta que el límite de la razón del seno al arco es 1."

Vea el lector que es inadmisible este razonamiento; con él se probaría que un lado de un triángulo es igual a la suma de los otros dos, sustituyendo éstos por una quebrada que tiende a confundirse con aquél; ¡y guárdese el lector de esa engañosa frase "*en el límite*"!; pues para $x = 0$ no sólo coincide sen x con x, sino también con $2x$, con $8x$, con $\sqrt{x}$, ... ya que todos son nulos.

3\. — Dar sucesiones $x_n \to 0$ tales que los correspondientes valores de la función del Ejemplo 3 tengan límite *aritmético*, a pesar de no existir límite *funcional*.

4\. — Demostrar: si $f(x) < g(x)$ es lím. $f(x) \leq$ lím. $g(x)$. Dar ejemplos en que resultan iguales los límites.

LECCIÓN 4

FUNCIONES CONTINUAS

12. — Definición de la continuidad.

Hemos advertido que en la determinación del límite de $f(x)$ para $x \to a$ no interviene el valor $f(a)$ sino solamente los valores de $f(x)$ en la proximidad de a. Por tanto, puede ser:

$$f(a) \neq \text{lím.}\, f(x) \text{ para } x \to a$$

La función $f(x)$ se llama *continua* en el punto $x = a$, cuando el valor $f(a)$ que toma en él es también el límite a que tiende al acercarse x a dicho punto, es decir, cuando se verifica:

$$\text{lím.}\, f(x) = f(a) \text{ para } x \to a.$$

Cuando esta condición no se cumple, la función se dice *discontinua* en el punto a.

La función se llama *continua en un intervalo,* cuando sus valores en él cumplen la condición de continuidad en cada punto del intervalo, incluso en sus extremos.

Según el concepto de límite dado en la lección anterior, la definición de continuidad equivale a ésta:

El incremento $\Delta y = f(x) - f(a)$ puede hacerse en valor absoluto tan pequeño como se quiera, tomando el incremento $\Delta x = x - a$ suficientemente pequeño.

En términos precisos: dado un número positivo arbitrario ε, se verifica: $|\Delta y| < \varepsilon$, tomando $|\Delta x|$ menor que un cierto número δ.

Este es el significado claro de la imprecisa frase con que los autores clásicos expresaban la continuidad, diciendo que la función "varía por grados insensibles", es decir, al variar muy poco la variable varía poco la función. ¿Qué relación existe entre ambos incrementos? Este es uno de los problemas capitales del Cálculo diferencial, que pronto resolveremos.

La gráfica de una función continua, se llama *curva uniforme;* no se define, pues, como antiguamente, la continuidad de la función mediante la imprecisa intuición de *curva,* sino que, por el contrario, el concepto de *curva* se define mediante la noción clara y precisa de *función continua.*

Arco de curva uniforme es la parte de ésta que corresponde a un intervalo de la variable independiente x.

Todas las funciones elementales, simples y compuestas, son continuas en todo punto en que tienen valor determinado; sus puntos de discontinuidad son aislados y solamente aquellos en que la función no está definida. Sus gráficas se componen, pues, de arcos de curva. Esta propiedad general resultará más adelante en el cálculo de derivadas; pero podemos utilizarla ya, para calcular el límite de una función elemental cualquiera para $x \to a$, sustituyendo $x = a$.

EJEMPLO. He aquí el cálculo de algunos límites:

$$\text{Para } x \to 1, \text{ lím. } \frac{x^2+1}{2x^4-5} = \frac{1+1}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Para } x \to \pi, \text{ lím. tg } x = \text{tg } \pi = 0$$

13. — Propiedades fundamentales de las funciones continuas.

De la definición de función continua y de las propiedades de los límites resulta: I. *La suma, diferencia, producto y cociente de funciones continuas es función continua, excepto en los puntos en que se anule la función divisor.*

En efecto, en la lección 6 demostraremos que el límite para $x \to a$ de las funciones continuas:

$$f(x) + g(x) \;;\; f(x) - g(x) \;;\; f(x) \,.\, g(x) \;;\; f(x) : g(x)$$

es respectivamente $f(a) \pm g(a)$; $f(a) \,.\, g(a)$; $f(a) : g(a)$, valor que toma en a la función compuesta.

EJERCICIO. — Fórmese el incremento de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones continuas y se verá que tiende a 0, cuando tiende el incremento de x.

Resultará así, en virtud de la segunda definición (12) de continuidad, otra demostración del teorema.

Menos inmediatas son estas dos propiedades fundamentales, cuya demostración puede verse en las notas:

II. *Entre los valores de una función $f(x)$ continua en un intervalo completo $[a, b]$ hay un valor máximo absoluto M no superado por ningún otro; y un mínimo absoluto m, que no supera a ningún otro $f(x)$.* (Teorema de BOLZANO - WEIERSTRASS).

Esta propiedad de las funciones continuas no la tienen todas las funciones. Así, por ejemplo: la función $y = 1/x$ no es continua en todo el intervalo [0,1], puesto que deja de serlo en el extremo $x = 0$; y no tiene valor máximo en (0,1), sino que por el contrario, llega a exceder a cualquier número, por grande que sea, tomando x suficientemente pequeño.

III. *Si una función es continua en $[a, b]$ toma en (a, b) todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$*. (Teorema de BOLZANO).

En particular: si es positiva para $x = a$, y negativa para $x = b$, hay entre a y b un punto al menos en que se anula $f(x)$, es decir, al pasar la curva de uno a otro semiplano del eje x, corta a éste.

En esta propiedad se funda el cálculo de raíces de las ecuaciones. Una vez encontrados los valores a y b en que $f(x)$ toma signos contrarios, para aproximarnos más al valor de la raíz comprendida entre ambos se van sustituyendo valores intermedios, hasta llegar a la aproximación exigida.

EJEMPLO. Resolver la ecuación $\operatorname{tg} x = x$, que se presenta en Física. Con las tablas de tangentes naturales se encuentra:

$$x = 180° + 77° = \pi + 1{,}34 \ldots = 4{,}48 \ldots \quad ; \quad \operatorname{tg} x - x \text{ negativa}$$

$$x = 180° + 78° = \pi + 1{,}36 \ldots = 4{,}50 \ldots \quad ; \quad \operatorname{tg} x - x \text{ positiva}$$

Aproximando más, dando a x valores de $10'$ en $10'$ y después de $1'$ en $1'$, resulta:

$$x \sim 257° \, 27' = 4{,}493 \ldots$$

Representar gráficamente las raíces como intersección de la tangentoide con la bisectriz de los ejes: $y = x$.

14. — Verdadero valor de las expresiones indeterminadas.

Hemos visto en el ejemplo $(x^2 + 2x) : x$ que esta función está bien determinada, es decir, tiene un valor numérico para todo valor de x, excepto para el $x = 0$, en el cual carece de significado, pues en Aritmética no tiene sentido el cociente $0 : 0$. Si representamos gráficamente la función, vemos que ésta es igual a $x + 2$ para todo valor de $x \neq 0$ y su gráfica es una línea recta, excepto el punto en que corta al eje y. Parece, pues, natural *completar* la función, asignándole al valor $x = 0$ el correspondiente $y = 2$.

Regla general: si al sustituir $x = a$ en la función $f(x)$ resulta una expresión aritmética que carece de valor numérico, completaremos la función, asignándole como valor en el punto $x = a$ el límite a que tiende $f(x)$ para $x \to a$; es decir, ya que $f(a)$ carece de sentido, le asignamos el valor siguiente:

$$f(a) = \text{lím.} \, f(x) \quad \text{para } x \to a.$$

Este número con el cual completamos la función en el punto $x = a$ suele llamarse *verdadero valor* de $f(x)$ en dicho punto; la justificación de este nombre es la siguiente: si asignáramos a $f(x)$ otro valor cualquiera distinto del lím. $f(x)$, resultaría una función

discontinua; en cambio, adoptando como valor $f(a)$ este límite, hacemos que la función sea *continua* en el punto $x = a$. Cuando no exista límite, no podemos conseguir esto. Así sucede en los ejemplos del párrafo anterior.

El cálculo del verdadero valor de una función en el punto $x = a$, se reduce, como vemos, a calcular su límite para $x \to a$, y como las reglas de cálculo de límites son ineficaces en estos casos, es preciso recurrir a artificios especiales; uno de ellos es la supresión de factores comunes, como se explica a continuación.

15. — Expresiones indeterminadas de la forma 0 : 0.

Este es el caso más importante, en que la función $f(x)$ carece de valor para $x = a$, es decir: cuando $f(x)$ es un cociente $f(x) = \varphi(x) : \psi(x)$, cuyos dos términos numerador y denominador se anulan para $x = a$.

Cuando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son polinomios, ambos son divisibles por el binomio $x - a$, según se demuestra en Algebra, y simplificando la fracción antes de tomar límites, mediante la supresión del factor común $x - a$, si en la nueva fracción no se anulan numerador ni denominador, basta poner $x = a$ y resulta el límite buscado.

Ejemplos. — Hemos calculado en el párrafo anterior:

$$\text{lím.}\ (x^2 + 2x) : x = \text{lím.}\ (x + 2) = 2$$

Análogamente resulta:

$$\frac{x - 1}{x^4 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

El límite de la primera es igual al de la última, y éste se calcula sustituyendo $x = 1$; así resulta 1/4.

Vemos en estos ejemplos, que el límite de una función que adopta la forma 0/0, puede ver distinto, según cual sea la función que da origen a dicha forma; por esto suele llamarse *expresión indeterminada,* como sus análogas, que estudiaremos más adelante.

Objeto esencial del *Cálculo diferencial* es el cálculo de límites indeterminados del tipo $^0/_0$ mediante el algoritmo de las *derivadas.*

16. — Funciones discontinuas.

La definición de continuidad en el punto $x = a$ exige que exista lím. y; y además, que coincida con $f(a)$.

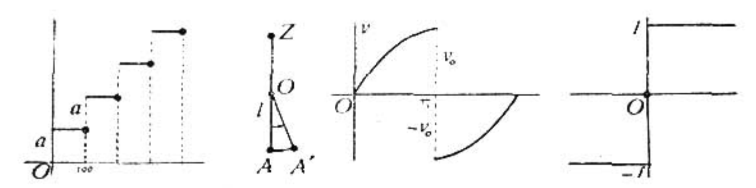
Tenemos, pues, dos causas fundamentales de discontinuidad:

1.° Existe lím. y pero no tiene valor numérico $f(a)$, por presentarse *una expresión aritmética que carece de sentido*; entonces cabe completar la función haciéndola continua,, adoptando el *verdadero valor;* la discontinuidad se llama *evitable*.

2.° No existe lím. y, es decir, al tender x a a, no tiende y hacia ningún valor único. Si hay un límite por la derecha y otro por la izquierda, la diferencia entre ambos se llama *salto*, y la discontinuidad de 1.ª especie. Tal sucede en los ejemplos que siguen.

Se llaman de 2.ª especie las discontinuidades en que no existen límites laterales; tal es la que ofrece en el origen el ejemplo (9.3).

EJEMPLO 1. — He aquí una función discontinua, en la cual, por pequeño que sea el incremento de la variable, el incremento de la función se conserva constante y no tiende hacia cero. El flete para mercaderías en los ferrocarriles suele calcularse por fracciones indivisibles de 100 kg.; por tanto si el flete para cada 100 kg. es a, el flete correspondiente a 300 kg. es $3\,a$, y para $300 + h$, cualquiera que sea el incremento h, se paga como 400, es decir: $4\,a$. Por tanto, por pequeño que sea el incremento positivo de la variable, el de la función vale a; hay, pues, un salto de altura a.



EJEMPLO 2. — Si desviamos un péndulo OA el ángulo t hasta la posición OA' y lo abandonamos a su propio peso, desciende con velocidad creciente y al llegar al punto más bajo, la velocidad (según la Dinámica), es:

$$v = 2\sqrt{gl}\,\text{sen}\,t/2 \qquad -\pi < t < +\pi$$

siendo l la longitud y g la constante de la gravedad, o sea 981 en sistema c.g.s.

Al crecer t desde 0 hasta valores cercanos a π, crece v aproximándose al valor $v_0 = 2\sqrt{gl}$; análogamente, para valores negativos de t toma v valores de signo contrario. La gráfica tiene la forma indicada en la figura y se repite periódicamente, pues al incrementar t en 2π, toma v el mismo valor. Sin embargo, para $t = \pi$ el valor de la función no es el dado por la fórmula, según la cual, v alcanzaría el valor máximo v_0, sino que, por el contrario, el *péndulo quedaría inmóvil, en equilibrio inestable en su posición OZ; por tanto*, no hay ningún valor de v correspondiente al $t = \pi$ ni al $t = -\pi$.

Para valores de t crecientes y que tiendan hacia π, los valores de v tienen el límite v_0; para valores de t superiores a π, y que tiendan a π, la función tiende hacia $-v_0$.

EJEMPLO 3. — La función $|x| : x$, o bien: $x : |x|$ tiene en el origen discontinuidad de primera especie, con salto 2. Esta función suele designarse sg x (signo de x); vale 1 para $x > 0$; -1 para $x < 0$.

NOTAS

Conservación de signo en el entorno de un punto.

Si $f(x)$ es continua y $f(a) > 0$, hay un entorno en el cual difiere de $f(x)$ en menos de $f(a)$, es decir, $f(a) - f(x) < f(a)$ luego $f(x) > 0$. Análogamen te, si $f(a) < 0$ es $f(x) < 0$ en un entorno del punto a.

Corolario: Si $f(x)$ es continua en el punto a, y es $f(a) > c$ se conserva $f(x) > c$ en todo un entorno de c; si es $f(a) < c$, se conserva $f(x) < c$. Basta, en efecto, observar que siendo $f(a) - c > 0$ en el primer caso, debe ser $f(x) - c > 0$ en un entorno; y análogamente en el otro caso.

Demostración del teorema de Bolzano.

El mismo procedimiento seguido para el cálculo de las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ nos da la demostración del teorema de Bolzano. Supongamos, p. ej.: $f(2) < 0$, $f(3) > 0$; si dividimos el intervalo (2, 3) en 10 partes iguales, existirá uno, en que pasará de — a +; sea, p. ej.: $f(2{,}7) < 0$, $f(2{,}8) > 0$; así siguiendo, o se llega a un valor en que se anula la función, o se va formando un número $c = 2{,}7051\ldots$ con las cifras calculadas; y debe ser forzosamente $f(c) = 0$; puesto que en todo entorno suyo, por pequeño que sea, la función toma valores positivos y negativos.

Demostración del teorema de Bolzano-Weierstrass.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, dividido éste en dos partes iguales, caben dos casos:

1.° En cada intervalo parcial hay algún valor de $f(x)$ no superado en el otro. Ambos valores son, por tanto, iguales; y no estando cada uno superado por ningún otro de $f(x)$, es el máximo absoluto.

2.° Hay al menos un intervalo parcial $[a_1, b_1]$ donde son superados *todos* los valores del otro. Bisecado $[a_1, b_1]$ sea $[a_2, b_2]$ un intervalo parcial donde son superados *todos* los valores del otro; etc.

Si en este proceso de bisecciones no se presenta el primer caso, resulta una sucesión indefinida de intervalos, que por el teorema (11) tienen un punto común p.

El valor $f(p)$ no puede ser superado por ningún otro; pues suponiendo $f(p) < f(q)$ se conservará $f(x) < f(q)$ en todo un entorno de p (V. corolario); y como para n suficientemente grande ese entorno, que no contiene a q, contiene un $[a_n, b_n]$ donde son superados *todos* los valores restantes, resulta contradicción. El valor $f(p)$ es, por tanto, máximo.

Con leve cambio de palabras, o bien aplicando la conclusión a la función $-f(x)$, resulta la existencia del mínimo de $f(x)$.

EJERCICIOS

1. — Dar funciones discontinuas sencillas que cumplan la condición de Bolzano en $[a, b]$, esto es, tomen todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

2. — Observar que la función discontinua del Ej. 3(9) cumple esa condición en *todo* intervalo.

3. — Una función discontinua en un punto, ¿puede ser continua en un intervalo que tenga ese extremo? Obsérvese que en los siete ejemplos de esta lección y la anterior, el comportamiento es distinto.

LECCIÓN 5

INFINITESIMOS

17. — Propiedades fundamentales.

Toda variable que tiene límite 0 se llama *infinitamente pequeña*: más brevemente, se llama también *infinitésimo*.

La condición esencial del infinitésimo es la *variabilidad* y tener por *límite* 0. Hablar de *números* infinitamente pequeños es un *contrasentido; pues siendo un número invariable, no puede llegar a* ser menor que cualquier otro número, que es la condición esencial del infinitésimo.

I. *La suma de infinitésimos (en número finito de sumandos) es un infinitésimo.*

Pues si tenemos la suma $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$, ésta llega a conservarse $< \varepsilon$ en valor absoluto, desde el momento en que todos los sumandos sean menores que $\varepsilon : n$.

EJEMPLO. — La suma $x^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x + 2x^3$, llega a ser menor que 0,001, tomando $|x| < 0{,}0001$; pues entonces cada uno de los sumandos es inferior a 0,0002.

Nota. — Es indispensable que el número de sumandos sea *finito;* pues si al tender a 0 cada infinitésimo, el número de ellos va aumentando, la suma puede tener un límite distinto de 0. Tal sucede en el cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas planas o espaciales. Como veremos, se descomponen en trozos que van disminuyendo y tendiendo hacia cero, al mismo tiempo que el número de ellos crece infinitamente; la suma de todos estos infinitésimos tiene un límite distinto de cero que es el área o volumen buscado. La determinación de tales límites es objeto del Cálculo integral.

Otro ejemplo: la suma de n sumandos iguales a $1/n$ vale 1, aunque son infinitésimos al crecer n infinitamente.

II. *El producto de un infinitésimo por una constante, o por una variable acotada, es decir, cuyo valor absoluto se conserva inferior a un número fijo k, es un infinitésimo.*

En efecto, si en el producto $y.z$ se conserva $|z| < k$ y la variable y llega a ser tan pequeña como se quiera, desde el momento en que llegue a ser $|y| < \varepsilon : k$, el producto será inferior a ε.

Análogamente: *el cociente de un infinitésimo por una constante no nula, o por una variable cuyo valor absoluto se conserva superior a un número positivo, es un infinitésimo.*

18. — Comparación de infinitésimos.

Para $x \to 0$, son infinitésimas las variables:

$$x, x^2, x^3, \ldots, x^m, \ldots$$

y éstas se toman como tipos de comparación para las demás variables infinitesimales. También pueden tomarse potencias de exponente fraccionario.

El infinitésimo x se llama de primer orden, el x^2 de segundo orden, ..., el x^m se dice de orden m.

Dos infinitésimos α y β se llaman de *igual* orden cuando su cociente tiene un límite finito y distinto de cero. Por tanto, kx^m, cualquiera que sea el coeficiente $k \neq 0$, es también de orden m.

Cuando el cociente α/β tiene límite 0, se dice que α es de orden *superior* a β; entonces tiene β/α límite infinito.

Cuando el cociente de α por β carece de límite, finito ni infinito, se dice que ambos infinitésimos no son comparables.

EJEMPLOS. — Son de segundo orden los infinitésimos: $4x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, πx^2.

El infinitésimo $3\sqrt{x}$ es de orden $\frac{1}{2}$.

El infinitésimo x sen π/x no es comparable con el x, pues el cociente carece de límite, como se ha visto en (8).

Para $x \to a$, se adopta $x - a$ como infinitésimo de 1.^{er} orden. Ejemplo: ¿de qué orden es ctg x para $x \to \pi/2$? Contéstese después de leer (20).

19. — Infinitésimos equivalentes.

Dos variables cualesquiera (en particular dos infinitésimos α y β) se llaman *equivalentes*, cuando su cociente tiene límite igual a 1.

La diferencia de dos infinitésimos equivalentes es un infinitésimo de orden superior. En efecto: por ser

$$\text{lím. } \alpha/\beta = 1 \quad \text{será } \alpha/\beta = 1 + \delta$$

siendo δ un infinitésimo; por tanto: $\alpha - \beta = \beta\delta$, es decir de orden superior a β.

Recíprocamente, de esta igualdad resulta la anterior, es decir: si la diferencia de dos infinitésimos de igual orden es de orden superior a ambos, éstos son equivalentes.

Si un infinitésimo α es igual a otro β más un infinitésimo γ de orden superior a β, es decir: $\alpha = \beta + \gamma$, el sumando β suele llamarse *parte principal* de α, y es equivalente a α. Dada una suma de infinitésimos de órdenes diversos, el de menor orden es la parte principal, equivalente al infinitésimo suma. Esta operación se llama

despreciar infinitésimos de orden superior; y aunque la *parte principal* no es igual al infinitésimo suma, es equivalente a él, es decir, su cociente tiene límite 1.

Una variable finita puede considerarse como equivalente a su límite, puesto que la diferencia entre ambos es infinitésima. Es lo mismo escribir:

$$\text{lím. } y = l \qquad \text{o bien: } y = l + \delta$$

siendo δ infinitésimo. De esta expresión de cada variable, igual a su límite más un infinitésimo, haremos uso frecuente.

Ejemplo. — Demostremos que para $x \to 0$ es lím. $\cos x = 1$.

En efecto: $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x < 2(\frac{1}{2}x)^2 = \frac{1}{2}x^2$, que es un infinitésimo.

20. — Equivalencia de los infinitésimos x, sen x, tg x.

Para $x \to 0$ tienen límite cero el *sen* x y *tg* x. Vamos a demostrar que estos tres infinitésimos son equivalentes.

De la definición de longitud de un arco, como límite de los perímetros de las quebradas inscriptas y circunscriptas (8) resulta:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

es decir: el arco es mayor que el seno y menor que la tangente.

Quizás no sea inútil recordar que son tres números abstractos, razones de longitudes. Dividiendo sen x por los tres miembros, resulta esta acotación de sentido opuesto:

$$1 > (\operatorname{sen} x)/x > \cos x$$

y dividiendo los mismos tres miembros por tg x, resulta esta otra:

$$\cos x < x/\operatorname{tg} x < 1$$

Al tender x a 0, con signo cualquiera, es:

$$1 - \operatorname{sen} x : x < 1 - \cos x \qquad \text{infinitésimo}$$

$$1 - x : \operatorname{tg} x < 1 - \cos x \qquad \text{,,}$$

y de la definición de límite resulta:

$$\text{lím. } \operatorname{sen} x : x = 1 \qquad \text{para } x \to 0$$

$$\text{lím. } x : \operatorname{tg} x = 1 \qquad \text{,,} \quad \text{,,}$$

Nota. — Puesto que la tangente, el seno y el arco son equivalentes, tenemos estos infinitésimos también equivalentes: x, arc sen x, arc tg x.

Ejemplo . — El infinitésimo $1 - \cos x$ es equivalente a $\frac{1}{2}x^2$. En efecto, basta sustituir en el ejemplo anterior (19) el seno por el arco.

21. — Valores aproximados.

La palabra *infinitésimo* se usa impropiamente en las ciencias de aplicación, designando con ella un número *muy pequeño*, es decir, despreciable respecto del grado de aproximación prefijado. Dentro de este límite de error, el seno y la tangente de un arco pequeño pueden sustituirse por el arco; pero debemos precisar bien qué entendemos por suficientemente pequeño.

Puesto que la longitud de la semicircunferencia de radio 1 es π,

la longitud de 1° es $\pi:180 = 0{,}01745\ldots.$
„ „ „ 2° „ $0{,}03490\ldots.$
„ „ „ 3° „ $0{,}05236\ldots.$
....

La diferencia entre el seno y el arco es equivalente a la sexta parte del cubo del arco (más adelante se verá que es menor). Por tanto, estos errores $x - \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x - x$ valen aproximadamente:

Para $x \leqq 1°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}000001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}000002$
„ $x \leqq 2°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}00001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}00002$
„ $x \leqq 3°$, $x - \operatorname{sen} x < 0{,}0001$, $\operatorname{tg} x - x < 0{,}0001$

Será, pues, legítima la sustitución del seno por el arco, hasta amplitudes de 3°, en cálculos de cuatro decimales exactas, pero no en cálculos que exijan seis decimales exactas, en los cuales sólo será legítima la sustitución para arcos menores que 1° y análogamente en los demás casos.

Advirtamos, de una vez para siempre, que la igualdad *aproximada* de dos números, se expresa por el signo $a \backsim b$; pero la palabra *aproximada* carecerá de sentido si no se da una cota superior de error ,es decir, un número que no puede superar la diferencia $a - b$ o $b - a$, tomada en valor absoluto.

Ejemplo. — Las visuales dirigidas a la base y al punto más alto de una torre situada a 1000 m. del observador, forman con la horizontal ángulos de 45′ y 2° respectivamente. Calculemos la altura de la torre.

La fórmula exacta es: $h = 1000\ (\operatorname{tg} 2° - \operatorname{tg} 45')$ y sustituyendo las tangentes por los arcos resulta:

$\operatorname{tg} 2° \backsim 0{,}03490\ldots.$
$\operatorname{tg} 45' \backsim 3/4 . 0{,}01745\ldots. = 0{,}01308\ldots..$

de donde resulta: $h \backsim 21{,}82$ m.

El error en minuendo y sustraendo es por defecto e inferior a 0,02, luego el error final es menor que 2 cm.

EJERCICIOS

1. — Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo infinitésimo, ¿qué elementos *infinitésimos tiene?*

2. — Si un triángulo rectángulo tiene los dos catetos infinitésimos del mismo *orden, ¿cómo* es la *hipotenusa?*

3. — ¿Cómo deben ser los ángulos de un triángulo para que sus tres lados sean infinitésimos equivalentes?

LECCIÓN 6

CALCULO DE LIMITES

22. — Límite de una suma.

El límite de la suma de un número finito de variables que tienen límites, es la suma de los límites de estas variables.

Sean las variables y_1, y_2 .... y_m que tienen los límites l_1, l_2, ... l_m, es decir:

$$y_1 = l_1 + \delta_1, \quad y_2 = l_2 + \delta_2, \ \ldots, \ y_m = l_m + \delta_m.$$

siendo δ_1, δ_2, ... δ_m infinitésimos. Sumando:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = l_1 + l_2 + \ldots + l_m + (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m)$$

y como la suma de infinitésimos es un infinitésimo, resulta:

$$\text{lím.} \ (y_1 + y_2 + \ldots + y_m) = l_1 + l_2 + \ldots + l_m$$

Nota. — Vamos a poner varios ejemplos, en los cuales no es aplicable el teorema que acabamos de enunciar, para hacer ver el peligro que encierra el prescindir de la restricción impuesta al número de sumandos.

Ya vimos en (17) la suma de n sumandos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

supongamos que n crece infinitamente; cada uno de estos sumandos tiene por límite 0. Si aplicáramos el teorema anterior, el límite de la suma sería 0. Sin embargo, no es así, puesto que dicha suma vale exactamente 1.

Otro ejemplo sea la suma de n sumandos:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Si n crece infinitamente, cada uno de los sumandos tiene límite 0; sin embargo, la suma tiene límite infinito, pues su valor es $n : \sqrt{n} = \sqrt{n}$.

23. — Límite de un producto.

El límite de ky, siendo k un coeficiente constante, es k . lím y.

Pues siendo $y = l + \delta$, es $ky = kl \pm$ infinitésimo.

El límite de un producto de un número finito de variables es el producto de los límites de los factores.

Sean, por ejemplo, dos variables y_1, y_2 que tienden hacia los límites l_1, l_2. Es decir:

$$y_1 = l_1 + \delta_1 \qquad y_2 = l_2 + \delta_2$$

siendo infinitésimos δ_1, δ_2. Multiplicando ambas igualdades:

$$y_1\, y_2 = l_1\, l_2 + (\delta_1\, l_2 + \delta_2\, l_1 + \delta_1\, \delta_2)$$

y como la suma de tres infinitésimos lo es también, resulta:

$$\text{lím. } y_1\, y_2 = l_1\, l_2 .$$

y lo mismo para m factores:

$$\text{lím. } y_1\, y_2 \ldots\ldots y_m = l_1\, l_2 \ldots\ldots l_m .$$

EJERCICIO. — Demuéstrese esta fórmula general por el mismo método seguido para dos factores, multiplicando las m igualdades, y observando que todos los términos, excepto $l_1\, l_2 \ldots\, l_m$ son infinitésimos.

Demuéstrese también por *inducción*, es decir, probando, por lo ya demostrado para dos factores, que si es cierta para varios factores lo es para uno más.

Nota. — La aplicación de la regla cuando el número de factores es infinito o crece indefinidamente, conduce a errores, como en el ejemplo siguiente: sean n factores iguales a $1 + 1/n$; si aplicáramos la regla, como el límite de cada factor es 1, el límite del producto sería 1.

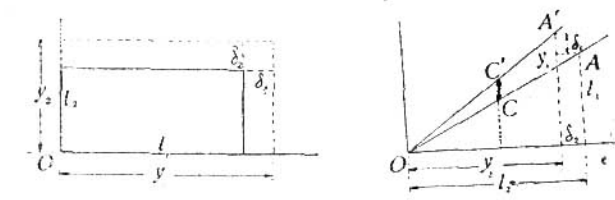
Sin embargo, veremos muy pronto que el límite es el número:

$$e = 2{,}71828\ldots.$$

En resumen: para poder aplicar este teorema, las condiciones que deben cumplirse son: que cada uno de los factores tenga límite y que el número de esos factores, sea fijo o variable, se conserve finito.

Interpretación gráfica.

Geométricamente resulta una interpretación interesante: el producto $y_1\, y_2$ representa el área del rectángulo de lados $y_1\, y_2$; el producto $l_1\, l_2$ el área del rectángulo análogo formado con l_1 y l_2; la diferencia entre ambos se compone de los rectángulos $\delta_1\, l_2$, $\delta_2\, l_1$ y del rectángulo $\delta_1\, \delta_2$.



La suma de los tres puede hacerse tan pequeña como se quiera, tomando los incrementos δ_1 y δ_2 suficientemente pequeños y resulta el teorema.

24. — Límite de un cociente.

Límite de un cociente de dos funciones, las cuales tienen límites finitos, es el cociente de los límites, cuando el límite del denominador sea distinto de 0.

Sean: $y_1 = l_1 + \delta_1$, $y_2 = l_2 + \delta_2$; la diferencia:

$$\frac{l_1 + \delta_1}{l_2 + \delta_2} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\delta_1 l_2 - \delta_2 l_1}{(l_2 + \delta_2) l_2}$$

es un infinitésimo en virtud del teorema (17, II); pues el denominador tiende al límite $l_2^2 > 0$, su recíproco es finito, y el numerador es infinitésimo. Por tanto:

$$\text{lím.} \frac{y_1}{y_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

También este teorema del cociente tiene interpretación geométrica interesante. *El* cociente $y_1 : y_2$ representa el *coeficiente angular* o *pendiente* del vector OA, siendo (y_1, y_2) las coordenadas de A; y el cociente $l_1 : l_2$ es la pendiente de OA', siendo (l_2, l_1) las coordenadas de A'.

Estas rectas OA y OA' interceptan sobre la vertical del punto 1 ordenadas iguales a dichas pendientes; luego CC' mide el incremento del cociente, y puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando δ_1 y δ_2 suficientemente pequeñas. (Véase la segunda figura anterior).

25. — Límites de logaritmos y exponenciales.

Como las *funciones exponencial y logarítmica son continuas*, se tiene para $x \to a$:

$$\text{lím. } b^x = b^a \quad ; \quad \text{lím. } \log x = \log a$$

Más general: si $f(x)$, $\alpha(x)$ son continuas, se tiene:

$$y = f(x)^{\alpha(x)} = b^{\log y} \quad ; \quad \log y = \alpha(x) \cdot \log f(x)$$

cualquiera que sea la base b de los logaritmos; y tomando límites para $x \to \alpha$, resulta:

$$\text{lím. log. } y = \alpha(a) \log f(a)$$

$$\text{lím. } y = b^{\text{lím. log } y} = f(a)^{\alpha(a)}$$

Basta, pues, sustituir $x = a$ y se obtiene el límite.

EJEMPLOS. — Para $x \to 0$, resultan estos límites:

$$\text{lím. } 2^x = 2^0 = 1 \quad ; \quad \text{lím. } \log(x+1) = \log. 1 = 0.$$

$$\text{lím. } (x+1)^{x-1} = 1^{-1} = 1$$

Nota. — Más adelante estudiaremos los casos en que las reglas de esta lección no dan los límites buscados.

Tal sucede, por ejemplo, cuando dividendo y divisor tienen límite 0; en tales casos, los límites se llaman *indeterminados*, porque no están determinados por los límites de los datos, y según cuales sean las funciones, resultan límites diversos.

26. — Sustitución de variables equivalentes.

En (19) hemos llamado *equivalentes* a dos varaibles cuyo cociente tiene límite 1.

Si en una *expresión se sustituye el factor o divisor* α *por otro* equivalente β, el límite de la expresión no varía.

En efecto, sustituir α por β equivale a multiplicar la expresión por β/α; y *como el límite de este cociente es* 1, *el límite de la expresión* queda multiplicado por 1, es decir, no varía.

EJEMPLO 1. — Sean las expresiones:

$$\frac{2x . \text{sen}^2 x}{\text{tg}^3 2x} \quad , \quad \frac{\text{arc sen } x}{2 \text{ tg } x} \quad ;$$

sustituyendo sen x, arc sen x, tg x por su equivalente x, y el infinitésimo tg $2x$ por su equivalente $2x$, en cada una de las dos fracciones, sus límites no se alteran, y basta por tanto calcular los límites de

$$\frac{2x^3}{8x^3} \quad , \quad \frac{x}{2x}$$

que son, respectivamente, ¼ y ½.

EJEMPLO 2. — Puesto que x, sen x, tg x, son equivalentes, sus diferencias son de orden superior al primero. Más adelante demostraremos:

$$x - \text{sen } x, \ \text{tg } x - x, \ \text{tg } x - \text{sen } x$$

son respectivamente equivalentes a:

$$\frac{x^3}{6} \quad , \quad \frac{x^3}{3} \quad , \quad \frac{x^3}{2}$$

Esta última resulta inmediatamente, pues:

$$\text{tg } x - \text{sen } x = \text{sen } x (1 - \cos x) : \cos x$$

y sustituyendo sen x por x, y $1 - \cos x$ por $\frac{1}{2}x^2$ resulta equivalente a $\frac{1}{2}x^3$.

Nota. — Hemos demostrado que la sustitución de un infinitésimo por otro equivalente no altera el *límite cuando aquél se presenta como factor* o *divisor;* pero no es legítima la sustitución cuando se presenta como sumando. Es decir: la supresión de sumandos infinitésimos de orden superior puede conducir a resultados erróneos.

Ejemplos varios de esta operación ilegítima pueden verse en (32).

LECCIÓN 7

VARIABLES INFINITAS Y LIMITES INFINITOS

27. — Generalizaciones del concepto de límite.

Recordemos la definición dada en (9).

I. *Límite finito para x finito.* — Hemos definido el límite de $f(x)$ para un valor finito $x = a$ diciendo:

$$\text{lím. } f(x) = l \qquad \text{para } x \to a$$

cuando es: $\quad |f(x) - l| < \varepsilon \qquad$ tomando $|\Delta x| < \delta$;

excepto para el valor $x = a$ en el cual $f(x)$ puede tomar un valor cualquiera o no tener valor. Vamos a generalizar este concepto.

II. *Límite finito para $x \to \infty$.* — Se dice que la función $f(x)$ tiende hacia el límite finito l para $x \to \infty$, cuando se verifica que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y el límite l llega a ser menor que un número ε, tan pequeño como se quiera, con tal de tomar a x *suficientemente grande*, es decir, mayor que un cierto número H.

Escribiremos lím. $f(x) = l$ para $x \to \infty$ cuando sea

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ para } |x| > H.$$

La recta $y = l$ a la que se aproxima la curva, llegando a diferir de ella tan poco como se quiera, se llama *asíntota*.

III. *Límite infinito para x finito.* — Se dice que la función $f(x)$ tiende hacia el límite ∞ para $x \to a$ cuando $f(x)$ llega a ser mayor que cualquier número dado K por grande que sea, con tal de tomar a x suficientemente próxima a a.

Escribiremos: lím. $f(x) = \infty$ para $x \to a$ cuando $|f(x)| > K$, para $|\Delta x| < \delta$.

Si la función se conserva positiva, escribiremos:

$$\text{lím. } f(x) = +\infty,$$

y si se conserva negativa:

$$\text{lím. } f(x) = -\infty.$$

La curva se aproxima a la recta $x = a$, llegando la distancia a ser tan pequeña como se quiera. Esta recta $x = a$ es también *asíntota* de la curva.

Por abreviar se dice con frecuencia que una función *es infinita* o *se hace infinita* para $x = a$, cuando tiene límite ∞ al tender x a a, pero no debe olvidarse el significado verdadero de esta frase. Así, por ejemplo, decimos que la tangente de 90° o $\pi/2$ es ∞, en vez de decir, que el cuadrante carece de tangente, pero que tg x crece infinitamente cuando $x \to \pi/2$. Este es el significado de la expresión incorrecta, pero de uso corriente: tg $90° = \infty$.

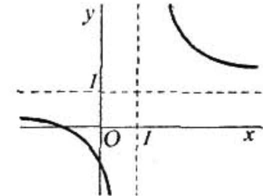
IV. *Límite infinito para* $x \to \infty$. Se dice que $f(x)$ tiene límite ∞ para $x \to \infty$, cuando se verifica que $f(x)$ llega a ser mayor que cualquier número dado K, por grande que sea, con tal de tomar $|x|$ suficientemente grande, es decir, mayor que otro número H.

Escribiremos: lím. $f(x) = \infty$ para $x \to \infty$.

$$\text{cuando: } |f(x)| > K, \text{ para } |x| > H.$$

EJEMPLO 1. — Para ver la representación gráfica de los diversos tipos de límite, sea, por ejemplo la función:

$$\frac{x+1}{x-1}$$



y construyamos la gráfica correspondiente.

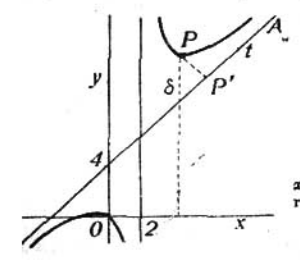
Veamos que ésta nos suministra ejemplos de los tipos I, II, III.

Para $x = -1$ la función se anula; para $x = 0$ es $y = -1$; tenemos así puntos de intersección con los ejes. Si x tiende hacia 0, por ser función continua basta sustituir $x = 0$ y resulta: lím. $y = -1$ (tipo I).

Si damos a x el valor 1, la función carece de valor numérico; pero si damos valores próximos a 1, el denominador $x - 1$ es un infinitésimo y la función tiene límite ∞, con signo + o — según sea $x > 1$ o bien $x < 1$; pues siendo positivo el numerador, la fracción tiene el mismo signo del denominador; la curva se aleja, pues, infinitamente hacia arriba para valores próximos al $x = 1$, *pero situados a la derecha; y hacia abajo para los valores a la izquierda* del $x = 1$. Prescindiendo del signo de y podemos escribir: lím. $y = \infty$ (tipo III). La recta $x = 1$ es una asíntota de la curva. Si hacemos crecer infinitamente x hacia la derecha o hacia la izquierda, es decir, tomando valores positivos o negativos, la ordenada y tiende hacia 1, pues difiere de 1 en la fracción $2:(x-1)$ que es infinitésima; luego lím. $y = 1$ (tipo II). La recta $y = 1$ es otra asíntota.

EJEMPLO 2. — Sea la función

$$\frac{x^2 + 2x}{x - 2}$$



Con razonamiento análogo resulta:

lím. $y = \infty$ para $x \to 2$; (tipo III)

lím. $y = \infty$ para $x \to \infty$; (tipo IV)

La curva, tiene por tanto, una asíntota $x = 2$; para estudiar la otra rama infinita, separemos del cociente su parte entera y tendremos:

$$y = x + 4 + \frac{8}{x - 2}$$

Si construimos la recta $y = x + 4$, la diferencia de ordenadas con la curva es una *fracción infinitésima*, para $x \to \infty$; *luego también la recta* $y = x + 4$ es asíntota, quedando la curva por encima de ella, en el primer cuadrante; por debajo en el tercero.

Para que este error sea menor que 0,01 deberá tomarse x superior a 800, es decir: la aproximación de la curva a su asíntota es muy lenta; al contrario de lo que *sucede en el ejemplo siguiente.*

EJEMPLO 3. — Representar la curva exponencial $y = 3^x$ con unidad 1 cm., y calcular desde qué valor de x la curva coincide prácticamente con el semieje $-x$.

Solución: desde $x = -5$ el error es $< 0{,}005$.

28. — Principio del crecimiento indefinido.

No se confunda el crecimiento *indefinido* (o crecimiento constante, o monotonía o crecimiento sin fin) con el crecimiento *infinito*, es decir, que llega a superar a cualquier número. Por ejemplo, si se agregan cifras 1 en la expresión 0,1111.... crece indefinidamente, pero no infinitamente, pues se conserva *acotada*, es decir, menor que un número fijo (por ejemplo, menor que 1).

Caben dos casos: Si la variable creciente no está acotada, tiene *límite* ∞. *Si está acotada, su parte entera no puede exceder a cierto* valor, alcanzado el cual, las décimas no pueden pasar de 9; luego desde un lugar en adelante dicha cifra alcanzará un máximo, y fijada ya ésta, las centésimas llegarán a un máximo no superior a 9, etc. El número así formado con estas cifras es el límite de la variable, puesto que ésta difiere de él en menos de una unidad de un orden tan avanzado como se quiera.

Resulta así el teorema fundamental:

Toda variable creciente acotada tiene un límite finito. De otro modo: *Toda variable creciente tiene límite, finito o infinito.*

EJEMPLOS. — 1. Al agregar cifras decimales sucesivas abitrarias a la derecha del 0, se forma una sucesión creciente $0{,}a$; $0{,}ab$; $0{,}abc$; ... que converge hacia el número real, $0{,}abcd$ ... menor que 1.

2. — Si un peso se coloca a interés compuesto al 100 % anual se convierte en 2 al cabo de un año: si se acumulan intereses al vencer el primer semestre, resultan $(1 + \frac{1}{2})^2 = 2{,}25$; si se acumulan intereses por trimestres, por meses, *por días*, ... crece el resultado; sin embargo, esto crecimiento indefinido es finito, como veremos en (42) y el límite es 2,71828....

29. — Límites indeterminados.

De las definiciones anteriores, resulta:

Si una variable y *es infinitésima, su recíproca* $1 : y$ *es infinita, y recíprocamente.*

Esta propiedad permite reducir unos casos de límite indeterminado a otros, por ejemplo al tipo $^0/_0$, del modo siguiente:

Tipo $0 . \infty$. Es decir un factor $f(x)$ tiende a 0 y el otro $\varphi(x)$ tiende a ∞. Podemos trasformar el producto $f(x) . \varphi(x)$ así:

$$\frac{f(x)}{1 : \varphi(x)}$$

que es del tipo $0 : 0$.

Tipo $\infty : \infty$. El cociente $f(x) : \varphi(x)$ puede escribirse así:

$$[1 : \varphi(x)] : [1 : f(x)]$$

que es del tipo $0 : 0$.

Tipo $\infty - \infty$. La diferencia $f(x) - \varphi(x)$ de dos funciones que tienden ambas a $+\infty$, se puede escribir así, llamando $F(x)$ y $\Phi(x)$ a las recíprocas:

$$\frac{1}{1 : f(x)} - \frac{1}{1 : \varphi(x)} = \frac{1}{F(x)} - \frac{1}{\Phi(x)} = \frac{\Phi(x) - F(x)}{F(x) . \Phi(x)}$$

y como por hipótesis $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienden a ∞, la fracción obtenida es del tipo $0 : 0$.

Hemos reducido todos los tipos a éste, por ser el más importante del Cálculo diferencial, como veremos; pero sin él cabe resolver muchos casos de indeterminación (V. Ejercicios).

30. — Límites de exponenciales.

He aquí los casos más elementales de límites para variable infinita:

La función exponencial a^x, *para* $x \rightarrow +\infty$, *tiene límite* ∞, *si es* $a > 1$; *y límite* 0 *si es* $a < 1$.

Si $a = 1 + d$ es: $a^x \gtreqless (1 + d)^n > dn$ (n parte entera de x) tomando un solo término del desarrollo, luego crece infinitamente para $x \rightarrow +\infty$.

Si es $a < 1$ pongamos $b = 1 : a$ y resulta: $a^x = 1 : b^x$. Como el denominador es un infinito, el cociente es un infinitésimo.

Si el exponente $x \rightarrow -\infty$, las conclusiones son opuestas: Si $a > 1$, $a^x \rightarrow 0$; si $a < 1$, $a^x \rightarrow \infty$.

Nota. — Son éstos casos de límites *singulares*, pero no ***indeterminados***; éstos se presentarán más adelante.

Si la base $a > 1$ es variable, el límite de a^x puede ser finito, como ya se vió en el ejemplo de (23) y (28), que resultó el límite 2,718....

EJERCICIOS

1. — Obsérvese que en la función que expresa el valor de una mercadería (véase párrafo 8) al crecer infinitamente x también crece y infinitamente, es decir: para $x \rightarrow \infty$, lím. $y = \infty$ (tipo IV) para $x \rightarrow 2$ carece de límite.

2. — Dividiendo numerador y denominador por una potencia de x, calcular, para $x \rightarrow \infty$ los límites de:

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - 2x + 1}, \quad \frac{4x^3 - 1}{x + 5}$$

3. — Calcular, por simplificación, el límite para $x \rightarrow \infty$ de la expresión

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} - \frac{x^2 + 1}{x - 2}$$

LECCIÓN 8

LOS INFINITOS

31. — Comparación de infinitos.

Las variables infinitas, o infinitamente grandes, es decir, las que tienen límite ∞, pueden compararse de igual modo que los infinitésimos. También aquí caben cuatro casos:

1.º) lím. $(A : B) = \infty$; se dice: A es de orden *superior* a B.

2.º) lím. $(A : B) = 0$; el orden de A es *inferior* al de B.

3.º) El límite es finito no nulo; se dice que los infinitos A y B son del *mismo* orden; si el límite es 1, se llaman *equivalentes*.

4.º) No existe límite; A y B se dicen *no comparables*.

Lo mismo que en los infinitésimos, en la comparación del orden se prescinde del signo; pero los infinitos equivalentes tienen igual signo.

Como tipos de referencia se adoptan los infinitos x, x^2, x^3 .... ue se llaman de 1.º, 2.º, 3.º, ... orden.

De modo análogo a lo demostrado para los infinitésimos, resulta:

Si a un infinito A se le suma otro infinito B de orden inferior (o variable finita), el infinito A + B es equivalente al A.

En efecto: $$(A + B) : A = 1 + B/A \rightarrow 1 + 0 = 1$$

como corolario de la propiedad anterior, resulta:

Todo polinomio ordenado, de grado entero o fraccionario, positivo, es equivalente a su término más elevado.

En efecto, al sumarle cada término inferior, resulta equivalente, según acabamos de demostrar.

32. — Principio general de sustitución.

Podemos completar ahora el principio de sustitución demostrado en (26), enunciándolo en esta forma:

El límite de una expresión monomia no varía si se sustituye:

a) *Un factor finito por su límite, no nulo.*

b) *Un factor infinitésimo por otro equivalente.*

c) *Un factor infinito por otro equivalente.*

Lo mismo acontece si en vez de *factor* es *divisor*.

Aplicación importante: tienen igual límite para $x \to \infty$, los cocientes:

$$\frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + l}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + h'}\ ,\quad \frac{ax^m}{a'x^n},$$

pues cada polinomio es equivalente a su término más elevado.

Caben tres casos:

1.°) Si es $m = n$, resulta el límite a/a'. Es decir:

El límite para $x \to \infty$, del cociente de dos polinomios de igual grado es igual al cociente de los coeficientes de los términos superiores.

2.°) Si es $m < n$, simplificando resulta lím. $= 0$.

3.°) Si es $m > n$, „ „ „ $= \infty$.

El límite para $x \to \infty$, del cociente de dos polinomios de distinto grado, es cero o infinito, según que el grado del numerador sea menor o mayor que el grado del denominador.

Nota. — Cuídese mucho de no sustituir un *sumando* por otro equivalente, trátese de infinitos o infinitésimos, pues el resultado puede ser absurdo.

Ejemplo 1. — Si en la función

$$x^{-1} - (x^{-1} - x + 1)$$

donde $x \to 0$ se sustituye el paréntesis por el infinito equivalente x^{-1} resulta 0; sin embargo, el límite es -1.

Ejemplo 2. — Hemos obtenido en el ejemplo 2 de (26) para $x \to 0$:

$$\text{lím. } (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) : x^3 = 1/2 \qquad [1]$$

Si en el numerador hubiéramos sustituido $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{sen} x$ por su equivalente x, habría resultado el límite falso 0.

Sea la expresión:

$$\frac{\operatorname{tg} x - (\operatorname{sen} x + 2x^3)}{x^3}$$

Si despreciáramos el infinitésimo de orden superior $2x^3$, es decir, si sustituyéramos $\operatorname{sen} x + 2x^3$ por su equivalente $\operatorname{sen} x$, resultaría la misma expresión [1], cuyo límite es $1/2$. Sin embargo, el verdadero límite es $-3/2$.

Obsérvese también que la diferencia de dos infinitos puede ser infinitésima.

Ejemplo. — Es infinitésima la diferencia $\sqrt{x^2 + a} - x$ al crecer x infinitamente; pues multiplicando y dividiendo por la suma, se puede escribir así:

$$\frac{(x^2 + a) - x^2}{\sqrt{x^2 + a} + x} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a} + x}$$

que es un infinitésimo, como recíproco de una variable que crece infinitamente.

Análogamente: es infinitésima al crecer x infinitamente la diferencia

$$\sqrt{(ax + b)^2 + c} - (ax + b)$$

33. — Asíntotas de las curvas planas.

Se dice que un punto se aleja infinitamente sobre una curva, cuando su x, o su y, o ambas coordenadas, crecen infinitamente.

Se llama *asíntota* una recta t tal que la distancia Pt desde el punto P de la curva tiende a 0 al alejarse P sobre la curva, es decir, al crecer infinitamente x, y, o ambas. (Figura en (27), Ej. 2).

Primer caso. Si para $x \to \infty$ es lím. $y = b$, finito, ya hemos visto que la recta $y = b$ es la asíntota de la rama infinita.

Segundo caso. Si para $x \to a$, $y \to \infty$, la asíntota es la recta $x = a$.

Tercer caso. — Si x e y crecen infinitamente y se calcula lím. $y:x = m$, se dice que la rama tiene la dirección de la recta $y = mx$. Tal lím. $y:x$ existe siempre que hay asíntota $y = mx + a$, pues si las coordenadas del pie P'' de la distancia Pt son $x\,y$, las de P difieren de ellas en infinitésimos y su cociente tiene el mismo límite m. La ecuación de la curva puede escribirse, pues, en la forma:

$$y = mx + a + \delta \qquad (\delta \text{ infinitésimo para } x \to \infty)$$

Recíprocamente: si la curva tiene un punto impropio A, es decir, si $y:x \to m$, y puede escribirse la ecuación en la forma precitada, o sea si se calcula la ordenada en el origen:

$$a = \text{lím.}\ (y - mx) \qquad \text{para } x \to \infty$$

la distancia del punto de la curva a la recta $y = mx + a$, es precisamente δ, medida verticalmente; y como tiende a 0, también tiende a 0 la distancia normal, que solo difiere en un factor coseno; luego esta recta es la asíntota. La rama de curva que tiene asíntota se llama *hiperbólica*, y se dice que t es la tangente en A; la justificación se verá en (45). Si resulta $a = \infty$, se dice que la tangente es la recta impropia y la curva se llama *parabólica*. Cabe también que no haya tangente en A, es decir, que $y - mx$ carezca de límite. Por último, hay curvas infinitas sin dirección, es decir, no existe lím. $y:x$.

Ejemplo 1. — Si la ecuación es $y = P(x):Q(x)$ siendo el grado del polinomio dividendo $P(x)$ superior en 1 al grado del polinomio divisor $Q(x)$, efectuada la división y sacada la parte entera $mx + a$, la fracción complementaria tiende a 0 por tener el numerador de menor grado que el denominador, luego se tiene la asíntota $y = mx + a$.

Sea por ejemplo: $\quad y = \dfrac{2x^2 - 3}{x + 1}$

la parte entera es $2x - 2$, luego la ecuación de la única asíntota es $y = 2x - 2$.

EJEMPLO 2. — Si la ecuación es $y = \sqrt{(ax+b)^2 + c}$ la parte principal es $y = ax + b$, pues la diferencia es infinitésimo, como se ha visto en (32); luego esta recta $y = ax + b$ es la asíntota.

EJEMPLO 3. — Sea la cónica: $3x^2 + y^2 - 4xy - 8x + 2y - 2 = 0$

despejando, resulta: $y = 2x - 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

luego las dos asíntotas son:

$$y = 2x - 1 + (x + 2) = 3x + 1$$
$$y = 2x - 1 - (x + 2) = x - 3$$

EJEMPLO 4. — La curva estudiada en (9) Ej. 4, de ecuación $y = x \cdot sen\, \pi/x$ tiene la dirección del eje x, pues $y : x \to 0$; demuéstrese que asíntota es $y = \pi$.

EJEMPLO 5. — La parábola $y = \sqrt{x}$ tiene la dirección del eje x, pero es parabólica.

EJEMPLO 6. — La curva sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ tiene la dirección del eje x, sin tangente propia ni impropia. En cambio la $y = \operatorname{sen} \pi/x$, (9) Ej. 3, tiene la asíntota $y = 0$.

La curva $y = x \cdot \operatorname{sen} x$ carece de dirección; y tampoco la tienen las espirales de Arquímedes y logarítmica.

34. — Crecimientos potencial, exponencial y logarítmico.

Para $x \to \infty$ tienen límite infinito las funciones:

$$x^m \quad (m > 0); \; a^x \quad (a > 1); \; \log_b x \quad (a > 1)$$

Comparemos estos tres infinitos, mediante división; y para ello, siendo $a = 1 + d$, si llamamos n a la parte entera de x será:

$$a^x \geqq a^n = (1 + d)^n = 1 + nd + \tfrac{1}{2} n (n - 1) d^2 + \ldots.$$

y si tomamos un número de términos suficiente para que el polinomio de variable n resulte de grado superior a m, este polinomio es *infinito* de orden superior al $(n + 1)^m$, y por tanto, superior a x^m; luego:

Para $x \to \infty$, la exponencial a^x es un infinito de orden superior a x^m, cualquiera que sea m.

Si llamamos $z = log_b\, x$, resulta: $x = b^z$; $x^m = (a^m)^z$, luego x^m es infinito de orden superior a $z = \log x$. Es decir:

Para $x \to \infty$, la potencia x^m, cualquiera que sea el exponente $m > 0$, es un infinito superior al logaritmo de x.

Podemos, pues, establecer la escala de infinitud:

Orden de a^x, mayor que orden de x^m, mayor que orden de $\log x$.

Infinitésimos potencial y exponencial. — Si tomamos las recíprocas, resulta que el infinitésimo a^{-x} es de orden superior al x^{-m}, puesto que su cociente es recíproco del $a^x : x^m$, y, por tanto, tiende a 0. Por tanto:

Todo infinitésimo exponencial es de orden superior a todo infinitésimo potencial.

Así se explica que la aproximación de las curvas exponenciales a su asíntota *es más rápida que en las potenciales.*

Obsérvese, por ejemplo, la gráfica de la función 3^x y se nota que la aproximación hacia el semieje $-x$ es tan rápida que ya desde $x = -5$ el valor *es $3^{-5} < 0{,}005$; y si la unidad es 1 cm, este error es menor que el grueso de* una línea del dibujo y, por tanto, puede continuarse la curva como si fuera el semieje $-x$.

Ejemplos:

1. — El crecimiento de las funciones potencial y exponencial depara sorpresas. Constrúyase la gráfica de $1{,}001^n$ y se observa que resulta aproximadamente una recta de pendiente 0,001; pues las potencias valen aproximadamnt 1,002; 1,003; 1,004; .... En cambio, las ordenadas de la función n^4 son: 16,81, 256, 625, ... y crecen tan rápidamente que pronto escapa la gráfica del cuadro de dibujo. *Demuéstrese que las ordenadas de la primera gráfica* llegan a superar a las de ésta; y calcúlese un valor suficiente de n.

2. — Representar gráficamente en coordenadas cartesianas la función:

$$y = ae^{-ht}\cos\delta t \qquad e = 2{,}71828\ldots.$$

Esta función define el movimiento rectilíneo vibratorio de un punto sujeto al extremo de un resorte que se distiende una longitud a y se abandona a sí mismo; se admite que la fuerza es proporcional a la distancia, es decir: $-k^2y$; y suponemos que el rozamiento es en todo momento proporcional a la velocidad, es decir, es igual a ella por un cierto coeficiente $2h$. Finalmente $\delta^2 = k^2 - h^2$.

Si no existiera el factor e^{-ht}, la gráfica sería una sinusoide cuyas ordenadas están multiplicadas por a y las longitudes de las ondas divididas por δ; el factor e^{-ht} tiende hacia 0 al crecer t y va reduciendo rápidamente las amplitudes o alturas de las ondas, resultando: lím. $y = 0$.

Constrúyase la curva para los valores: $a = 1$; $h = 0{,}01$; $k = 1$

NOTA: *Gráficas con escala logarítmica.*

Hemos llamado la atención del lector sobre el orden de infinitud de la exponencial respecto de la potencial. Por grande que sea el exponente m y el coeficiente de x^m, y por pequeño que sea el coeficiente de la exponencial, ésta llega a superar a aquélla rápidamente. Por este crecimiento rápido, al dibujar gráficas de funciones exponenciales, pronto adquiere la ordenada valores que exceden la altura del papel; para evitar esto y poder representar intervalos más amplios, se acostumbra a veces a adoptar para las y una escala logarítmica, es decir, en vez de llevar como ordenadas las y se llevan sus logaritmos, que crecen mucho más lentamente y con esto se simplifica la función, pues los factores exponenciales se convierten en lineales, facilitando mucho el trazado.

Estas gráficas se dibujan rápidamente sobre *papel logarítmico,* que difiere del papel milimétrico ordinario en que las distancias de las rayas de un sistema son los logaritmos de los números sucesivos. También hay papel en que las dos escalas son logarítmicas.

EJERCICIOS

1. — Representar en papel logarítmico la función x^x.

2. — En la obra de Koestler · Tramer titulada: *Infinitesimalrechnung für Ingenieure,* se lee en pág. 295:

para $x = +\infty$, lím. $(x + \cos x)$ = indeterminado (no es $+\infty$).

para $x = -\infty$, lím. $(x + \cos x)$ = indeterminado (no es $-\infty$).

Demuéstrese la inexactitud de ambas afirmaciones, probando que el límite existe y es $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

3. — ¿Tiene límite infinito la función $x . \operatorname{sen} x$ para $x \to \infty$?

4. — *Determinar las asíntotas de las curvas:*

$$x^3y - x^4 - y + 1 = 0$$
$$x^2 - 2y^2 + 4xy - x + 1 = 0$$

SERIES GEOMETRICAS Y ALTERNADAS

35. — Series; condición necesaria de convergencia.

El algoritmo de las series se reduce a tomar límites para $n \to \infty$ en la suma S_n de los n primeros términos. El caso más sencillo y frecuente es la progresión geométrica indefinida, o *serie geométrica*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

cuyo significado es el siguiente: se forma la suma:

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} \qquad [1]$$

de los n primeros términos; y se calcula su límite para $n \to \infty$.

En general: la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ se llama *convergente* si las sumas $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ tienen límite finito S, y S es la *suma* de la serie; si el límite es ∞ la serie se llama *divergente;* si no existe límite, se llama *oscilante.*

El símbolo $+ \ldots$ detrás de una suma, equivale, pues, al símbolo antepuesto lím. para $n \to \infty$.

Puesto que S_n y S_{n-1} tienden hacia S su diferencia $u_n \to 0$. Es decir: *condición necesaria de convergencia es que el término general tienda a 0.*

36. — Progresión geométrica indefinida.

Observemos que al multiplicar [1] por $1 - q$, se simplifica el producto, hasta reducirse a $a - aq^n$; luego el valor de S_n es:

$$\frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}$$

Si es $|q| < 1$, la potencia q^n llega a ser menor que cualquier número positivo; es decir, la segunda fracción tiene por límite 0, y por tanto:

$$S = \text{lím. } S_n = \frac{a}{1 - q}$$

es decir: *la suma de la progresión geométrica convergente es igual al primer término dividido por* 1 *menos la razón.*

Si $|q| > 1$ resulta *divergente;* y si $q = 1$ la progresión $a + a + a + \ldots$ es también *divergente.*

Si es $q = -1$ la progresión $a - a + a - \ldots$ es *oscilante*, puesto que las sumas sucesivas valen 0 y a, alternativamente.

EJEMPLO. — Es convergente la serie:

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

por tener razón menor que 1, y su suma vale 2.

Esta misma, con signos alternados, es también convergente y su suma es:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

37. — Series alternadas. Criterio de convergencia.

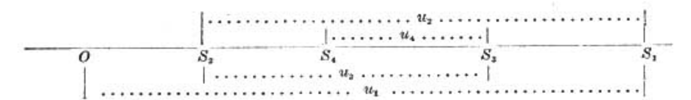
Una serie de términos alternativamente positivos y negativos, y cuyos valores absolutos son decrecientes, se llama *alternada*. Es decir, es alternada la serie:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2k-1} - u_{2k} + \ldots$$

con la condición:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > 0$$

Las sumas sucesivas se forman de este modo: una vez obtenida una, la siguiente resulta de llevar el segmento que representa el nuevo término, hacia la izquierda si es negativo, hacia la derecha si es positivo; y como cada término es menor que el anterior, cada segmento queda dentro del anterior, como indica la figura.



Las sumas pares S_0, S_2, S_4, ... van creciendo y se conservan menores que S_1, luego por el principio del crecimiento indefinido (28) tienen un límite S; análogamente las sumas impares van decreciendo y como son mayores que 0, tienen un límite S'. Es decir:

$$\text{lím. } S_{2m} = S \quad ; \quad \text{lím. } S_{2m+1} = S'$$

Como la diferencia entre dos sumas sucesivas es el término u_n, restando ambas igualdades resulta: lím. $u_n = S' - S$

Por tanto: si $u_n \to 0$, es $S' = S$ y este límite único es la suma de la serie, que es *convergente;* si u_n no tiende a 0, la serie es *oscilante*.

En el caso de convergencia, como la suma S es mayor que las sumas pares y menor que las impares, difiere de cada una menos que éstas entre sí, o sea, menos que el nuevo término u_n. Es decir:

$$S_1 - S < S_1 - S_2 = u_2 \quad , \quad S - S_2 < S_3 - S_2 = u_3 \quad ,$$
$$S_3 - S < S_3 - S_4 = u_4 \quad , \quad S - S_4 < S_5 - S_4 = u_5 \quad ,$$

....

Podemos, pues, enunciar esta doble propiedad importante:

La condición necesaria y suficiente para que una serie alternada sea convergente, es que el término general tienda a cero.

El error cometido al tomar una suma parcial como valor de la suma total, es menor que el término siguiente, y es por defecto o por exceso, según que éste sea positivo o negativo.

EJEMPLO 1. — Sea la serie alternada:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

que es convergente, por tener sus términos decrecientes y tender a 0. Su suma, como veremos más adelante, es $\pi : 4$.

El error qce se comete al tomar los cien primeros términos, es menor que el siguiente, o sea 1:101; de modo que con tan ímprobo trabajo solamente obtenemos *dos* cifras exactas.

Series tan lentamente convergentes son inútiles para el cálculo aproximado.

EJEMPLO 2. — Sea la serie alternada:

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$$

que también es convergente por tener decrecientes y con límite 0 sus términos.

Si tomáramos como antes, 100 términos, el error sería menor que una unidad de orden 157; para obtener dos cifras exactas basta tomar *cuatro* términos.

Estas series, tan rápidamente convergentes, son el medio ideal del cálculo.

Esta, en particular, tiene la ventaja de que sus términos se calculan muy fácilmente, pues basta una división sencilla para deducir de cada término el siguiente. La suma de esta serie, según veremos (42), es $1 : e$.

EJERCICIOS

1. — Deducir las reglas dadas en Aritmética para formar la fracción ordinaria equivalente a una expresión decimal periódica.

2. — Formar una serie de términos alternados que tiendan a cero y sin embargo sea divergente.

3. — Sumar las series geométricas convergentes:

$$0{,}2 - 0{,}15 + \ldots \quad ; \quad \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + \ldots$$

LECCIÓN 10

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

38. — Clasificación de las series de términos positivos.

Consideremos ahora una serie cualquiera:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

de términos *positivos*. Las sumas sucesivas:

$$S_1 = u_1 \quad , \quad S_2 = u_1 + u_2 \quad , \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \quad , \quad \ldots$$

van creciendo, luego sólo caben dos casos: si llegan a superar a cualquier número, por grande que sea, S_n tiene límite ∞ y la serie se llama *divergente;* si, por el contrario, S_n se conserva *finita,* es decir, inferior a un número fijo, la variable S_n *tiene* límite finito S; la serie se llama entonces *convergente* y S es su suma. El error cometido al tomar como valor de S la suma S_n es exactamente la serie:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

llamada *resto* de orden n. Cuando se sabe encontrar un número superior al valor de esta serie, se tiene una acotación del error cometido. Esta acotación del error suele lograrse por comparación con una serie conocida; por ejemplo, una progresión geométrica.

Nota. — A veces, un artificio permite, no sólo clasificar una serie, sino también calcular su suma. Sea por ejemplo:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

El término general puede escribirse como diferencia de dos fracciones:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

y la suma S_n se simplifica así:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

luego la serie converge y su suma vale 1.

39. — Criterio de comparación.

Para las series de términos positivos se verifica:

Si una serie tiene sus términos menores que los de otra convergente, también es convergente.

Si una serie tiene sus términos mayores que los de otra divergente, también es divergente.

Pues siendo $S'_n < S_n$, si S_n se conserva finito, también S'_n, luego tiene límite finito; análogamente: siendo $S'_n > S_n$, si S_n crece infinitamente, también S'_n.

EJEMPLO 1. — Sea la serie llamada *armónica*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

cuyos términos son mayores que los de esta otra:

$$\frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{1/2} + \dots$$

que es claramente divergente; luego también la armónica.

He aquí, pues, un ejemplo de serie divergente, cuyo término general tiende a cero. No es, por tanto, suficiente que $u_n \to 0$, para asegurar la convergencia.

40. — Criterio de D'Alembert.

Si la serie no es una progresión geométrica, la razón de un término al anterior no es constante, es decir, varía con n. Si es lím. $(u_{n+1}/u_n) = l$ para $n \to \infty$, resulta el siguiente criterio, llamado de D'Alembert:

Si $l < 1$ la serie converge.

Si $l > 1$ „ „ diverge.

Si $l = 1$ „ „ es dudosa.

Primer caso.—**Puesto que el límite del cociente u_{n+1}/u_n es $l < 1$,** elijamos un número intermedio q, es decir: $l < q < 1$.

Desde un lugar n en adelante, la variable $u_{n+1} : u_n$ debe conservarse menor que q; puesto que llega a diferir de l menos de $q - l$.

Prescindiendo de los términos anteriores (los que no alteran el carácter de la serie) se verifica por consiguiente:

$$u_{m+1}/u_m < q \quad , \quad u_{m+1} < u_m \cdot q .$$

es decir, cada término es menor que el anterior por q; luego los términos son menores que los de la serie geométrica:

$$u_m + u_m q + u_m q^2 + u_m q^3 + \ldots .$$

que es convergente por ser la razón $q < 1$; luego también converge la serie dada.

No sólo queda así demostrada la convergencia, sino que tenemos una cota superior para el resto, como veremos en algún ejemplo.

Ejemplo 2. — Consideremos la serie, sumamente importante

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

La razón de un término al anterior es $1 : n$, que tiene límite 0 para $n \to \infty$, luego la serie es convergente. Su suma es mayor que $1 + 1 = 2$; veremos que vale 2,718.... y se designa siempre por la letra e.

El error cometido al detenernos en $1/n!$, o sea la serie que forma el resto, es menor que la serie gométrica de razón $1/(n+1)$, o sea:

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!\,[1 - 1 : (n+1)]} = \frac{1}{n!\,n}$$

Obsérvese que si bien este resto es mayor que el primer término despreciado (por ser los siguientes positivos) difiere relativamente muy poco de él a causa de tener límite 0 la razón de términos; en cambio, si el límite fuese próximo a 1, el resto sería mucho mayor, y la utilidad de la serie casi nula, por ser necesario tomar muchos términos para lograr una aproximación suficiente.

Segundo caso. — Si $L > 1$, desde un n en adelante el cociente u_{n+1}/u_n supera a 1, como se vió en (10); será por tanto: $u_{n+1} > u_n$; y siendo crecientes los términos, la suma superará a todo número, es decir, la serie es divergente.

41. — Caso dudoso. Criterio de Raabe.

Cuando resulte lím. $u_{n+1}/u_n = 1$, nada puede decirse del carácter de la serie, salvo si es $u_{n+1}/u_n > 1$, en cuyo caso es divergente. El caso $l = 1$ es el más frecuente, pues sólo en series muy rápidamente convergentes es $l < 1$. Hay, pues, que acudir a otros criterios, de los cuales el más importante, que daremos sin demostración (véase en *An. alg.*, pág. 398), es el siguiente, llamado de Raabe:

Si la razón de un término al anterior tiende a 1, réstese de 1, y la diferencia (que es un infinitésimo)se multiplica por n; se calcula: $L = \text{lím. } n(1 - u_{n+1}/u_n)$; y resulta:

Si es $L > 1$ *la serie es convergente.*

Si es $L < 1$ *la serie es divergente.*

EJEMPLO 3. —

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \dots$$

La razón de un término al anterior es:

$$\frac{1}{n^2} : \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 \rightarrow 1 \quad ;$$

al restar de 1 y multiplicar por n, queda:

$$\frac{2n}{n} - \frac{n}{n^2}$$

que tiende a 2, luego la serie converge.

EJERCICIOS

1. — Clasificar las series cuyos términos generales son:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \ ; \qquad \frac{n-1}{n^2}$$

2. — Acotar el resto de la serie del ejemplo 3 y comprobar así aproximadamente que la suma es $\pi^2/6$.

3. — Clasificar, por comparación, la serie formada por los términos impares de la armónica y la serie formada por los términos pares.

4. — Demostrar el criterio de Cauchy: *Si lím.* $\sqrt[n]{u_n} = l$, *y es* $l < 1$ *la serie converge; si* $l > 1$, *diverge.*

(La demostración es análoga a la expuesta para el criterio de d'Alembert. En el 1.er caso basta elegir un número q entre l y 1; en el 2.° el teorema es inmediato).

5. — Por el artificio usado en (38), sumar la primera serie clasificada en Ejercicio 1.

(Basta descomponer cada término en diferencia de dos fracciones).

6. — Demostrar el criterio de Raabe en el caso $l < 1$.

(Basta observar que resulta $u_{n+1}/u_n > 1 - 1/_n$ y de aquí resulta que desde un término en adelante, los términos son mayores que los de la serie armónica, por un factor fijo).

LECCIÓN 11

EL NUMERO e Y LOS LOGARITMOS NATURALES

42. — Definición del número e.

La función $(1+1/n)^n$ es creciente para $n=1, 2, 3\ldots$, como se observa para los primeros valores:

$$2^1=2 \quad ; \quad 1{,}5^2=2{,}25 \quad ; \quad 1{,}33^3=2{,}37\ldots ; \quad \ldots.$$

y se demuestra, en general, desarrollando la potencia del binomio, pues resulta:

$$1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\,\frac{1}{n^n}$$

y simplificando se puede escribir así:

$$1+1+(1-1/n):2!+(1-{}^1/_n)(1-{}^2/_n):3!+\ldots$$
$$+(1-{}^1/_n)\ldots(1-{}^{n-1}/_n):n!$$

Al crecer n aumenta cada término; además se agregan nuevos términos positivos, luego la función crece; pero tiene límite finito por ser cada término menor que el correspondiente de la serie convergente

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots$$

y ser por tanto dicha función menor que la suma de esta serie; y aunque la regla del límite de una suma no es aplicable en general para infinitos sumandos, es *legítima en este caso (véase la demostración en las notas)* y resulta: el límite para $n\to\infty$ de la expresión $(1+1/n)^n$ es el número que siempre se designa por e y que se calcula muy fácilmente por la serie:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots=2{,}7182818284\ \ldots.$$

Si el exponente, en vez de ser n, es $n\pm h$, la potencia queda multiplicada o dividida por una potencia h de la base, que tiende a 1; luego dicho factor también tiende a 1, y el límite resulta también e.

Si en vez de dividir $n+1$ por n, se divide inversamente n por $n+1$, el límite es e^{-1}, luego podemos enunciar: *el cociente de*

dos números naturales consecutivos, elevado a uno de ellos, aumentado o disminuído en cualquier número fijo, tiene el límite e o e^{-1}, según que se divida el mayor por el menor, o inversamente.

EJEMPLOS:

$$[(n-2):(n-3)]^{n+1} \to e$$
$$[(2n+1):(2n+2)]^{2n-3} \to e^{-1}$$

Nota. — La conclusión vale aunque los números no sean enteros, pues si en la base $1 + 1/x$ ponemos en vez de x su parte entera por defecto n, o por exceso $n+1$, se obtienen dos números que comprenden a aquél; y como el límite de estas potencias (conservando el mismo exponente x) es e, también el de aquélla, que está comprendida entre ambas, es decir:

$$\text{lím. } (1 + 1/x)^x = e \quad \text{para } x \to \infty \qquad [1]$$

donde la variable real x toma valores cualesquiera, según la definición (2) de límite.

La serie de la función exponencial.

Si hubiéramos partido de la expresión

$$(1 + x/n)^n$$

donde x es positivo o negativo, se reduce a la anterior, poniendo $n = xm$, y resulta:

$$[1 + x/n]^n = [1 + 1/m]^{mx} = [(1 + 1/m)^m]^x$$

y como $(1 + {}^1/_m)^m \to e$ para $m \to \infty$ resulta:

$$\text{lím. } (1 + {}^x/_n)^n = e^x \qquad [2]$$

Por otra parte, desarrollando la potencia, obtenemos como límite la serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad [3]$$

válida para todo valor de x, positivo o negativo. (V. notas).

Esta serie permite calcular rápidamente e^{-1}, $\sqrt{e}$, ...

43. — Los logaritmos naturales.

Así como los logaritmos usados como auxiliares para los cálculos numéricos son los decimales, por ser 10 la base del sistema de numeración, los logaritmos que se presentan de modo natural en los cálculos teóricos son los de base e y por esto se llaman **logaritmos** ***naturales*** o también ***neperianos;*** nosotros los designaremos por la letra l, y otros autores así: log., ln, log nat., ...

Para pasar de unos a otros basta tomar logaritmos decimales en la expresión $e^l = x$, y resulta: $\log x = l \cdot \log e$.

La constante log. $e = 0{,}43429\ldots$ se designa siempre por M y se llama módulo de los logaritmos decimales. Por tanto: *los logaritmos decimales se deducen de los naturales multiplicándolos por el módulo.* Así se han calculado las tablas de logaritmos decimales.

44. — Casos de indeterminación de $f(x)^{\alpha(x)}$.

La regla dada en la lección 6, fracasa cuando el producto $\alpha(x).lf(x)$ adopta una forma indeterminada $0.\infty$. He aquí los únicos casos posibles:

lím. $f(x) = 0$	lím. $lf(x) = -\infty$	lím. $\alpha(x) = 0$	Forma 0^0
lím. $f(x) = +\infty$	lím. $lf(x) = +\infty$	lím. $\alpha(x) = 0$	„ ∞^0
lím. $f(x) = 1$	lím. $lf(x) = 0$	lím. $\alpha(x) = \infty$	„ 1^∞

Las expresiones 0^0, ∞^0, 1^∞ no tienen significado de potencias numéricas; son símbolos que nos indican cuales son los límites de la base y del exponente en la potencia $f(x)^{\alpha(x)}$; en cada caso pueden resultar límites muy distintos según cuales sean las funciones $f(x)$, $\alpha(x)$; por esto se llaman formas de indeterminación.

EJEMPLO. — Sea la función x^x. Para $x \to 0$ el límite es 1.

Pues se verifica $ly = x.lx \to 0$, según se ha demostrado en (34), ya que el infinitésimo potencial x predomina sobre el infinito logarítmico.

NOTAS

Demostración del desarrollo en serie del número e.

Hemos visto en (42) que cada término del desarrollo de $(1 + {}^{1}/_{n})^n$ tiende para $n \to \infty$ hacia el correspondiente término de la serie. Mas en general, comparemos el desarrollo:

$$(1 + {}^{x}/_{n})^n = 1 + x + (1 - {}^{1}/_{n})x^2 : 2! + \ldots\ldots$$
$$+ (1 - {}^{1}/_{n})(1 - {}^{2}/_{n}) \ldots\ldots (1 - {}^{m-1}/_{n})\, x^m : m! + T_m \qquad [4]$$

con la serie [3] llamada *exponencial*, la cual designando por R_m al *resto*, escribiremos así:

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^m}{m!} + R_m \qquad [5]$$

Si $x > 0$, el resto R_m, o sea la diferencia entre la suma S_m, y su límite, tiende a 0, es decir, $R_m < \varepsilon$ eligiendo m suficiente; los términos de T_m son menores que sus correspondientes en R_m, pues son nulos desde la potencia x^{n+1} en adelante, y para los de exponentes $m + 1$, $m + 2$, ... n los coeficientes entre paréntesis son productos de números menores que 1, y por tanto menores que 1, luego resulta, por comparación: $T_m < R_m < \varepsilon$.

Fijado ya m, los dos polinomios de grado m que figuran en [4] y [5] difieren en menos de ε desde un n en adelante, puesto que el 2.° es límite del 1.° para $n \to \infty$; luego resulta:

$$0 < f(x) - (1 + {}^{x}/_{n})^n < 2\varepsilon\,.$$

Para $n \to \infty$ el límite de $(1 + {}^{x}/_{n})^n$ o sea e^x es, por tanto, $f(x)$, o sea la serie exponencial, quedando así probado el desarrollo [3], para $x > 0$, y además esto: *la sucesión* $(1 + {}^{x}/_{n})^n$ *es creciente y se conserva menor que su límite* e^x.

Para fijar las ideas hemos supuesto $x > 0$; pero el resultado [3] vale para todo x, sea real o imaginario, como se verá en Lecc. 27, con leve modificación de la demostración anterior.

CAPITULO II

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE

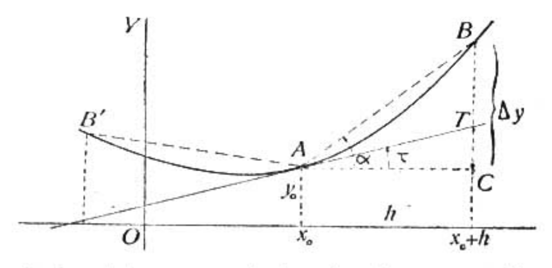
LECCIÓN 12

EL CONCEPTO DE DERIVADA

45. — El problema de la tangente a una curva plana.

Dada una función continua $y = f(x)$ y la curva que la representa gráficamente, vamos a determinar la recta tangente en el punto A de abscisa x_0 y ordenada $y_0 = f(x_0)$.

Se llama semirecta tangente en A por la derecha, al límite de la cuerda AB cuando B tiende hacia A por la derecha, es decir, una semirecta AT cuya pendiente es el límite de la pendiente de la cuerda; veamos cuál es el coeficiente angular de esta recta AB.



Llamando Δy_0 al incremento de la ordenada correspondiente al incremento h de la abscisa, la pendiente o coeficiente angular de la cuerda es

$$\frac{\Delta y_0}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La pendiente de la semirrecta tangente por la derecha, es el límite de este cociente de incrementos cuando $h \to 0$, conservándose positivo; análogamente resulta la semirrecta tangente por la izquierda, haciendo $h \to 0$ con valores negativos. Cuando ambas semirectas son opuestas, forman la recta tangente.

46. — Definición general de la derivada.

Cuando la fracción $\Delta y : \Delta x = \Delta y : h$, cociente de incrementos, tiene límite único para $h \to 0$, sea h positivo o negativo, este límite se llama *derivada* de $f(x)$ en el punto x_0; y se representa así: $f'(x_0)$. Es decir:

$$[1] \qquad f'(x_0) = \text{lím.}\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Llamamos *inclinación* de la curva hacia la derecha, al ángulo τ que forma la semirecta tangente a la derecha con el semieje $+x$; y *pendiente* de la curva al número $\operatorname{tg} \tau = f'(x_0)$.

El ángulo que forma con el mismo semieje $+x$ la semirecta tangente por la izquierda es $\tau + \pi$ que tiene la misma tangente trigonométrica. Por tanto, podemos enunciar:

La derivada en el punto x_0 mide la pendiente de la recta tangente, o sea: es la tangente trigonométrica de los ángulos que forma el semieje x con cada una de las semirectas tangentes.

Si la función $f(x)$ tiene derivada en cada punto x, el valor de la derivada depende de x, es decir: es una función de x, que se llama *función derivada* de $f(x)$, o simplemente *derivada*, y se representa así: y', o bien $f'(x)$, o también: $Df(x)$.

Si el límite [1] es $+\infty$ por ambos lados hay tangente vertical y se dice que la derivada es $+\infty$; ejemplo en (50) fig. 2.ª. Análogamente si es $-\infty$ por ambos lados.

47. — Propiedades primeras de las derivadas.

De la definición de derivada resulta: si la función es constante su incremento es nulo, luego el cociente de incrementos es nulo, y también su límite. Es decir:

I. *La derivada de una constante cualquiera es nula.*

Si la función es $y = x$, resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

y siendo este cociente 1, su límite es 1. Es decir:

II. *La derivada de la variable independiente es 1.*

Si una función se multiplica por k, el cociente de incrementos queda multiplicado por k y también su límite. Luego:

III. *Al multiplicar una función por una constante, su derivada queda multiplicada por la misma constante.*

Si una función es suma o diferencia de varias, por ejemplo:

$$y = u \pm v \pm w$$

el incremento de y es suma o diferencia de los incrementos de éstas:

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta w$$

dividiendo por h, resulta:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\Delta u}{h} \pm \frac{\Delta v}{h} \pm \frac{\Delta w}{h}$$

y el límite es la suma o diferencia de los límites; es decir:

$$y' = u' \pm v' \pm w'$$

IV. *La derivada de una suma algebraica de funciones es la suma algebraica análogamente formada por sus derivadas.*

Corolario: Si los coeficientes son constantes es:

$$D(au + bv + \ldots . lz) = au' + bv' + \ldots . + lz'$$

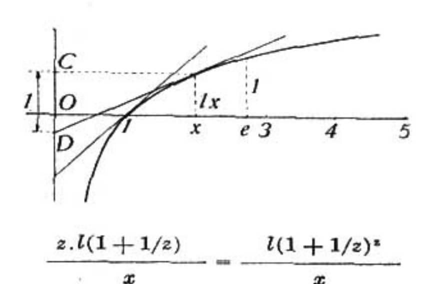
48. — Derivada del logaritmo natural.

Siendo ésta la función elemental a que pueden reducirse las demás, calcularemos directamente su derivada.

Elegido un punto cualquiera x, el cociente de incrementos es:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{l(x+h) - lx}{h} = \frac{l(1 + h/x)}{h}$$

y para calcular su límite al tender $h \to 0$, pongamos $x = hz$ y el cociente se transforma así:



$$\frac{z . l(1 + 1/z)}{x} = \frac{l(1 + 1/z)^z}{x}$$

Fijado x, para $h \to 0$ es $z \to \infty$, y el numerador (por ser el logaritmo función continua) tiende a $le = 1$; luego:

Derivada de $lx = 1/x$.

Nota. — Si el logaritmo es decimal, como $\log x = Mlx$, la expresión anterior queda multiplicada por $M = 0{,}43429\ldots$ y resulta: $D \log x = M/x$.

Más general: siendo $\log_a x = lx/la$, resulta:

$$D \log_a x = 1/x \, . \, la$$

Ejercicio. — Demostrar que la tangente en A a la curva logarítmica se puede construir uniéndolo con el punto D tal que $CD = -1$. Construcción de la curva logarítmica por puntos y tangentes. Dibujada en papel milimétrico, utilícese como tabla de logaritmos.

49. — Diversos significados físicos de la derivada.

Puesto que la derivada es el límite del cociente de incrementos $\Delta y : \Delta x$, en toda función física en que este cociente tenga un significado interesante cuando y sea proporcional a x, se podrá generalizar al caso de una función no lineal, mediante el paso al límite, es decir, con la derivada.

He aquí algunos ejemplos:

I. *Pendiente.* — *Dada una función lineal* $y = ax + b$, *el coeficiente angular* a mide la pendiente; y el cociente de incrementos es $\Delta y : \Delta x = a$, constante.

Si la función $y = f(x)$ no es lineal, el cociente $\Delta y : \Delta x$ se llama *pendiente media* en el intervalo Δx; su límite $f'(x)$ se llama *pendiente* de la curva en el punto x, y no es sino la pendiente de la recta tangente. Como Δx y Δy son ambas longitudes, la pendiente es un número abstracto.

Si el cociente de incrementos tiene límites distintos, según que Δx tienda hacia 0 tomando valores positivos o negativos, la curva tiene un punto anguloso [véase el ejemplo de la nota (50)] y debe distinguirse entre *pendiente a la derecha* y *pendiente a la izquierda*.

II. *Velocidad.* — El movimiento de un punto sobre una recta, por ejemplo: la caída de un grave, nos da una trayectoria rectilínea en que el espacio recorrido es función del tiempo; tendremos así: $y = f(t)$.

Si la función es lineal: $y = at + b$, el cociente de incrementos del espacio y del tiempo es el número a, que representa el espacio recorrido en la unidad de tiempo. Esta velocidad a es constante y el movimiento se llama *uniforme*.

Si el movimiento viene expresado por una función $y = f(t)$ no uniforme, el cociente $\Delta y : \Delta t$ se llama *velocidad media* en el intervalo Δt; pero al variar Δt esta velocidad media varía, y para $\Delta t \to 0$ el límite $f'(t)$ se llama *velocidad* en el momento t. La velocidad es, pues, una función del tiempo.

Si los espacios recorridos se miden en cm. y el tiempo en segundos, la velocidad viene expresada en cm./s.

Gráfica del movimiento. — En un sistema de coordenadas tomamos sobre el eje de abscisas los tiempos, sobre el de ordenadas los espacios recorridos. Dicho *movimiento nos dará una gráfica* sencilla y sus propiedades nos darán las del movimiento.

La diferencia de ordenadas dividida por la diferencia de abscisas de dos puntos t_0 y t_1 nos dará un cociente que se llama *velocidad media* en ese intervalo de tiempo. Si tomamos un tiempo cada vez más pequeño el límite del cociente de los espacios por los tiempos es la velocidad instantánea $v = f'(t)$.

En el movimiento más sencillo, el rectilíneo uniforme, que gráficamente se representa por una recta $y = at + b$, para encontrar la velocidad podemos tomar cualquier segmento, puesto que existe proporcionalidad (el cociente constante es la pendiente); la velocidad es constante.

En la caída de un grave la ecuación es $y = \frac{1}{2} gt^2$, siendo $g = 9{,}80$ m/s^2; la gráfica es una parábola que no debe confundirse con la trayectoria de un proyectil; puesto que aquí se trata de un movimiento *rectilíneo* y la gráfica es simplemente un esquema para estudiar la relación entre los espacios y los tiempos.

III. *Carga.* — Consideremos una viga AB horizontal que soporta pesos a lo largo de toda ella. Si este peso está uniformemente repartido, es decir, si longitudes iguales soportan pesos iguales, el número de kg. que cargan sobre cada unidad de longitud es el mismo en todas partes y se llama *carga específica* o *carga por unidad;* es, pues, una magnitud compuesta: kg./cm.

Si la carga es continua, pero no está uniformemente repartida, y llamamos Δy a la carga que pesa sobre el segmento Δx, el cociente $\Delta y : \Delta x$ se llama *carga media*, y su límite $\Delta x \to 0$, es decir, la derivada y' en el punto considerado, se llama *carga específica* en dicho punto.

La gráfica de esta función y' se llama *línea de cargas.* La carga viene medida en kg./cm.

IV. *Dilatación.* — Si $y = f(x)$ expresa una correspondencia entre dos escalas, el cociente $\Delta y : \Delta x$ es constante cuando la función sea lineal, y se llama *coeficiente de dilatación.* Si la función no es lineal, este cociente se llama *dilatación media* en el intervalo y varía con Δx; su límite para $\Delta x \to 0$, es decir, el número $f'(x)$ se llama *coeficiente de dilatación* en el punto x.

Como ambos incrementos son longitudes, el coeficiente de dilatación es un número abstracto. Así diremos, por ejemplo: la dilatación es 1,04, es decir: la razón de longitudes vale 1,04, o también: la dilatación es 4 %, vale decir: el incremento de 1 es 0,04.

V. *Concentración.* — Si en una disolución cualquiera, por ejemplo de una sal, la cantidad de sal contenida en la unidad de volumen de líquido es constante, cualquiera que sea la porción elegida, el cociente de esta cantidad de sal por el volumen se llama *concentración.*

Cuando la cantidad de sal por unidad de volumen varía según el lugar, se dice que la disolución no es homogénea; el cociente de la cantidad de sal por el volumen correspondiente se llama *concentración media,* y su límite al tender hacia cero el volumen se llama *concentración* en el punto elegido.

VI. *Velocidad de reacción.* — Puestos en contacto dos cuerpos A y B que reaccionan produciendo otro cuerpo C, la cantidad de éste va creciendo con el tiempo, es decir, es función $y = f(t)$. Si el aumento desde el momento t hasta el $t + h$ es $\Delta y = f(t + h) - f(t)$, el cociente $\Delta y : \Delta t$ se llama *velocidad media* de reacción en el intervalo h. Si éste se toma cada vez más pequeño, dicha velocidad tiende hacia un valor límite, llamado *velocidad en el momento t,* que viene medido por la derivada $y = f'(t)$.

Si las cantidades del producto C se miden en g. la velocidad de reacción vendrá expresada en g./s.

50. — Existencia de la derivada de las funciones continuas.

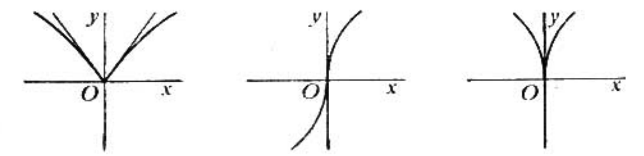
Toda función que tiene derivada es continua; pues si el cociente $\Delta y : \Delta x$ tiene límite finito para $\Delta x \to 0$, debe ser Δy infinitésimo del mismo orden, o de orden superior, según que la derivada sea $f'(x) \neq 0$, o bien $f'(x) = 0$. Es decir: $f(x)$ debe ser continua.

La recíproca no es cierta; hay funciones continuas que no tienen derivada en algunos puntos, por no ser comparables los infinitésimos Δy y Δx, es decir, por carecer de límite el cociente de ambos. Tal sucede, por ejemplo, con la función ya considerada: $y = x . \operatorname{sen} \pi/x$, que es continua en todo el campo real, incluso en el punto $x = 0$, donde es nula. El cociente de incrementos en dicho punto es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h . \operatorname{sen} \pi/h}{h}$$

o sea: sen π/h, que carece de límite para $h \to 0$, pues oscila entre $+1$ y -1. **La curva carece de tangente en 0, y hay curvas sin tangente en ningún punto.**

A veces, el cociente de incrementos tiene límites distintos según que h tienda hacia 0 por la derecha o por la izquierda. Entonces, las dos semirectas tangentes no forman una sola recta, sino un ángulo distinto de 180°. Los dos límites del cociente incremental suelen llamarse *Derivada a la derecha* y *Derivada a la izquierda*, y representan las pendientes de las dos semirectas tangentes en el *punto anguloso*. Sea (fig. 1.ª) $y = x . \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1/x$; las pendientes en 0 son $\pm \frac{1}{2} \pi$.



Si es $y = \sqrt[3]{x}$ (fig. 2.ª) las pendientes son ambas $+\infty$ (punto de *inflexión*); para $y = \sqrt[3]{x^2}$ las pendientes son $-\infty$ $+\infty$ (*punto cuspidal*).

Las funciones que intervienen en la Técnica suelen venir dadas aproximadamente y cabe preguntar qué influencia tendrá en la derivada el error de la función. Es decir: dada una función $f(x)$ que difiere de otra $\psi(x)$ en menos de ε para todo valor de x; ¿cuál es el error de $f'(x)$ respecto de $\psi'(x)$?

Fácil es ver que la derivada queda completamente indeterminada, sin que se pueda fijar límite ninguno para el error. En efecto, dada la gráfica de $f(x)$, de la función exacta $\psi(x)$ sólo se sabe que queda comprendida en una zona de amplitud ε a uno y otro lado de aquélla; mas, dentro de dicha zona, por muy estrecha que sea, hay funciones de infinitas oscilaciones cuyas derivadas pueden diferir de $f'(x)$ tanto como se quiera.

Si es $y = \sqrt[3]{x}$ (fig. 2.ª) las pendientes son ambas $+\infty$ (punto de *inflexión*); para $y = \sqrt[3]{x^2}$ son $-\infty + \infty$ (*punto* cuspidal).

Sea por ejemplo: la función $f(x) = 0$ dada como aproximación de una funciones que cumplen esta condición, es decir como representación de esta función $\psi(x)$, tenemos el eje x, con error $< 0{,}001$; hay, por ejemplo otras del función $\psi(x)$ cuyo valor absoluto es: $|\psi(x)| < 0{,}001$. Ahora bien, entre las

tipo: $\psi(x) = \text{sen } kx:1000$, cuyas derivadas son: $\psi'(x) = k.\cos kx:1000$ y si es por ejemplo: $k = 10^8$ resulta que $\psi'(x)$ toma valores que llegan a 100000.

Se comprende, pues, que no existan aparatos para obtener mecánicamente las derivadas, habiéndolos en cambio para calcular las áreas, las integrales, etc.

Aproximación de las funciones continuas mediante polinomios.

Hemos visto que toda función que tiene derivada es continua, pero hay funciones continuas que no tienen derivada.

Sin embargo, para la Técnica no tienen interés tales funciones, y puede admitirse que todas las funciones continuas que se presenten tienen derivada. Esta hipótesis es legítima, en virtud del teorema siguiente de Weierstrass:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, existe un polinomio $P(x)$ que difiere de $f(x)$ tan poco como se quiera, en todo punto del intervalo.

Ahora bien, las funciones que se presentan en la Técnica tienen carácter aproximado, es decir, sólo se sabe que la función exacta está comprendida entre $f(x) \pm \delta$; es decir, la curva que representa exactamente el fenómeno de que se trate, está comprendida en la zona obtenida, llevando a uno y otro lado de la curva $y = f(x)$ incrementos de ordenadas iguales a $+\delta$ y $-\delta$.

Por tanto, por muy complicada que sea la función exacta, como, en virtud del teorema de Weierstrass, existe un polinomio que difiere de $f(x)$ tan poco como se quiera, entre las infinitas curvas comprendidas dentro de dicha zona podemos elegir la representada por dicho polinomio, la cual es muy sencilla por tener tangentes en todos sus puntos, ya que el polinomio admite derivada para todo valor de x.

En vista de tal indeterminación, entre las infinitas curvas contenidas en la zona que da el límite de error, se elige la más sencilla, por dos principios: el de *economía del esfuerzo* y la creencia en la *máxima sencillez* de las leyes naturales.

Por esta razón es legítimo admitir que todas las funciones continuas útiles al ingeniero admiten derivada, y así lo supondremos en lo sucesivo.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que la derivada de la función $y = x^2$ es $y' = 2x$.

2.—Generalizar ésto, demostrando que la derivada de $y = x^n$ es $y' = n.x^{n-1}$.

3. — ¿Qué pendiente tiene la parábola $2py = x^2$ en cada punto?
¿En qué puntos tiene pendiente prefijada?

4. — Calcular el ángulo de las curvas $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$ en cada punto de intersección.
(No se calculen las dos inclinaciones, sino las dos pendientes).

5. — Defínase la recta tangente usando la *inclinación*, en vez de la pendiente, demostrando la identidad de conceptos. (Fundamento: continuidad de la función $\text{tg}\, x$, y de su inversa).

6. — Aplíquese el concepto de tangente a los puntos impropios, sustituyendo inclinaciones o pendientes por distancias; véase la identidad con la definición (33).

7. — Una función interesante, estudiada por González Quijano, se define así: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, y en general, el valor asignado en cada nuevo punto medio entre dos se forma sumando numeradores y denominadores de los valores fraccionarios que toma en los dos puntos.

Demuéstrese su continuidad, completando su definición, y estúdiense sus tangentes.

LECCIÓN 13

CALCULO DE LAS DERIVADAS

52. — Derivadas de las funciones inversas.

Siendo $y = f(x)$ función uniforme de x, si también es x función uniforme de y, es decir, si a cada valor de y (de un cierto intervalo) corresponde un valor de x, la función así obtenida $x = \varphi(y)$ se llama función *inversa* de $f(x)$. La derivada de y respecto de x es límite de $\Delta y : \Delta x$; la derivada de x, respecto de y es el límite $\Delta x : \Delta y$. Como estas dos funciones son recíprocas, sus límites también lo son, es decir: *la derivada de x respecto de y es recíproca de la derivada de y respecto de x.*

Geométricamente se llega al mismo resultado: la derivada de y respecto de x es tg τ; la de x respecto de y es tg τ', siendo τ' el ángulo que forma la tangente con el eje y; como estos dos ángulos son complementarios, sus tangentes son recíprocas.

De este principio vamos a hacer repetidas aplicaciones. Así, para calcular la derivada de $y = e^x$ observemos que es $x = ly$, cuya derivada es $1/y$; luego la de y respecto de x será y, es decir:

La derivada de e^x es la misma función e^x.

53. — Derivadas de las funciones de función.

Siendo $y = f(x)$, y $z = \varphi(y)$, también es z función de x, pues al fijar un valor para x queda determinado el de y, del cual se deduce el de z.

Al incremento h de x corresponde un incremento Δy; y a éste corresponde un incremento Δz. Para calcular la derivada de z respecto de x, pondremos:

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{h}$$

Para $h \to 0$ estas dos fracciones tienden hacia los límites $\varphi'(y)$, $f'(x)$, de donde:

[1] $$z' = \varphi'(y) \cdot f'(x).$$

La derivada respecto de x de una función $\varphi(y)$, cuya variable y es función de la variable independiente x, se obtiene derivando $\varphi(y)$ respecto de la variable y; y multiplicando $\varphi'(y)$ por la derivada y' de y respecto de x.

Esta es la regla general de derivación, pues las funciones que se presentan no son, en general elementales, sino funciones elementales de otras funciones; y aplicando repetidamente la regla se llega a la derivación de todas.

Caso general. — Si la dependencia es por intermedio de varias funciones, por ejemplo: si es $y = f(x)$, $z = \varphi(y)$, $u = \psi(z)$, tendremos análogamente:

$$\frac{\Delta u}{h} = \frac{\Delta u}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{h}$$

y en el límite para $h \to 0$:

$$u' = \psi'(z) \;\; \varphi'(y) \,.\, f'(x)$$

La derivada respecto de la variable independiente x se obtiene multiplicando las derivadas de cada función respecto de la variable de que inmediatamente depende.

Nota. — La fórmula [1] la hemos deducido suponiendo que al tender $h \to 0$, no se anula Δy, pues entonces no es legítimo multiplicar y dividir por él como hemos hecho. Sin embargo, si es $\Delta y = 0$ (de donde $f'(x) = 0$) será también $\Delta z = 0$ y por lo tanto $z' = 0$, que es el mismo resultado de la fórmula [1]; luego ésta vale en todo caso.

Otra demostración: por definición de derivada, los incrementos pueden expresarse así:

$$\Delta z = \Delta y\,[\varphi'(y) + \alpha] \qquad \Delta y = h\,[f'(x) + \beta]$$

siendo α, β infinitésimos, para $h \to 0$. Sustituyendo, resulta:

$$\Delta z = h\,[\varphi'(y) f'(x) + \gamma]$$

donde γ es otro infinitésimo, luego resulta [1].

54. — Derivadas de las funciones elementales.

Para derivar una expresión de forma monomia suele convenir tomar primero logaritmos naturales y después derivar. Como la derivada de ly es y'/y, esta expresión suele llamarse *derivada logarítmica* de y. He aquí varias aplicaciones importantes:

I. *Derivada de* $y = e^x$. — Tomando logaritmos: $ly = x$ y de rivando:

[2] $$y'/y = 1, \text{ o sea: } y' = y = e^x$$

La derivada de e^x *es la misma función.*

Si la función es $y = a^x$, resulta:

[3] $$ly = xla, \quad y'/y = la, \;\; y' = y \,.\, la = a^x \,.\, la$$

II. *Derivada de* $y = x^m$. — Cualquiera que sea el exponente entero o fraccionario o irracional, positivo o negativo):

$$[4] \qquad ly = m.lx, \quad y'/y = m/x, \; y' = y.m/x = m.x^{m-1}$$

La derivada de una potencia se obtiene multiplicando por su exponente y disminuyendo éste en 1.

En particular: si $y = \sqrt{x}$, resulta:

$$[5] \qquad y' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1:2\sqrt{x}$$

La derivada de la raíz cuadrada de x es la mitad de su recíproca.

III. *Derivada de un producto* $y = uv\ldots w$. — Tomando logaritmos y suponiendo para fijar las ideas que son tres los factores:

$$ly = lu + lv + lw$$

Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

de donde se despeja inmediatamente:

$$[6] \qquad y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

La derivada de un producto de cualquier número de factores es la suma de los productos obtenidos, sustituyendo un factor cualquiera por su derivada.

IV. *Derivada de un cociente* $y = u:v$. — Tomando logaritmos:

$$ly = lu - lv$$

y derivando

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{vu' - uv'}{uv}$$

de donde:

$$[7] \qquad y' = \frac{u}{v} \cdot \frac{vu' - uv'}{uv} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador, menos la derivada de éste por la de aquél, dividido por el cuadrado del denominador.

Nota. — Implícitamente hemos supuesto que todas las funciones eran *positivas*, para poder tomar logaritmos; así sucede desde luego en la exponencial

y la potencial; pero en el producto o cociente puede presentarse alguna función negativa $-u$. En tal caso, cambiando el signo resulta como derivada logarítmica u'/u; mientras que la derivada logarítmica de $-u$ es

$$\frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}.$$

Pruébese que también subsisten los teoremas si alguna función se anula.

Ejercicio. — Calcular la derivada de x^x y la de x^{x^x}.

(Basta tomar logaritmos y derivar después).

Aplíquese también la regla a la potencia x^m, cuando x es negativo (m fracción de denominador impar) tomando el valor absoluto.

55. — Derivadas de las funciones circulares directas.

El incremento de sen x al incrementar x en h, es:

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x . \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x$$

y dividiendo por $\Delta x = h$, se deduce:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{\cos x . \operatorname{sen} h}{h} - \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos h)}{h}$$

como $1 - \cos h$ es de orden superior a h, el último cociente tiene límite 0; y como sen h es equivalente a h(20), resulta:

$$[8] \qquad y' = \cos x$$

Análogamente resulta la derivada de cos x, o también considerada como función de función:

$$[9] \qquad \begin{aligned} y &= \cos x = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - x) \\ y' &= -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - x) = -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Como tg x es el cociente de sen x por cos x la derivada es:

$$[10] \qquad y' = \frac{\cos x . \cos x + \operatorname{sen} x . \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Análogamente, la derivada de ctg x es:

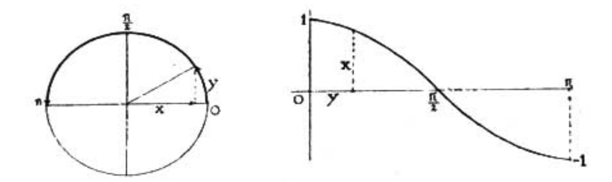
$$[11] \qquad y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

56. — Derivadas de las funciones circulares inversas.

La función $y = \text{arc sen } x$ tiene como inversa $x = \text{sen } y$, cuya derivada es $\cos y$; luego:

$$[12] \qquad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Debemos tomar el signo +, pues entre los infinitos arcos que tienen el seno x, el símbolo arc sen x representa el situado en la semicircunferencia de la derecha, es decir: el comprendido entre $\pi/2$ y $-\pi/2$, cuyo cos y es *positivo*.



Análogamente: $y = \text{arc cos } x$ tiene como inversa $x = \cos y$, cuya derivada es $-\text{sen } y$, luego:

$$[13] \qquad y' = -\frac{1}{\text{sen } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

tomando en el radical el signo + puesto que en la semicircunferencia superior es $\text{sen } y > 0$.

La función $y = \text{arc tg } x$ tiene como inversa $x = \text{tg } y$, cuya derivada es $1 : \cos^2 y$, luego:

$$[14] \qquad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Nota. — No debe extrañar que la suma de las derivadas de arc sen x y de arc cos x sea nula, puesto que la suma de estas funciones vale $\pi/2$, que es constante. Análogamente, la derivada de arc ctg x es opuesta a la de arctg x.

57. — Derivación de determinantes.

Sea, por ejemplo, un determinante de tercer orden

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ w_1(x) & w_2(x) & w_3(x) \end{vmatrix}$$

Cada término es de la forma: $u_i(x)\, v_j(x)\, w_k(x)$, y su derivada consta de tres términos que solo difieren en tener acentuada la u, o la v, o la w.

Agrupados los primeros, forman el determinante que sólo difiere en tener acentuada la primera fila; y análogamente las otras, luego:

La derivada de un determinante cuyos elementos son funciones de una variable, es la suma de los determinantes obtenidos derivando los elementos de una sola fila.

EJERCICIOS

1. — Derivar las funciones algebraicas siguientes:

$$y = x(x^2 - 1)(x^2 + 3)$$
$$y = x : (x^2 + 1)$$
$$y = \sqrt{x - 1} : \sqrt{x + 1}$$
$$y = (\sqrt{x} + 1) : (\sqrt{x} - 1)$$

2. — Derivar estas funciones trascendentes:

$$y = \operatorname{sen}^2 x$$
$$y = -\tfrac{1}{2} \cos 2x$$
$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{1 - x}$$

¿Por qué tienen igual derivada las dos primeras funciones y la tercera igual que arc tg x?

4. — Derivar directamente la función:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x - 1 & 1 \\ 1 & 1 & x + 1 \end{vmatrix}$$

y comprobar el resultado, derivando el desarrollo.

5. — Observar que la derivada de toda función circular inversa tiene signo constante, e interpretar esta propiedad.

6. — ¿Qué relación entre arc sen x, arc cos x, expresa la propiedad de ser opuestas sus derivadas?

LECCIÓN 14

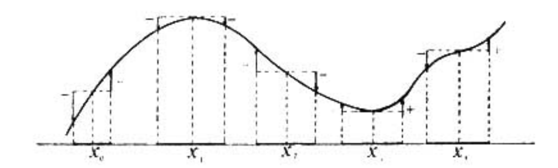
VARIACION DE LAS FUNCIONES . MAXIMOS Y MINIMOS

58. — Crecimiento y decrecimiento de las funciones.

En las diversas gráficas estudiadas en los artículos anteriores se observa que algunas veces crece la función al crecer x y otras decrece la función al crecer x. Esta noción de crecimiento y decrecimiento se refiere a la proximidad de cada punto, pues si nos alejamos de él, puede cambiar el carácter de la función. Vamos a precisar este concepto:

Se dice que $f(x)$ es *creciente* en el punto x_0 cuando el valor $f(x_0)$ es superior a los de su izquierda y menor que los de la derecha, en un cierto entorno del punto x_0.

Se dice que $f(x)$ es *decreciente* en el punto x_0 cuando el valor $f(x_0)$ es menor que los situados a su izquierda y mayor que los de su derecha en un cierto entorno del punto x_0.



Puesto que la derivada $f'(x_0)$ es el límite del cociente de incrementos $\Delta y_0 : \Delta x_0$ este cociente tendrá el mismo signo que $f'(x_0)$, tomando Δx_0 suficientemente pequeño en valor absoluto. Es decir:

Si $f'(x_0) > 0$, hay un intervalo, a uno y otro lado de x_0, en el cual es $\Delta y_0 : \Delta x_0 > 0$; Δy_0 e Δx_0 tienen el mismo signo, es decir, al crecer la variable x crece y; el valor $y = f(x_0)$ es mayor que los de su izquierda y menor que los de su derecha, en un cierto intervalo. La función es entonces *creciente* en el punto x_0; la tangente está dirigida por la derecha hacia arriba.

Si $f'(x_0) < 0$, hay un intervalo en el que $\Delta y_0 : \Delta x_0$ se conserva negativa, es decir: Δy_0 y Δx_0 tienen signo contrario; al crecer x decrece y; el valor $y = f(x_0)$ es menor que los anteriores a su izquierda y mayor que los posteriores a su derecha. La función es decreciente en el punto x_0; la tangente está dirigida por la derecha hacia abajo.

Finalmente, si $f'(x_0) = 0$, nada puede asegurarse respecto del signo de Δy_0 respecto de Δx_0; la tangente es entonces paralela al eje x. y puede haber crecimiento, decrecimiento, u otras posibilidades.

59. — Máximos y mínimos relativos. Criterio general.

Se dice que $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto x_0, cuando su valor $f(x_0)$ es mayor que los valores a la izquierda y a la derecha en un cierto intervalo. Y se dice que tiene un *mínimo relativo* cuando su valor es inferior a los otros valores, a derecha e izquierda, de un cierto intervalo.

Claro es que pasado cierto intervalo puede variar $f(x)$, de modo que tome valores mayores que el máximo o menores que el mínimo. Por esto decimos máximo *relativo* y mínimo *relativo*, para expresar que lo son respecto de un cierto intervalo o *entorno* a un lado y otro del punto, con amplitud mayor o menor según cada caso.

Si en un punto x_0 alcanza $f(x)$ un valor máximo relativo o mínimo relativo, debe anularse en él la derivada; pues, si fuese $f'(x_0) > 0$ la función sería *creciente*, y si fuera $f'(x_0) < 0$, la función $f(x)$ sería *decreciente*, lo que contradice a la hipótesis de máximo o mínimo. Podemos, pues, enunciar:

Para los valores de x en que $f(x)$ es máximo o mínimo relativo, si existe derivada ésta debe ser nula.

Geométricamente: la tangente debe ser paralela al eje x.

La anulación de la derivada es, pues, condición *necesaria* para que $f(x)$ sea máximo o mínimo relativo, pero no es suficiente; pues puede suceder que siendo la tangente paralela al eje x atraviese a la curva y sea, por tanto, $f(x)$ creciente o decreciente, sin tener máximo ni mínimo.

Tales puntos en que la tangente atraviesa a la curva (aunque no sea paralela al eje x, como aquí sucede) se llaman de *inflexión*. En la figura hay inflexión para $x = x_4$.

Para saber si $f(x)$ presenta máximo, mínimo o inflexión en los puntos x en que se anule $f'(x)$, basta ver el signo de la derivada a ambos lados. He aquí los tres casos importantes: si al crecer x pasando por el valor $x = x_0$, la derivada $f'(x)$ pasa de

$-\,a\,+$, hay *mínimo* en el punto x.
$+\,a\,-$, „ *máximo* „ „ „ x.
$-\,a\,-$, o de $+\,a\,+$, hay *inflexion*.

En efecto, en el primer caso, el mínimo absoluto en el intervalo, no lo puede alcanzar ni a la izquierda (donde es decreciente), ni a la derecha (donde es creciente); luego lo alcanza en x_0.

Análogamente, en el segundo caso, el *máximo* absoluto en el intervalo, debe alcanzarlo en x_0.

En el tercer caso, si la derivada es negativa a ambos lados, el valor $f(x_0)$ es el mínimo del arco de la izquierda y el máximo del arco de la derecha, luego hay inflexión, y lo mismo sucede si la derivada es positiva a ambos lados. (Para un **4.° caso** ,v. **Ejerc. 5**).

EJEMPLO 1. — Sea la función: $y = (x-a)^m(x-b)^n$

Su derivada es:

$$y' = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[m(x-b)+n(x-a)] = 0$$

Raíces: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = (mb+na):(m+n)$

Si m es impar, el primer factor no cambia de signo, luego hay **inflexión** en a; lo mismo sucede en b si n es impar. En cambio, si son los exponentes pares, cambia y' de signo, y esto acontece siempre en x_3, habiendo máximo o mínimo según los casos. Complétese la discusión.

EJEMPLO 2. — Con un rectángulo de lados 5 y 8 dm. construir una caja de capacidad máxima.

Llamando x a la altura, la base tiene las dimensiones $5-2x$, $8-2x$ y el volumen:

$$V = (5-2x)(8-2x)x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

$$V' = 12x^2 - 52x + 40$$

Dividiendo por 4 queda:

$$3x^2 - 13x + 10 = (x-1)(3x-10)$$

es decir: las raíces son $x = 1$, $x = 10/3$.

La índole del problema exige que los cuadrados recortados en los ángulos tengan la dimensión $x < 5/2$, pues para $x = 5/2$ resulta volumen nulo. Como para $x = 0$ el volumen es también nulo, dicho volumen debe alcanzar al menos un máximo entre 0 y 5/2; luego hay una solución y sólo una: $x = 1$ que da una caja de volumen máximo: $V = 3.6 = 18$ dm^3. Esto mismo nos indica el cambio de signo de V'.

EJEMPLO 3. — Generalicemos el problema anterior, construyendo con un rectángulo de dimensiones $a > b$ una caja de capacidad máxima.

Llamando x a la altura, al recortar en los ángulos cuadrados de lado x, la base de la caja tiene el área $(a-2x)(b-2x)$ y el problema se reduce a calcular el máximo de la función:

$$V = (a-2x)(b-2x)x = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

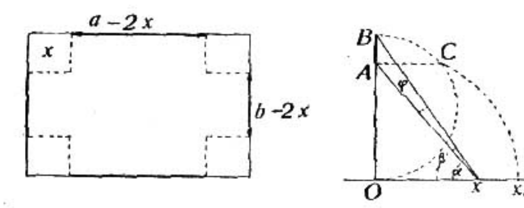
$$V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$$

Las raíces de esta ecuación son: $[a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}]:6$.

Estas raíces son siempre reales, pues:

$$(a+b)^2 - 3ab > (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$$

y las dos son positivas, pues el radical es inferior a $a+b$; o bien directamente, basta observar que los signos de los coeficientes de la ecuación son $+-+$. ¿Corresponden estas raíces a valores máximos o mínimos del volumen? El signo de V' o bien el examen directo del problema, aclaran la duda, y resulta: el problema tiene solución única: $x = [(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 - 3ab}] : 6$.



60. — Método de las derivadas sucesivas.

Cuando es fácil la formación de la derivada de $f'(x)$, o sea $f''(x)$, y no se anula en x_0, su signo indica si hay máximo o mínimo.

Si $f''(x_0) < 0$, es $f'(x_0)$ *decreciente*, luego $f(x_0)$ *máximo*.

Si $f''(x_0) > 0$, es $f'(x_0)$ *creciente*, luego $f(x_0)$ *mínimo*.

Sin embargo, es preferible el criterio directo del cambio de signo de $f'(x)$, que evita la formación de derivadas sucesivas, cada vez más complicadas.

Más adelante, por satisfacer una costumbre, más que por necesidad, daremos la discusión general mediante las derivadas sucesivas.

61. — Simplificaciones en el cálculo de máximos y mínimos.

El método de la derivada puede ser engañoso cuando hay puntos donde no existe. La derivada de $\sqrt[3]{x^2}$ no se anula en ningún punto y sin embargo la función es mínima en el origen. El método expuesto debe completarse con un examen de la variación en todo el campo, mediante el signo de la derivada.

Algunas observaciones facilitan el cálculo de máximos y mínimos:

1. — Si la función $y = f(x)$ alcanza un máximo relativo en el punto x_0, la función $-f(x)$ toma una valor mínimo y viceversa. Lo mismo sucede con la función recíproca $1 : f(x)$ suponiendo que $f(x)$ no se anula.

2. — Si $\varphi(y)$ es *creciente*, y la función $y = f(x)$ toma un máximo o mínimo en el punto x_0, también $\varphi(y)$ toma en este punto un máximo o mínimo; pues siendo $y_0 = f(x_0)$ en el caso de máximo, mayor que los valores de y a

uno y otro lado de x_0, también $\varphi(y_0)$ es mayor que los valores $\varphi(y)$ correspondientes a dichos valores de x.

En cambio, si $\varphi(y)$ es decreciente, toma valores máximo o mínimo en los puntos en que y alcanza mínimo o máximo respectivamente.

Así, por ejemplo, en el primer cuadrante, los máximos y mínimos de la función sen $f(x)$ son los de $f(x)$.

Estas observaciones permiten simplificar los problemas como veremos a continuación.

EJEMPLO 4. — He aquí un problema importante para la mejor visualidad de longitudes verticales.

Determinar el punto del suelo desde el cual se ve un segmento vertical AB bajo ángulo máximo

$$\varphi = OXB - OXA = \beta - \alpha$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta . \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}$$

En vez de despejar φ para calcular su máximo, observemos que siendo tg x mayor o menor según sea mayor o menor el arco, será máximo cuando lo sea su tangente, y ésta será máxima cuando sea mínima su recíproca. Prescindiendo del factor positivo $b - a$, basta, pues, investigar los mínimos de la función:

$$x + abx^{-1}.$$

La derivada es: $1 - ab/x^2 = 0$, de donde: $x = \pm \sqrt{ab}$

La solución es, pues, la media geométrica entre a y b. La índole del problema indica que se trata de máximo, pues el ángulo comienza siendo nulo cuando X está en O, va creciendo y luego decrece al alejarse X, llegando a ser el ángulo tan pequeño como se quiera. Las dos soluciones dan dos puntos simétricos respecto del punto O; su construcción está efectuada en la figura (pág. 64).

EJERCICIOS

1. — Estudiar la variación de la función

$$y = 1 : (1 + x^2)$$

y dibujar su gráfica (curva de Gaetana Agnesi).

Su autora la llamó curva *versiera*.

2. — La resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular, es directamente proporcional a la base y al cuadrado de la altura de dicho rectángulo. Sabido esto, determinar la viga de máxima resistencia y sección rectangular que puede sacarse de un tronco de árbol de radio r.

3. — Si en dos medios separados por una recta las velocidades de un móvil v y v' son distintas, el camino más breve para ir de un punto de uno a un punto de otro satisface a la ley de la refracción: la razón de los senos de los ángulos de incidencia y refracción es igual a la razón de velocidades.

4. — Demostrar que si la derivada en un punto es $+\infty$ por ambos lados, la función es creciente en ese punto; si es $-\infty$, la función es decreciente.

5. — Ejemplos en que $f'(0) = 0$, con muy diverso comportamiento:

$$y = x^2 \quad , \quad y = x^3 \quad , \quad y = x^2 \,.\, \text{sen}\ ^1/x$$

6. — Demostrar que sumando $\frac{1}{2}x$ a la 3.ª función resulta otra, creciente en 0, pero con puntos de decrecimiento infinitamente próximos.

Lección 15

LA DIFERENCIAL Y SUS APLICACIONES

62. — Diferencial de una función derivable.

Hemos definido:

$$f'(x) = \text{lím.} \ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir: $f'(x)$ es el límite del cociente de los incrementos de la función y de la variable, cuando este último tiende a O. Si aplicamos la definición de límite, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

siendo α un infinitésimo, si hacemos $\Delta x \to 0$. Esta función α es, en general, complicada, pues depende del valor de x, es decir, del punto de la curva en que se calcula la derivada, depende también del incremento de x y de la función $f(x)$.

De la igualdad anterior sacamos:

$$\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x + \alpha \,.\, \Delta x \,;$$

esta nueva igualdad expresa que el incremento de una función se compone de dos sumandos: uno de ellos es la derivada por el incremento de la variable, y el otro es esa función α por el incremento de la variable x, luego es infinitésimo de orden superior a $h = \Delta x$. Si $f'(x) = 0$ la parte llamada *principal* de Δy es, por tanto, el primer sumando, que es infinitésimo equivalente a Δy, y tiene la ventaja de ser función lineal de h; ese término $f'(x) \,.\, \Delta x$ se llama *diferencial* de $f(x)$ y se representa así: $dy = f'(x) \,.\, \Delta x$.

Diferencial de una función en un punto x es el producto de la derivada en ese punto por el incremento arbitrario de la variable.

Si como función se considera la misma x y aplicamos el concepto de diferencial que hemos enunciado, la diferencial será el producto de la derivada por el incremento de la variable; y siendo la derivada de la variable $\Delta x / \Delta x = 1$, se tiene: $dx = \Delta x$. Si se trata de una función cualquiera y se tiene: $dy \neq \Delta y$, como ahora veremos.

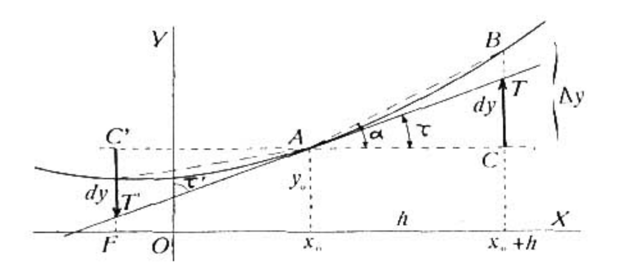
Siendo $\Delta x = dx$, tenemos: $dy = f'(x) dx$, de donde resulta $f'(x) = dy/dx$, es decir: *la derivada es el cociente de la diferencial de la función por la diferencial o incremento de la variable.*

63. — Significado geométrico de la diferencial.

Según la definición

$$dy = f'(x) \, . \, dx = f'(x) \, . \, \Delta x.$$

y como $f'(x) = \operatorname{tg} \tau$ podemos escribir $dy = \Delta x \, . \operatorname{tg} \tau$, y en el triángulo rectángulo ACT un cateto por la tangente del ángulo adyacente, es igual al otro cateto: $CT = dy$. Geométricamente, *la diferencial de $f(x)$ para un valor de x es la ordenada comprendida entre la horizontal que pasa por el punto correspondiente de la curva y la tangente a la curva en dicho punto.* En la figura se ve claramente que $\Delta y \neq dy$. Sustituir el incremento Δy por la diferencial dy equivale, pues, a sustituir la curva por su tangente, lo cual no es legítimo sino en ciertos problemas que estudiaremos. Será $\Delta y = dy$ solamente cuando la curva coincida con su tangente, es decir, cuando la función sea lineal: $y = ax + b$.



Si hacemos $\Delta x \to 0$ entonces Δy, dy, son infinitésimos. En todo punto en que $f'(x) \neq 0$, es dy del mismo orden que dx, puesto que su cociente *$f'(x)$ es finito y no nulo; como Δy, dy, difieren en* $\alpha \, . \, \Delta x$, que es de orden superior a Δx, y por tanto de orden superior a dy, ambos infinitésimos Δy, dy son equivalentes, y por tanto su cociente tiene límite 1. En cambio, cuando sea $f'(x) = 0$, es decir, en los puntos de tangente horizontal, es $dy = 0$; entonces debemos comparar Δy con las diferenciales de orden superior, que pronto definiremos.

64. — Regla general de diferenciación.

Si en la función $y = f(x)$, no es x independiente, sino que a su vez depende de otra variable t, es decir: $x = \varphi(t)$ la derivada de y

respecto de la nueva variable t resulta de la igualdad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ya considerada en (53), de donde, tomando límites, sale:

$$y' = f'(x) \cdot \varphi'(t) \qquad [1]$$

conviniendo en que y' designe a la derivada respecto de t.

Si la variable t depende a su vez de otra variable, la fórmula anterior se complica, siendo preciso *multiplicar las derivadas de todas las funciones intermedias*, como se vió en la lección 13.

La notación diferencial es más ventajosa. En efecto, con ella tenemos que la [1] se expresa así:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

y multiplicando por dt, resulta:

$$dy = f'(x)\,dx \qquad [2]$$

es decir, esta fórmula que en el caso de ser x la variable independiente constituye la definición de la diferencial, siendo en ella dx un incremento arbitrario, es válida también cuando x no es independiente, *sino función de t, según acabamos de demostrar*, sólo que en este caso dx deberá calcularse según la variable o variables de que dependa t, y ya no es un incremento arbitrario.

Como para *la diferenciación no es necesario fijar cuál es la* variable independiente, ofrece ventajas sobre la derivación y suele preferirse.

NOTA. — Pudiera creerse que la fórmula (2) resulta directamente por supresión del factor dx, pero esto no es legítimo, pues dx tiene significados distintos en el numerador y en el denominador. (V. *Curso Cíclico*, II).

EJEMPLO. — Tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Diferenciando ambos miembros, como el segundo es constante, resulta:

$$\frac{2x \cdot dx}{a^2} + \frac{2y \cdot dy}{b^2} = 0$$

de donde se despeja:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2} \qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}\frac{a^2}{b^2}$$

65. — Tangentes a curvas dadas en forma paramétrica. Cicloide.

Llamamos *curva* a la trayectoria de un punto, esto es, al conjunto de posiciones de un punto móvil. Al decir que un punto se mueve expresamos que sus dos proyecciones se mueven, es decir, que *varían* con velocidad determinada en todo momento, o sea que las coordenadas son funciones continuas y derivables del tiempo.

$$x = \varphi(t) \qquad y = f(t)$$

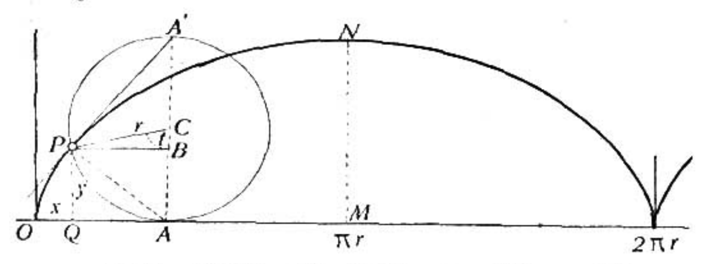
El parámetro t puede ser también una variable continua cualquiera (un ángulo en el ejemplo que sigue) y el par de ecuaciones es la *expresión paramétrica* de la curva; eliminando t resulta la ecuación ordinaria $F(x, y) = 0$.

Suponiendo que $f'(t)$, y $\varphi'(t)$ no se anulan simultáneamente, p. ej. $\varphi'(t) \neq 0$, existe tangente, cuya pendiente se calcula así:

$$dx = \varphi'(t)\,dt, \qquad dy = f'(t)\,dt \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$$

Cicloide. — Es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta sin resbalar, es decir, de modo que cada segmento de recta es igual al arco correspondiente.

Tomando como parámetro el ángulo t que forma con la vertical el radio CP, el arco AP es rt y resulta de la simple inspección de la figura:



$$x = rt - r \text{ sen } t = r(t - \text{sen } t) \qquad dx = r(1 - \cos t)\,dt$$
$$y = r - r \cos t = r(1 - \cos t) \qquad dy = r \text{ sen } t \, dt$$

de donde $y' = \text{ctg } \frac{1}{2} t$; luego la tangente es la recta PA' que pasa por el punto opuesto al de contacto de la circunferencia. En efecto, el ángulo que forma con el diámetro AA' es $\frac{1}{2}t$, luego el ángulo con el eje x es el complementario. La normal es precisamente PA.

En particular, la tangente en O es la perpendicular a la recta base.

EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

66. — Teoremas de Rolle y del valor medio.

He aquí una propiedad geométrica importante:

En todo arco de curva regular hay algún punto intermedio cuya tangente es paralela a la cuerda.

La intuición nos hace ver, en efecto, que al trasladarse la cuerda paralelamente, dos al menos de los puntos de intersección tienden a confundirse en uno; y teniendo tangente única ese punto, debe ser precisamente dicha paralela a la cuerda.

La demostración aritmética rigurosa puede verse en las notas; (Lecc. 17). Veamos sus diversas formas y aplicaciones.

Sea $y = f(x)$ una función uniforme con derivada finita en cada punto del intervalo (o bien infinita con signo único por ambos lados). *Si es $f(a) = f(b)$ en los extremos del intervalo, hay algún punto intermedio donde $f'(\xi) = 0$.*

Este es el teorema llamado de Rolle, cuya aplicación más frecuente suele ser ésta: *Entre dos valores que anulan a la función, hay otro que anula a la derivada.*

Supongamos ahora que $f(a)$ y $f(b)$ son cualesquiera; la pendiente de la cuerda es $[f(b) - f(a)] : (b - a)$; la pendiente de la tangente en un punto de abscisa intermedia ξ es $f'(\xi)$, luego si es paralela a la cuerda, resulta la igualdad:

[1] $$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$$

Este es el *teorema del valor medio* o del *incremento finito*, de Lagrange, que se enuncia así:

El incremento de una función derivable es igual al incremento correspondiente de la variable por la derivada en un punto intermedio.

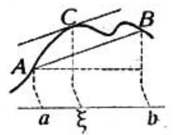
Escrito de otro modo:

[2] $$\Delta y = \Delta x . f'(\xi)$$

o también así:

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \vartheta h)$$

siendo $0 < \vartheta < 1$



67. — Teorema fundamental del Cálculo integral.

Supongamos nula la derivada $f'(x)$ en todo punto de (a, b), ¿cómo será la función? De otro modo: ¿cómo es la curva si todas sus tangentes son paralelas? La intuición asegura que debe reducirse a una recta, pero es más seguro utilizar el teorema del valor medio y con él vemos que siendo nulo el segundo miembro de [1] debe ser $f(b) = f(a)$, para todo par de valores, o sea: $f(x) =$ constante.

Consecuencia inmediata: *si dos funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ tienen derivadas iguales en todo un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.* En efecto, si es $f'(x) = \varphi'(x)$, la función $f(x) - \varphi(x)$ tiene derivada nula, luego para todo valor x del intervalo supuesto se verifica:

$$f(x) - \varphi(x) = c$$

De otro modo: llamando *primitiva* de $f'(x)$ a $f(x)$, resulta:

Dos funciones primitivas de una misma función difieren en una constante.

Pronto veremos la importancia de este teorema para el cálculo de integrales mediante funciones primitivas.

68. — Error de una función.

El teorema del valor medio no sólo es fundamento de todo el cálculo diferencial e integral, sino que también se apoya en él el cálculo de errores de la Matemática práctica.

Calculado un valor $y = f(x)$, ¿qué influjo tiene en y un error Δx de la variable x? El teorema del valor medio da la contestación exacta en la fórmula [2]. El error de la función es igual al error de *la variable por la derivada en un punto intermedio.*

Pero se presentan dos dificultades: 1.ª No se conoce el error de la variable, sino una cota superior del mismo. 2.ª No se conoce el punto intermedio ξ. Sin embargo, sabiendo bajo qué número se conserva Δx y bajo qué número está $f'(\xi)$ en el intervalo $(x, x + \Delta x)$, se tiene fácilmente un límite del error Δy, es decir, sabemos el grado de aproximación alcanzado.

EJEMPLO 1. — En la división $y = 1{:}x$, el error de x queda multiplicado por la derivada $-1/x^2$ en un punto del intervalo de x; este factor es más grande cuanto menor sea x. En cambio el error relativo de y no depende de la cuantía de x, *sino solamente del error relativo de x.*

Suponemos que el lector sabe operar con números decimales, es decir, conoce la teoría de los errores.

EJEMPLO 2. — Si la distancia entre dos puntos AB, no puede medirse directamente, pero sí las distancias $AC = b$, $BC = a$, y el ángulo $ACB = C$, se calcula c por la fórmula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C}$$

Suponiendo exactos a y b, el error que produce en c un error h del ángulo C es

$$\Delta c = \tfrac{1}{2}(2ab \operatorname{sen} \xi) h : c$$

siendo ξ un número comprendido entre C y $C + h$.

Tendremos, pues, un valor aproximado para Δc tomando:

$$|\Delta c| \sim |h|\, ab\, C : c$$

Si el error del ángulo medido $C = 29° \; 50'$ es $|h| < 1' = 0{,}00003\ldots$ siendo sen $\xi < \frac{1}{2}$, resulta: $\quad |\Delta c| \sim \frac{1}{2}ab \cdot 0{,}00003 : c$

Si se quiere asegurar un límite superior, para evitar el peligro de que el *denominador difiera apreciablemente de c, se sustituye éste por el número menor:*

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a - b$$

NOTA. — La exactitud con que deba efectuarse la medida de x depende de la cuantía de la derivada; si ésta es grande, exige mayor precisión y por ende mayor costo y trabajo.

Una grosera medida de un ángulo pequeño permite calcular su coseno con *error disminuído; al contrario, dado el coseno, el arco adolecerá de gran error.* Explíquese esto con las derivadas y directamente en la circunferencia.

69. — Interpolación lineal. Su error.

Conocidos los valores $f(a)$ y $f(b)$ de una función $f(x)$ en los puntos a y b, podemos calcular aproximadamente los valores en puntos intermedios, sustituyendo el arco de curva por la cuerda. Esto equivale a admitir que los incrementos de ordenadas son proporcionales a los incrementos de las abscisas.

Admitiendo la proporcionalidad entre las diferencias de los tres valores:

$$a \quad , \quad a + h \quad , \quad b$$

y sus correspondientes:

$$f(a) \quad , \quad f(a+h) \quad , \quad f(b)$$

resulta:

$$[3] \qquad f(a+h) \sim f(a) + h\,\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esta fórmula se aplica para la interpolación de valores no contenidos en una tabla de valores de cualquier función $f(x)$. Así se hace en las tablas de logaritmos, tablas de funciones circulares, tablas de logaritmos de funciones circulares, etc.

La diferencia $f(b) - f(a)$ entre los valores consecutivos dados por las tablas, se llama *diferencia tabular*.

En las tablas de logaritmos, a y b son enteros consecutivos; el producto de la diferencia tabular por el valor $h < 1$ se facilita con tablillas impresas al margen de la tabla.

Acotación del error.

La fórmula de interpolación, en virtud del teorema del valor medio, puede escribirse así:

$$f(a+h) \sim f(a) + h f'(c)$$

siendo c un punto intermedio entre a y b.

Por otra parte, el mismo teorema da el valor *exacto*:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(\zeta), \qquad a < \zeta < a + h.$$

El error de la fórmula [3] será, por tanto: $h[f'(\zeta) - f'(c)]$ y como ambos números pertenecen al intervalo (a, b), aplicando de nuevo el teorema del valor medio será:

$$\text{error} = h(\zeta - c) \cdot f''(\lambda)$$

siendo λ un número intermedio. En definitiva, siendo la distancia o diferencia $|\zeta - c|$ menor que la amplitud del intervalo, $b - a$, si la derivada segunda se conserva en todo el intervalo inferior a un número fijo K, resulta:

$$\text{error absoluto} < h\,(b-a)K \qquad \text{si se conserva } |f''(x)| < K$$

Ejemplo. — La interpolación lineal se aplica para calcular logaritmos de números comprendidos entre dos consecutivos n y $n+1$, cuya diferencia de logaritmos se llama diferencia tabular Δ. La fórmula es:

$$\log\,(n+h) = \log\, n + h\Delta \text{ siendo } \Delta = \log\,(n+1) - \log\, n$$

El error cometido resulta observando que siendo $n > 10000$ para las tablas de 7 decimales (Schrön, Callet, ...)

$$|f''(x)| = M/x^2 < 0{,}43\ldots : (10000)^2$$

luego resulta: $\quad \text{error} < 0{,}000000005$

es decir, no influye en la séptima cifra decimal.

70. — Cálculo aproximado de logaritmos.

El incremento de lx es decir: $l(x+h) - lx$ es aproximadamente igual a h/x y también se aproxima a $h:(x+h)$; en realidad es igual a h por el valor de la derivada en un punto intermedio.

Obtendremos mejor aproximación tomando el promedio de los dos valores extremos, y mejor todavía sumando numeradores y denominadores, con lo que resulta un valor intermedio. Tendremos, pues:

$$l(x+h) - lx \sim \frac{2h}{2x+h}$$

Esta fórmula permite calcular $l(x + h)$ conocido lx, sin más que sumarle la fracción anterior. Según se demuestra en la teoría de las series, es tan exacta esta fórmula, que si es $x > 10000$, el error es menor que 10^{-13}; es decir, resulta el logaritmo con 13 decimales exactas.

Para logaritmos decimales basta multiplicar por el módulo:

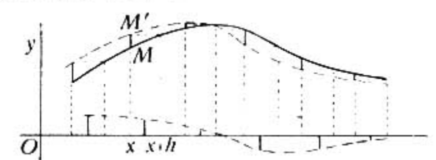
$$\log (x + h) \sim \log x + 2hM/(2x + h)$$

Es con esta fórmula tan sencilla con la que se calculan las tablas de logaritmos. Para construir una tabla hasta 100000 basta calcular los logaritmos de 10^4 a 10^5. Así, por ejemplo, dentro del orden de las diezmillonésimas, es:

$$\log 10001 = 4 + 2.0{,}43429/20001 = 4{,}0000434.$$

71. — Derivación gráfica de funciones.

Puesto que la curva derivada $y' = f'(x)$ facilita el estudio de la curva $y = f(x)$, conviene dar un procedimiento rápido de construcción aproximada que en muchos casos es suficiente.



Dibujada la curva, traladémosla hacia su izquierda (mediante un calco en papel transparente) un segmento h.

El segmento de ordenada MM' comprendido entre ambas no es sino:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(\xi)$$

Llevada esta ordenada MM' en el punto medio entre x y $x + h$ (que diferirá de ξ en menos de $h/2$) tenemos una gráfica que representa aproximadamente la función derivada, medida con la unidad h. Esto mismo se consigue mejor, sin necesidad de trasladar la curva, dibujando ésta en papel milimetrado.

EJERCICIOS

1. — Aplicar la interpolación lineal a tablas diversas: funciones circulares naturales, cuadrados, recíprocos, logaritmos de Gauss, ...; y acotar el error en cada caso.

2. — En el ejemplo 2, ¿qué influencia tiene en el error del lado c un error del lado a?

3. — ¿Para qué arcos es más exacta la interpolación en las tablas de senos y cosenos?

Distínganse el problema directo y el inverso, es decir, dado el arco, calcular sus funciones circulares, y viceversa.

4. — En qué intervalos del seno o de la tangente el error del arco es mil veces mayor que el de aqué'os?

TEOREMA GENERAL DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

72. — Teorema del valor medio de Cauchy.

Dada una curva en forma paramétrica, si las coordenadas del punto variable están dadas como funciones cuyas derivadas no se *anulan simultáneamente*:

$$x = \varphi(t), \quad y = f(t)$$

y el intervalo de variación de t es $a \leqq t \leqq b$, siendo a el valor de t que corresponde al origen A del arco y b al extremo B, la pendiente de la cuerda AB es el cociente de la diferencia de ordenadas por la diferencia de abscisas; y la pendiente de la tangente en el punto intermedio que corresponde al valor ξ (66) es el cociente de derivadas; luego el paralelismo de cuerda y tangente se expresa así:

Si $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ se verifica:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

Este es el *teorema del valor medio de* CAUCHY, que expresa: ***El cociente de incrementos de dos funciones cuyas derivadas no se anulan simultáneamente, es igual al cociente de los valores que éstas toman en un punto intermedio.***

73. — Cálculo de límites indeterminados.

Una aplicación importante del teorema de Cauchy es el cálculo de límites indeterminados.

Si $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$, el límite del cociente $f(x)/\varphi(x)$ para $x \to a$ *no se puede calcular como cociente de límites*, pues carece de sentido; pero la fórmula de Cauchy da la igualdad:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

y el límite de la primera fracción para $x \to a$ es igual al de la segunda para $\xi \to a$; el problema ha quedado reducido a otro análogo, y si las derivadas toman para $x = a$ valores que no son ambos nu-

los, su cociente da el límite buscado; si ambas se anulan, puede convenir derivar de nuevo, y así se sigue hasta llegar a derivadas que no se anulan simultáneamente. Esta es la regla que suele llamarse de l'Hôpital, atribuída por otros a Juan Bernoulli.

En la práctica conviene combinar el método con la sustitución de factores infinitésimos o infinitos por otros equivalentes, pues la aplicación repetida de la regla de derivación sólo conduce al resultado en casos sencillos.

EJEMPLO 1. — Aplicando la regla de l'Hôpital se encuentra el verdadero valor de $(\text{sen}\, x)/x$ para $x = 0$, pues el cociente de derivadas vale: $\cos x$, y para $x = 0$ resulta 1.

No se crea, sin embargo, que esto puede evitar la demostración directa dada en (20), pues la regla de l'Hôpital presupone el conocimiento de la derivada de sen x y en el cálculo de ésta se ha utilizado la equivalencia de los infinitésimos sen h y h.

EJEMPLO 2. — Calcular lím. $(x - \text{sen}\, x) : x^3$ para $x \to 0$.

El cociente de derivadas es:

$$\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{2\, \text{sen}^2 \tfrac{1}{2} x}{3x^2}$$

y sustituyendo el seno por el arco, sale $1/6$.

Queda así demostrado que el infinitésimo $x - \text{sen}\, x$ es equivalente a $x^3/6$.

EJEMPLO 3. — Análogamente, calculemos el límite para $x \to 0$, de

$$\frac{\text{tg}\, x - x}{x^3},$$

el cociente de derivadas es:

$$\frac{1/\cos^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1 - \cos^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{3x^2 \cos^2 x} \to \frac{1}{3}$$

luego tg $x - x$ es equivalente a $x^3/3$.

GENERALIZACIÓN DE LA REGLA. — Esta es asimismo aplicable para la forma de indeterminación $\infty : \infty$ y también si $x \to \infty$.

Si las dos funciones $f(x)$, $\varphi(x)$ tienden a 0, o bien a ∞, para $x \to a$ (a finito, $+\infty$, $-\infty$), pero el cociente de derivadas tiene límite (finito o infinito) para $x \to a$, y éstas no se anulan simultaneamente en ningún punto también el cociente de funciones tiende a ese mismo límite. Es decir:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad [1]$$

EJEMPLO: Comparemos mediante esta regla las funciones infinitas x^n y a^x $(a > 1)$ para $x \to \infty$. El cociente de sus derivadas 1.as, 2.as, ... es respectivamente:

$$\frac{x^n}{a^x}, \quad \frac{nx^{n-1}}{a^x . la}, \quad \frac{n(n-1)\,x^{n-2}}{a^x . (la)^2}, \quad \dots\dots, \quad \frac{n!}{a^x (la)^n}$$

Para $x \to +\infty$ todo denominador crece infinitamente, pero al llegar a la derivada n-sima el numerador es ya finito, luego el límite de esta fracción es 0 *y también lo es el de todas las anteriores.*

Llegamos así al mismo resultado ya obtenido en (34).

NOTA. — Puesto que los tipos de indeterminación $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 se reducen, como ya sabemos (29 y 44) al tipo $0/0$, o bien al $\infty - \infty$, la regla de l'Hôpital permitirá con frecuencia calcular el límite.

Hay casos, sin embargo, en que ésta es ineficaz. Así por ejemplo si se aplica a las expresiones:

$$\frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}, \quad \frac{x - \operatorname{sen} x}{x}$$

que para $x \to \infty$ adoptan las forma $\infty : \infty$, la 1.ª se reproduce periódicamente al derivar sucesivas veces y la 2.ª conduce con una derivación a $1 - \cos x$ que carece de límite. Sin embargo, salta a la vista, dividiendo numerador y denominador por e^x (en la 2.ª por x) que ambas fracciones tienen límite 1.

La simplificación, combinada con la regla de l'Hôpital, es el mejor método.

NOTAS

Demostración del Teorema de Rolle.

Sea $f(x)$ una función derivable en todo punto interior de (a, b).

Si $f(x)$ es continua en $[a . b]$ alcanza su máximo al menos en un punto ξ, *y su mínimo al menos en un punto* ξ', *en virtud del teorema de Bolzano-*Weierstrass (13, II).

Siendo, por hipótesis, $f(a) = f(b)$, *si esos puntos* ξ *y* ξ' *son* a *y* b, la función es constante y su derivada nula en todo punto. En caso contrario, alguno de ellos es *interior* y en él toma $f(x)$ *un máximo relativo o mínimo relativo*, debiendo anularse en él $f'(x)$ en virtud de (59).

Demostración de los Teoremas de Cauchy y de Lagrange.

Basta demostrar aritméticamente la *propiedad geométrica en que nos hemos* apoyado en (66) y en (72):

En todo arco regular de curva hay algún punto intermedio cuya tangente es paralela a la cuerda.

Si *cambiamos de coordenadas adoptando como eje* x la recta AB que determinan los extremos del arco, la ecuaciones de éste son:

$$x = \varphi(t) \qquad y = f(t)$$

para $a \leq t < b$, siendo $f(a) = f(b)$.

Si el arco no se confunde con el segmento (en cuyo caso el teorema es evidente), o bien el máximo o bien el mínimo de $f(t)$ lo alcanza en un punto intermedio $t = \xi$, en el cual debe ser $f'(\xi) = 0$, o sea $dy = 0$, por tanto $dy/dx = 0$.

Quedan así justificados rigurosamente el teorema del valor medio de Lagrange, y el generalizado de Cauchy. Obsérvese que en éste queda incluído aquél cuando se supone $\varphi(t) = t$.

Demostración de la regla generalizada de l'Hôpital.

Forma $0:0$ para $t \to \infty$. — Sustituyendo $t = 1/z$ se tiene

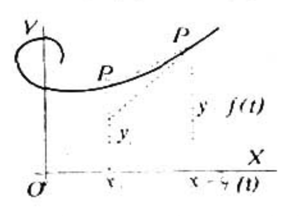
$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{f(1/z)}{\varphi(1/z)}$$

Si $t \to \infty$, o sea $z \to 0$, basta calcular el cociente de derivadas respecto de z:

$$\frac{f'(t)\,(-1/z^2)}{\varphi'(t)\,(-1/z^2)} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}$$

y si existe límite de este cociente para $t \to 0$, ese límite, en virtud del primer caso, lo es también del cociente de funciones $f(t)/\varphi(t)$.

Forma $\infty : \infty$ *para* $t \to a$, *(finito o infinito)*



Puesto que $f'(t) : \varphi'(f) \to L$, para $t \to a$, desde un t en adelante es:

$$f'(t)/\varphi'(t) = \mathrm{L} + \delta \qquad |\delta| < \varepsilon$$

y como elegido uno de esos valores t_0 es, por el teorema de Cauchy:

$$\frac{f(\mathrm{t}) - f(t_0)}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} = \frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}$$

la pendiente de P_0P, que es el primer miembro, difiere de L en menos de ε.

Fijado P_0, al alejarse infinitamente P para $t \to \alpha$, el ángulo de las semirectas P_0P y OP tiende a 0, luego sus pendientes difieren menos de ε, desde un t_1 en adelante; luego la pendiente de OP difiere de L en menos de 2ε, desde t_1 en adelante, es decir: $f(t)/\varphi(f) \to L$.

EJERCICIOS

1. — Calcular para $x \to 0$ los límites de las expresiones siguientes:

$$x^{-2} - \mathrm{ctg}^2\, x \quad ; \qquad x^{-2}(1 - x \cdot \mathrm{ctg}\, x) \quad ;$$
$$x^2 \,.\, \mathrm{sen}\, x^{-1} \,.\, \mathrm{sen}^{-1} \quad ; \qquad x(x^{-1} - \mathrm{sen}\, x^{-1}).$$

Por mera simplificación, o bien, combinada con derivación, resultan respectivamente, estos límites: $^2/_3$; $^1/_3$; 0; 1.

2. — Calcular, para $x \to +\infty$, los límites de:

$$x^2 : (x - \mathrm{sen}\, x) \quad ; \quad l(1 + x)/x$$
$$x(2\, \mathrm{arctg}\, x - \pi) \quad ; \quad l(l\, x) : x,$$

Soluciones: $+\infty$; 0; $-2/\pi$; 0.

CAPITULO III

DERIVADAS Y DIFERENCIALES SUCESIVAS

LECCIÓN 18

INCREMENTOS Y DIFERENCIALES DE ORDEN n

74. — Derivadas sucesivas. Caso de la función entera.

La derivada de la función derivada $f'(x)$ se llama *derivada segunda* de $f(x)$ y se representa así: $y'' = f''(x)$ o también $D^2 f(x)$.

La derivada de la segunda derivada se llama *derivada tercera*, y se representa así: $y''' = f'''(x) = D^3 f(x)$. Así, siguiendo, tenemos infinitas derivadas de $f(x)$.

Sea, por ejemplo, $y = x^m$; sus derivadas sucesivas son:

$$y' = mx^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}, \quad y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

$$y^{(m-1)} = m(m-1) \ldots 2x^1; \quad y^{(m)} = m(m-1) \ldots 1$$

las derivadas siguientes son todas nulas, puesto que $y^{(m)}$ es constante. Sea, análogamente $y = (x-a)^m$:

$$y' = m(x-a)^{m-1}, \quad y'' = m(m-1)(x-a)^{m-2} \ldots$$

$$y^{m-1} = m(m-1) \ldots 2(x-a), \quad y^{(m)} = m(m-1) \ldots 2.1$$

y las derivadas siguientes son:

$$y^{m+1} = y^{m+2} = \ldots = 0$$

Es decir: *Todas las derivadas de $(x-a)^m$ se anulan para $x = a$, excepto la derivada m-sima cuyo valor es m!*

FÓRMULA DE LEIBNIZ. — Las derivadas sucesivas del producto uv son:

$$uv' + u'v \quad ; \quad uv'' + 2u'v' + u''v \quad ; \quad uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v.$$

Demuestre el lector que la ley observada es general; y la analogía con **la potencia** del binomio justifica esta notación simbólica:

$$D^n uv = (u + v)^{(n)}$$

entendiendo que los exponentes se sustituyen por índices de derivación, y que **toda función** con índice 0 representa la misma función.

75. — Ordenes de las raíces y de los infinitésimos.

Un número a se llama *cero* o *raíz múltiple de orden* h de un función $f(x)$, o $f(x) = 0$ cuando es

$$f(x) = (x - a)^h\, g(x) \quad \text{siendo } g(a) \neq 0 \qquad [1]$$

Para $x \to a$ es $f(x)$ infinitésimo de orden h pues su cociente por $(x - a)^h$ tiene el límite $g(a) \neq 0$. La derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x - a)^{h-1}\,[hg(x) + (x - a)g'(x)]$$

y como la función entre paréntesis no se anula para $x = a$, pues toma el valor $hg(a) \neq 0$, resulta:

Si una raíz es múltiple de orden h en una función, es de orden $h - 1$ en su derivada primera. Por tanto, es de orden $h - 2$ en la derivada segunda; de orden 1 en la derivada $f^{h-1}(x)$; no es raíz en la derivada $f^h(x)$.

De otro modo: *El orden de multiplicidad de una raíz a de una ecuación, o sea el orden infinitesimal de $f(x)$ para $x \to a$, es el índice de la primera derivada que no se anula para $x = a$.* Este criterio vale para todas las ecuaciones, sean algebraicas o trascendentes.

EJEMPLO 1. — Derivemos respectivamente la función:

$$f(x) = 2x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 3x + 1 = 0$$
$$f'(x) = 12x^5 - 15x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 3$$
$$= 3\ [4x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1]$$
$$f''(x) = 6\ [10x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 6x]$$
$$f'''(x) = 12\,[20x^3 - 15x^2 - 6x + 3]$$
$$f^{\text{iv}}(x) = 72\,[10x^2 - 5x - 1]$$
....

Se observa inmediatamente que el valor $x = 1$ anula a $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, pero no a $f'''(x)$, luego es raíz triple.

El valor $x = -1$ anula a $f(x)$ y $f'(x)$, pero no a $f''(x)$, luego es raíz doble. El polinomio debe ser, pues, divisible por $(x - 1)^3\,(x + 1)^2$; suprimido el factor $x^2 - 1$ dos veces, y otra el $x - 1$ queda como cociente $2x - 1$; luego la quinta raíz es $x = ½$.

EJEMPLO 2. — El valor $x = 0$ es cero doble de la función $1 - \cos x$; y es raíz triple de la ecuación $\operatorname{sen} x = x$.

NOTA. — De la definición adoptada resulta: si h es par $f(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados del punto a; si h es impar cambia de signo $f(x)$.

Como corolario resulta la posición relativa de dos curvas con un punto común. (79, Nota).

76. — Diferenciales sucesivas y derivadas sucesivas.

Hemos definido la diferencial $dy = f'(x)dx$ como producto de la derivada por el incremento de la variable independiente. La diferencial es, pues, una función de x y del incremento dx. Si fijamos dx como constante, (por ejemplo, $dx = 1$) la diferencial dy es función de x y admite a su vez derivada que es $f''(x).dx$, luego la diferencial de dy, que llamaremos *diferencial segunda* de y, es:

$$d^2y = d(dy) = f''(x)\ dx.dx = f''(x)\ (dx)^2$$

Por brevedad de la escritura, suele ponerse dx^2 en vez de $(dx)^2$; no se confunda esta notación con la diferencial de x^2, que es $2\,x\,dx$.

Si $dx \to 0$, y las derivadas no son nulas, es dy un infinitésimo de primer orden; y d^2y es infinitésimo de segundo orden, pues dividido por $(dx)^2$, da cociente finito no nulo.

Análogamente, tenemos la diferencial tercera, cuarta, etc.:

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\ (dx)^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^n(x)\,(dx)^n$$

De estas igualdades se puede despejar las derivadas: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... que son, respectivamente:

$$\frac{dy}{dx}\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\quad \frac{d^3y}{dx^3}\ ,\quad \ldots\ldots$$

y el cálculo diferencial opera con estos cocientes como fracciones. Los numeradores pueden anularse, pero no los denominadores.

77. — Teorema generalizado del valor medio.

Si $f(x)$ tiene sus derivadas, hasta la de orden $n-1$, nulas en el punto a, es decir:

$$f'(a) = f''(a) = \ldots\ldots = f^{n-1}(a) = 0,$$

y aplicamos repetidamente el teorema de Cauchy, resulta:

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n(\xi_1 - a)^{n-1}} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - a)^{n-2}} = \ldots\ldots = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

siendo ξ_1 un número comprendido entre x y a; ξ_2 entre ξ_1 y a ; ... y por tanto, ξ comprendido entre x y a.

De donde despejamos el valor del incremento:

$$f(b) - f(a) = (b-a)^n.f^n(\xi)/n!$$

Es decir: *El incremento $f(b) - f(a)$ de la función $f(x)$ que tiene nulas sus derivadas 1.ª, 2.ª, ..., $(n-1)$ª, en el punto a, es igual a la potencia n-sima del incremento de la variable por la derivada n-sima en un punto intermedio, dividido por $n!$*

NOTA. — Como $f^n(x)\Delta x^n$ es la diferencial n — sima de $f(x)$ resulta:

*Cuando se anulan las derivadas 1.ª, 2.ª.... $(n-1)$ª de $f(x)$ en el punto a, **el incremento $\Delta f(x)$ es un infinitésimo de orden n, equivalente a la diferencial** n-sima (tomada en el punto a) dividida por $n!$, e igual a la diferencial n-sima en un punto intermedio dividida por $n!$*

78. — Discusión general de los máximos y mínimos.

Hemos visto en lección 14 el método para la obtención de los máximos y mínimos de una función, mediante la anulación de su derivada.

El análisis de cada problema concreto indicará si los valores encontrados para x hacen máxima o mínima a la función, o si por el contrario la curva tiene simplemente una inflexión. Cuando esto no se logre, el examen del signo de la derivada resuelve la cuestión, como ya vimos. He aquí otro criterio general:

Si a es una raíz de la derivada $f'(x)$, caben los casos siguientes, según que la primera derivada no nula sea de índice par o impar:

$f^{2k}(a) > 0$		$f(x)$ toma un valor mínimo
$f^{2k}(a) < 0$		„ „ „ „ máximo
$f^{2k}(a) = 0$	$f^{2k+1}(a) > 0$	„ es creciente con inflexión
$f^{2k}(a) = 0$	$f^{2k+1}(a) < 0$	„ „ decreciente con inflexión

En efecto: hemos visto que

$$f(a+h) - f(a) \text{ es equivalente a } h^n f^n(a)/n!$$

Si $n = 2k$ es par, es $(-h)^{2k} > 0$ a la izquierda, $h^{2k} > 0$ a la derecha de a, luego:

Si $f^{2k}(a) > 0$,	$f(a-h) > f(a) < f(a+h)$	mínimo
Si $f^{2k}(a) < 0$,	$f(a-h) < f(a) > f(a+h)$	máximo

Si $n = 2k+1$, es $(-h)^{2k+1} < 0$ a la izquierda, $h^{2k+1} > 0$ a la derecha, luego según que sea:

$f^{2k+1}(a) > 0$	resulta:	$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$	creciente.
$f^{2k+1}(a) < 0$	„	$f(a-h) > f(a) > f(a+h)$	decreciente

79. — Ordenes de contacto de dos curvas.

Dadas dos curvas $y = f(x)$ $y = \varphi(x)$ con un punto común A, los valores de ambas funciones son iguales para la abscisa a de A, es decir: $f(a) = \varphi(a)$.

La diferencia $\delta(x) = f(x) - \varphi(x) = f(a + h) - \varphi(a + h)$ de las ordenadas para una abscisa próxima a a tiende hacia cero con h, es decir, es un infinitésimo. La derivada de $\delta(x)$ es:

$$\delta'(x) = f'(x) - \varphi'(x) \quad ; \quad \delta'(a) = f'(a) - \varphi'(a) \quad ;$$

luego el infinitésimo $\delta(x)$ es equivalente a la diferencial en el punto a:

$$h[f'(a) - \varphi'(a)]$$

Es decir: si las dos curvas no son tangentes en el punto de intersección, y por tanto es $f'(a) \neq \varphi'(a)$, el segmento de ordenada comprendido entre ambas curvas es un infinitésimo de primer orden; las dos curvas se atraviesan.

Si es $f'(a) = \varphi'(a)$ pero $f''(a) \neq \varphi''(a)$, la función $\delta(x)$ tiene nula su derivada primera, pero no la segunda; por el teorema generalizado del valor medio el infinitésimo $\delta(x)$ es de segundo orden, equivalente a la diferencial segunda (dividida por 2):

$$\tfrac{1}{2}h^2[f''(a) - \varphi''(a)]$$

Las dos curvas son tangentes en A y el contacto se llama *simple* o *de primer orden*. Como $\delta(x)$ no cambia de signo, las dos curvas no se atraviesan.

Si es $f'(a) = \varphi'(a)$, $f''(a) = \varphi''(a)$, pero $f'''(a) \neq \varphi'''(a)$, por el mismo teorema generalizado del valor medio, el infinitésimo $\delta(x)$ es de tercer orden. El contacto se dice entonces de *segundo orden* y las dos curvas se atraviesan.

En general, el contacto se dice de orden n cuando las dos funciones tienen iguales las derivadas, hasta las de orden n inclusive; entonces el segmento de ordenada limitado por ambas curvas es un infinitésimo de orden $n + 1$ equivalente a:

$$h^{n+1}[f^{n+1}(a) - \varphi^{n+1}(a)] : (n + 1)!$$

NOTA. — Esta exposición ha sido independiente del teorema (75) sobre raíces múltiples. Con él queda resuelta la cuestión en pocas palabras:

Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ tienen iguales las n primeras derivadas para $x = a$, es a raíz de orden $n + 1$ de $f(x) - \varphi(x)$ y se verifica en virtud de [1]:

$$f(x) - \varphi(x) = (x - a)^{n+1} \cdot g(x) \qquad g(a) \neq 0$$

El infinitésimo es, pues, de orden $n + 1$, y las curvas se atraviesan si el orden n es par; no se atraviesan si es impar.

NOTA 1. — Hemos supuesto que las derivadas para $x = a$ son finitas; si las derivadas primeras son infinitas, es decir, si la recta tangente es paralela al eje y, tomaremos las x como ordenadas, o cualquier otra dirección distinta de la dirección de la tangente. Si un sistema de secantes paralelas (de dirección distinta que la recta tangente) da segmentos infinitésimos de un cierto orden, el mismo orden resulta con secantes de otra dirección siempre que sea distinta de la tangente; pues aplicando las fórmulas de cambio de eje y, resultan infinitésimos del mismo orden.

NOTA 2. — En los puntos en que $f(x)$ toma valores máximos, la tangente es paralela al eje x, por ser $f'(x) = 0$; cuando además se anulan varias derivadas, el contacto con la tangente es de orden superior. Si la primera derivada no nula es la del orden $2k$, la curva no es atravesada por su tangente; esto sucede en los máximos y mínimos. En cambio, si la primera derivada no nula es de orden $2k + 1$, el contacto es de orden $2k$; la curva es atravesada por la tangente, y el punto es de inflexión.

NOTAS

Ecuaciones algebraicas. — Para saber si tienen raíces múltiples, basta averiguar si hay algún divisor común a $f(x)$ y $f'(x)$; esto se consigue calculando el m. c. d. de ambos polinomios, para lo que basta someterlos al mismo algoritmo de divisiones sucesivas (algoritmo de Euclides), como se hace con los números, hasta llegar a una división exacta. El último divisor es el m. c. d.; si es constante, los dos polinomios no admiten divisor común dependiente de x; la ecuación no tiene entonces raíces múltiples.

Teorema de Sturm. — Si al efectuar las divisiones del m. c. d. se tiene la precaución de cambiar el signo de cada resto al ponerlo como divisor, se obtienen varios polinomios que se llaman de Sturm: $f(x)$, $f'(x)$, y los divisores siguientes, hasta el m. c. d.

Para saber el número de raíces reales comprendidas en un intervalo (a, b) basta sustituir $x = a$ en los polinomios de Sturm y contar el número A de cambios de signo; sustituir $x = b$, contando el número B de cambios de signo. El número de raíces comprendidas entre a y b es precisamente $A - B$.

Como solo interesan los signos y no los valores, basta calcular todos los coeficientes con dos cifras exactas y esto se consigue muy rápidamente con la regla de cálculo, pues cada división se hace con una sola posición de la reglilla.

Para estudiar la divisibilidad algebraica y la demostración del teorema de Sturm, consúltese cualquier tratado de Algebra.

EJERCICIOS

1. — Determinar el orden de contacto mutuo en el origen de las curvas

$$y = x \quad , \quad y = \operatorname{sen} x \quad , \quad y = x . \cos x .$$

2. — Hacer la discusión completa de los máximos y mínimos de la función

$$y = (x - a)^m (x - b)^n$$

mediante las derivadas sucesivas.

3. — Generalizar el resultado anterior al caso de tres o más factores

$$y = (x - a)^m (x - b)^n \dots (x - h)^q$$

FORMULA DE TAYLOR. APROXIMACION LINEAL

80. — Fórmulas de Mac-Laurin y de Taylor.

Siendo los polinomios las funciones más sencillas, se tiende en Análisis a expresar las demás funciones por medio de polinomios, calculando el error o diferencia para saber el grado de aproximación logrado.

Dada la función $f(x)$, si formamos el polinomio:

$$P(x) = f(0) + \frac{x.f'(0)}{1!} + \frac{x^2.f''(0)}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}f^{n-1}(0)}{(n-1)!}$$

tiene para $x = 0$ las mismas derivadas 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)^a$ que $f(x)$, pues resulta, en virtud de (74):

$$P'(0) = f'(0) \qquad P''(0) = f''(0) \dots \qquad P^{n-1}(0) = f^{n-1}(0).$$

Vamos a expresar la función $f(x)$ en la forma

[1] $$f(x) = P(x) + T(x)$$

llamando $T(x)$ a la diferencia entre ambas. Este término complementario $T(x)$ tendrá, por tanto, nulas sus derivadas 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)^a$, es decir:

$$T(0) = 0 \quad , \quad T'(0) = 0, \dots \quad , \quad T^{n-1}(0) = 0.$$

En cambio, como la derivada n-sima de $P(x)$ es nula, resulta:

$$T^n(x) = f^n(x)$$

luego, aplicando el teorema generalizado del valor medio, será:

[2] $$T(x) = x^n.f^n(\xi):n!$$

es decir, el término complementario tiene la misma forma que los anteriores, *con la única modificación de tomar la derivada n-sima* no en el punto 0, sino en un punto intermedio ξ, entre 0 y x.

La fórmula [1] suele llamarse de Mac-Laurin, aunque es de Taylor, reservándose este nombre para la fórmula más general:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h.f'(a)}{1!} + \frac{h^2.f''(a)}{2!} + \dots + \frac{h^{n-1}.f^{n-1}(a)}{(n-1)!} + \frac{h^n f^n(\xi)}{n!}$$

que se deduce de la anterior considerando h como variable. El número ξ está comprendido entre a y $a+h$.

Recíprocamente, poniendo $F(x) = f(a + x)$, de la fórmula [1] sale la general de Taylor; luego ambas son equivalentes.

En ambas fórmulas puede darse a n cualquier valor $n = 1, 2, 3, \ldots$; agregando el correspondiente término complementario, en el cual figura el número desconocido ξ; pero si la derivada $f^n(x)$ se conserva en todo el intervalo inferior a un número fijo K, no es necesario conocer dicho número, pues tenemos como cota del error:

$$\text{error} < h^n K : n!$$

Por tanto, al crecer n, el error tiende hacia cero.

EJEMPLO 1. — Puesto que las derivadas de e^x son todas e^x y para $x = 0$ valen 1, tenemos este desarrollo:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 e^{\theta x}}{3!}$$

luego aproximadamente, se puede adoptar:

$$e^x \sim 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2$$

Para $x = 0,1$ resulta:

$$e^{0,1} \sim 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105$$

luego

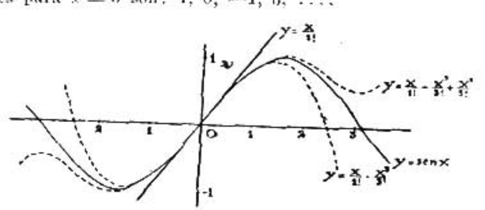
$$e^{\theta x} < e^{0,1} < 1,2$$

y el error cometido es:

$$T < 0,001 . 1,2 : 6 = 0,0002$$

es decir: el resultado 1,105 tiene todas sus cifras exactas.

EJEMPLO 2. — Las derivadas de $\operatorname{sen} x$ son: $\cos x$, $-\operatorname{sen} x$, $-\cos x$, ... cuyos valores para $x = 0$ son: 1, 0, -1, 0, ...



La figura representa la aproximación de los polinomios sucesivos hacia la función $y = \operatorname{sen} x$.

Si limitamos el desarrollo de Mac-Laurin en el término de segundo grado, tenemos:

$$\operatorname{sen} x \sim x; \qquad \text{error} = x^3 . \cos \theta x / 6 < x^3/6$$

Es decir: la diferencia entre el seno y el arco es menor que la sexta parte del cubo del arco.

Arcos	hasta	$1^\circ = 0,017$	$\varepsilon < 0,000001$
”	”	$2^\circ = 0,035$	$\varepsilon < 0,00001$
”	”	$3^\circ = 0,052$	$\varepsilon < 0,00003$
.....	.....	.....	.....
”	”	$10^\circ = 0,175$	$\varepsilon < 0,001$

Para arcos mayores, el error va creciendo, pero si tomamos un término más, tenemos: $\operatorname{sen} x \sim x - x^3/6$ error $< x^5/5!$

$$x < 10° = 0{,}175 \quad , \quad T < 0{,}00076:5! = 0{,}000001\ldots.$$
$$x < 45° = 0{,}785 \quad , \quad T < 0{,}0025$$

Nótese que por tener $P(x)$ comunes con $f(x)$ las $n-1$ primeras derivadas en a ambas curvas tienen contacto de orden igual o mayor que el grado. En este ejemplo las curvas sucesivas tienen con la sinusoide contacto de orden 2, 4, 6, ...

81. — La recta tangente como primera aproximación.

El objeto principal de la fórmula de Taylor es, como hemos visto, expresar aproximadamente las funciones en forma de polinomio de grado prefijado. El error viene dado por un término trascendente cuyo valor es desconocido; pero si se sabe entre qué límites se conserva la derivada n-sima, se puede limitar dicho término complementario, sabiendo así el grado de aproximación lograda con el polinomio de grado $n-1$.

Limitemos el desarrollo de Taylor así:

$$y = f(a) + hf'(a) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(\xi)$$

Si tomamos solamente los dos términos primeros, tenemos una aproximación lineal:

$$y = f(a) + hf'(a) \qquad \text{o sea:} \quad y = f(a) + (x-a)f'(a)$$

que representa la tangente en el punto a.

NOTA. — En las Ciencias físicas se presentan funciones empíricas, dadas por experiencias, que conviene representar analíticamente, esto es, por fórmulas, para inducir la marcha de los fenómenos análogos. Tal sucede, por ejemplo, con las deformaciones producidas en los ensayos a la tracción, de varillas metálicas, donde se observa que la gráfica tiene un trazo sensiblemente rectilíneo, que revela la proporcionalidad entre los esfuerzos y las dilataciones dentro del límite de elasticidad. Es la ley de Hooke. Pero esta proporcionalidad *es sólo aproximada; y si bien suele ser suficiente para predecir* la cuantía de la dilatación, hay casos en que la deformación crece más rápidamente que los esfuerzos. La función lineal no es entonces suficiente para expresar la ley de deformación y hay que agregarle un término cuadrático y aún de tercer grado.

Lo mismo sucede con la fórmula de dilatación de varillas por el calor.

Según la fórmula de Taylor, es suficiente la aproximación lineal en un intervalo mayor o menor, según que la derivada segunda sea menor o mayor.

EJERCICIOS

1. — Tangente en el origen a la sinusoide a la tangentoide y a la curva $y = 5x^3 - 4x$, propuesta en (3).

2. — Tangentes a las mismas curvas en el punto $x = -3$.

CONVEXIDAD, CONCAVIDAD E INFLEXIONES

82. — Convexidad y concavidad de curvas.

El error cometido en la aproximación lineal es exactamente:

$$\tfrac{1}{2}h^2 . f''(\xi)$$

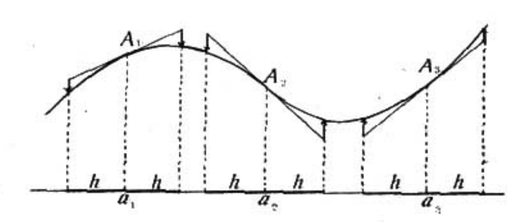
y mide la diferencia de ordenadas entre la curva y la tangente.

He aquí expresada exactamente la función $h\alpha$ con que designábamos en (62) la diferencia $\Delta y - dy$ entre el incremento y la diferencial.

Si es $f''(a) > 0$, como $f''(x)$ es función continua, conserva signo $+$ en la proximidad de a y siendo $f''(\xi) > 0$ el error es por defecto ,es decir, las ordenadas de la curva superan a las de la tangente a ambos lados del punto a; o sea: la curva se conserva por encima de la tangente. Se dice entonces que tiene la *concavidad* hacia arriba.

Si es $f''(a) < 0$, en la proximidad de a es $f''(\xi) < 0$, el error es por exceso; la curva queda hacia abajo de la tangente en un cierto intervalo; se dice entonces que la curva tiene su *convexidad* hacia arriba.

En ambos casos el error o diferencia es un infinitésimo de 2.º orden; se dice por esto que el contacto es de 1.er orden.



EJEMPLOS: 1. — La curva de la figura es convexa hacia arriba en el punto a_1 y cóncava hacia arriba en el punto a_3.

2. — La derivada segunda del sen x es — sen x, luego en las semiondas positivas la concavidad es hacia abajo, y en las semiondas negativas la concavidad es hacia arriba.

83. — Puntos de inflexión.

Cuando es $f''(a) = 0$, es preciso tomar más términos del desarrollo hasta llegar a una derivada que no se anule.

Si $f^n(a) \neq 0$, escribiremos:

$$y = f(a) + hf'(a) + h^n . f^n(\xi) : n!$$

y el error es entonces $h^n . f^n(\xi) : n!$ que es infinitésimo de orden n.

Si n es par, este error no cambia de signo al cambiar h de signo, es decir, al pasar de la izquierda a la derecha de a; la curva es convexa o cóncava hacia arriba ,según sea la derivada $f^n(a)$ negativa o positiva, pero con un contacto superior con la tangente; se dice que el contacto es de orden $n - 1$. Esto se nota en el dibujo, pues siendo el error del mismo orden que h^n, disminuye muy rápidamente y pronto llega a ser inapreciable en el dibujo, apareciendo como si la curva tuviera con la tangente un trozo común.

Si es impar, la diferencia de ordenadas cambia de signo al pasar de la izquierda a la derecha del punto a; la curva queda atravesada por su tangente. Tal punto se llama de *inflexión*. El caso más sencillo de inflexión es:

$$f''(a) = 0 \qquad f'''(a) \neq 0 \qquad \text{error} = h^3 . f'''(\xi) : 6$$

EJEMPLO. — En la figura de (82) el punto A_2 es de inflexión, pasando la curva de convexa a cóncava.

NOTA. — No suele ser necesario ni conveniente la formación de las derivadas tercera, ..., siendo preferible ver que la segunda cambia de signo, lo que indica que el primer término no nulo es de grado impar.

EJEMPLO. — Para la curva *versiera* $y = 1 : (1 + x^2)$ la segunda derivada, prescindiendo de factores positivos, es $3x^2 - 1$, que cambia de signo en los puntos $x = \pm {}^1/_3 \sqrt{3}$, luego son de inflexión.

84. — Aproximación de raíces por la regla de Newton.

Dada una ecuación $f(x) = 0$ algebraica o trascendente y una vez encontrado un intervalo (a, b) donde existe una raíz, tanto a como b son valores aproximados de dicha raíz; para mejorar la aproximación, caben dos métodos: sustituir la curva por la cuerda, o por la tangente en uno de los dos extremos del arco.

El primer método es el de interpolación lineal o por partes proporcionales, que ha sido explicado en (69). El segundo es el método de Newton, que da mejor aproximación.

Puesto que la ecuación de la tangente en el punto a es:

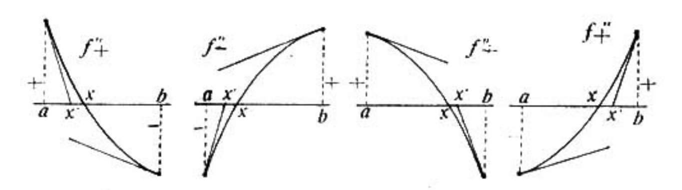
$$y = f(a) + (x - a)f'(a)$$

su intersección con el eje x da el valor:

$$x = a - f(a)/f'(a)$$

es decir: al valor aproximado a se le agrega el término

$$-f(a)/f'(a)$$



Ahora bien: la inspección de las figuras muestra que la tangente puede dar una intersección que se aleje del verdadero valor de la raíz buscada. Para tener la garantía de que se mejora la aproximación aplicando la regla de Newton, procederemos así:

Suponemos que $f''(x)$ no se anula en el intervalo y por tanto, tiene el mismo signo en a y b; en cambio, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, luego hay un extremo y uno sólo tal que $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo; pues bien, elegimos ese punto y agregándole el término complementario de Newton, tenemos una mejor aproximación, como se observa en la figura donde se han puesto los cuatro casos posibles, y en todos ellos queda x' entre el valor de partida y el verdadero valor de x, es decir, más aproximado al valor de la raíz buscada. (Véanse: *Lecciones de Algebra*, § 9).

***Error de la fórmula de Newton*:**

Puesto que la ecuación exacta es

$$y = f(a) + (x - a)f'(a) + \tfrac{1}{2}(x - a)^2 f''(\xi)$$

la intersección con el eje x tiene por abscisa

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{(x-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)}$$

El error cometido con la fórmula de Newton es

$$\frac{(x-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)} < \frac{(b-a)^2 f''(\xi)}{2f'(a)}$$

Poniendo en vez de $f''(\xi)$ un número K superior a los valores de $f''(x)$ en el intervalo (a, b), resulta como límite de error

$$\frac{(b-a)^2 K}{2f'(a)}$$

Esta fórmula demuestra que la aproximación lograda es tanto mejor cuanto mayor sea $f'(a)$. Si ésta supera a la derivada segunda, el número de cifras decimales exactas en el nuevo valor será doble que en el valor de partida. Pero si $f'(a)$ es pequeño podemos alejarnos del valor de la raíz.

Tendremos la seguridad de que x' se aproxima a x más que a si x' está comprendido entre a y x; esto se verifica *si $f(a)$ tiene el mismo signo que $f''(x)$ en todo el intervalo.* Suponemos que en todo él no se anula $f''(x)$ y por tanto tiene signo constante. Si la derivada segunda se anula precisamente en la raíz buscada, la regla de Newton puede alejarnos de este valor.

EJEMPLO. — Ecuación $\operatorname{tg} x = x + \pi$.

Hemos calculado en (13) los valores aproximados:

$$77° 27' < x < 77° 28'$$

x	$x + \pi$	$\operatorname{tg} x$	$f(x)$
$77° 27' = 1{,}352 \ldots.$	$4{,}494 \ldots.$	$4{,}492 \ldots.$	$-0{,}002 \ldots.$
$77° 28' = 1{,}352 \ldots.$	$4{,}494 \ldots.$	$4{,}498 \ldots.$	$+0{,}004 \ldots.$

Las derivadas son:

$$f'(x) = 1/\cos^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x$$
$$f''(x) = +2 \operatorname{sen} x/\cos^3 x > 0.$$

Elegiremos, pues, el valor $a = 77° 28' = 1{,}352$ y le agregaremos

$$-0{,}004683 : \operatorname{tg}^2 77° 28' = -0{,}000231 \ldots.$$

¿Con cuántas cifras debemos calcular $f(a)$, $f'(a)$ y el cociente de ambos, para que todas sean exactas?

El error de la fórmula de Newton es:

$$\frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(a)} = \frac{0{,}0003^2}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \xi}{20{,}23 \cos^3\xi} \quad \frac{0{,}0000001}{0{,}008 \times 20}$$

que es $< 0{,}0000007$; luego podemos obtener exactas hasta las millonésimas, es decir, tres cifras significativas del término de corrección, y para ello ha sido preciso tomar 4 cifras exactas en el dividendo.

En resumen, el término de corrección vale $-0{,}000231 = -47''$ y el nuevo valor de la raíz por exceso es $a' = 77° 27' 13''$.

EJERCICIOS

1. — Estudiar la convexidad, concavidad e inflexión de la curva de Cauchy, definida por la exponencial de exponente $-1/x^2$.

2. — Resolver las ecuaciones: $2 . lx = x$, $2 . \operatorname{sen} x = x$.

APROXIMACION CUADRATICA. CURVATURA

85. — Parábola osculatriz de una curva.

Si en el desarrollo de Taylor tomamos los tres primeros términos, obtenemos la curva:

$$y = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}(x - a)^2 f''(a)$$

que es una parábola llamada *osculatriz* porque tiene con la curva $y = f(x)$ un contacto de segundo orden en el punto a. La diferencia de ordenadas es un infinitésimo de tercer orden, y como este infinitésimo contiene la potencia h^3, cambia de signo al pasar h de negativo a positivo. Es decir: la parábola atraviesa a la curva en el punto de contacto, a no ser que el contacto sea superior por anularse la derivada 3.ª.

Esta parábola tiene el eje paralelo al y; al cambiar los ejes coordenados, varía la parábola, y por ésto se prefiere la circunferencia osculatriz o círculo osculador, que tiene en el punto dado un contacto de segundo orden con la curva dada, es decir, que tiene comunes con la función $f(x)$ las derivadas 1.ª y 2.ª en dicho punto.

Ejemplos: 1. — Como aproximación de la catenaria $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ obtener la parábola osculatriz en el punto más bajo ($x = 0$, $y = 1$).

Solución: $x^2 = 2(y - 1)$.

Idem la parábola osculatriz en el punto (a, b).

2. — Determinar la parábola osculatriz de la curva $y = e^x$ en el punto $x = 1$.

Solución: $y = \frac{1}{2}\, e\,(x^2 + 1)$. Calcúlese el error.

86. — Círculo osculador y curvatura.

Un modo de determinar una circunferencia:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$$

es dar los valores de y, y', y'' en un punto cualquiera $x = a$. En el 1.er miembro es y función de x luego aplicando la regla (53) dos veces sucesivas, resultan las igualdades:

$$(y - \beta)\, y' = -(x - \alpha)$$

$$(y - \beta)\, y'' + y'^2 = -1$$

de donde se despeja:

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

$$x - \alpha = y' \frac{1 + y'^2}{y''}$$

tenemos así las coordenadas (α, β) del centro.

Sustituyendo en la ecuación resulta el radio:

[1] $$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Dada una curva $y = f(x)$, entre los infinitos círculos tangentes en un punto $[x = a,\ y = f(a)]$, hay uno sólo que tiene con la curva un contacto de segundo orden y se llama círculo osculador. En efecto, si de la ecuación de la curva deducimos los valores:

$$y = f(a) \quad , \quad y' = f'(a) \quad , \quad y'' = f''(a) \quad ,$$

la condición de contacto de segundo orden es que en el círculo y en la curva tengan los mismos valores y, y', y'', luego sustituyendo estos tres números en las fórmulas, queda determinado un círculo, que es osculador de la curva en el punto fijado y cuyo radio viene dado por la fórmula [1].

Fórmula diferencial de ρ.

Si la curva viene dada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, convendrá transformar la fórmula anterior. No siendo ya x variable independiente, se tendrá:

$$y' = dy/dx$$

$$dy' = [dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x] : dx^2$$

de donde:

$$y'' = \frac{dx^3}{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x}$$

y sustituyendo resulta:

[2] $$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \,.\, d^2y - dy \,.\, d^2x} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

representando por $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ las derivadas segundas respecto de t.

Por razones que veremos en (138), se llama *curvatura* en cada punto a la magnitud $C = 1 : \rho$, recíproca del radio ρ.

Si la tangente es horizontal, es decir: $y' = 0$, la curvatura está medida exactamente por el número y''.

Se llama *evoluta* de una curva f al lugar φ de los centros de los círculos osculadores, o centros de curvatura en sus diversos puntos. La curva f se llama *evolvente* de la φ. Para su estudio véanse los *Complementos de Cálculo integral*, al final de Cap. V.

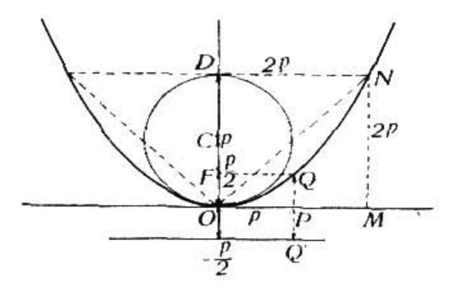
87. — Curvatura de la parábola $x^2 = 2py$.

En el vértice la curvatura es:

$$y'' = 1/p \quad , \quad \text{luego } \rho = p.$$

El radio de curvatura en el vértice es igual al parámetro p.

Dibujada una parábola, tenemos, pues, el diámetro del círculo osculador, buscando la ordenada igual a la abscisa $x = y$, para lo



que basta trazar la bisectriz. El punto medio del radio es el foco. La ordenada de la curva correspondiente al foco, es decir, la perpendicular al eje limitada por el foco y la curva es precisamente el radio $p = \rho$.

88. — Curvatura de curvas usuales.

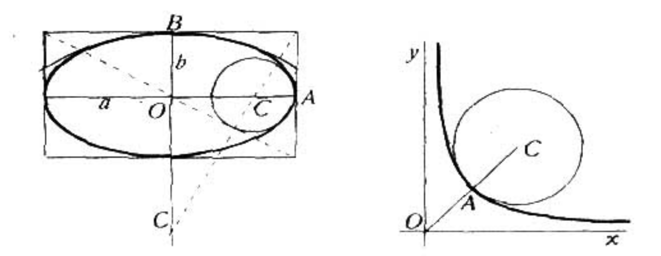
Las ordenadas de la elipse son las de la circunferencia de radio a, multiplicadas por b/a; y la derivada y'' queda multiplicada por b/a; como la curvatura de la circunferencia es $1 : a$, la curvatura de la elipse en el vértice B es *por tanto* b/a^2; *luego el radio de curvatura es* a^2/b.

Cambiando las letras, el radio de curvatura en A es b^2/a.

Construcción: Desde el vértice D del rectángulo circunscripto se traza la perpendicular a la diagonal EH; *sus intersecciones con los ejes son los centros* de curvatura C y C'.

Basta, en efecto, comparar los triángulos semejantes ADC y OAB; o bien los $BC'D$ y OAB.

Puesto que la construcción de los cuatro círculos osculadores es tan sencilla, y la curva tiene con cada uno un arco que coincide sensiblemente, basta completar estos cuatro arcos con una regla flexible de acero para tener la



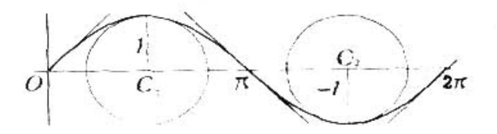
elipse, mientras que las construcciones compuestas de arcos de circunferencias tangentes, dan un óvalo nada parecido a la elipse, pues su curvatura es función discontinua.

Hipérbola. — Para calcular el radio de curvatura en los vértices de una hipérbola adóptese y como variable independiente, y derivando dos veces, resulta: $\rho = b^2/a$.

Basta, pues, trazar desde el punto (a, b) que determina una asíntota la perpendicular a ésta y corta al eje x en el centro C de curvatura.

Para el vértice de la hipérbola equilátera $xy = a^2$ resulta $\rho = a\sqrt{2} = OA$.

Sinusoide $y = \text{sen}\, x$. — La derivada segunda es $y'' = -\text{sen}\, x$; la curvatura en los vértices vale 1 y el radio de curvatura $\rho = 1$. Como el contacto con el círculo osculador es de tercer orden, hay un arco de sinusoide que sensiblemente coincide con la circunferencia. Además, *la tangente en cada punto de* intersección con el eje x forma ángulo $= 45°$, y como tiene contacto de segun-



do orden, también hay un trozo de sinusoide que sensiblemente coincide con la tangente.

Cicloide. — Para calcular el radio de curvatura de la cicloide en cualquier punto aplíquese la fórmula [2]. En el vértice resulta: $\rho = -4r$.

89. — Vértices de las curvas en general.

Al moverse un punto sobre la curva $y = f(x)$, la curvatura varía con x; los puntos en que alcanza valores máximos y mínimos sin anularse, se llaman ***vértices*** de la curva.

Si el radio es máximo o mínimo, también su cuadrado; obtendremos sus máximos y mínimos resolviendo la ecuación:

$$y''^2 . 3(1 + y'^2)^2 . 2y' y'' - (1 + y'^2)^3 . 2y'' y''' = 0$$
$$\text{o sea: } 3y' y''^2 = (1 + y'^2) y'''$$

El factor suprimido $y'' = 0$ representa los puntos de inflexión, donde la curvatura alcanza su mínimo *cero*, pero éstos no se consideran como vértices.

Si la curva es simétrica respecto del eje y, es $y' = 0$ y resulta $y''' = 0$ lo mismo que en el círculo osculador, que también es simétrico; por tanto, el contacto es de tercer orden.

Más general, consideremos el círculo osculador en un vértice de la curva. Derivando por tercera vez la ecuación del círculo, resulta:

$$(y - \beta)\, y''' + y'y'' + 2y'y'' = 0$$

y sustituyendo el valor de $y - \beta$, resulta para y''' el valor:

$$\frac{3y' y''^2}{1 + y'^2}$$

que es el mismo valor que resulta en el vértice de la curva; luego: *En los vértices de una curva el contacto con su círculo osculador es de orden superior al segundo.*

90. — Curvatura de la línea elástica.

En Técnica se presentan algunas curvas de pequeña curvatura, como es por ejemplo, la línea elástica, esto es, la forma adoptada por la fibra central de una varilla horizontal sujeta a deformación para ciertas fuerzas; por ejemplo: viga horizontal empotrada por un extremo.

La pendiente y' en cada punto es en general pequeña y suele adoptarse como fórmula aproximada para la curvatura $C \sim y''$. Ahora bien, ¿qué error produce aquella hipótesis simplificadora? El error exacto es:

$$y'' - y''(1 + y'^2)^{-3/2} = y''\left[1 - (1 + y'^2)^{-3/2}\right]$$

y aplicando el teorema del valor medio, llamando $y'^2 = z$, el paréntesis vale exactamente $3/2$ multiplicado por

$$z(1 + \vartheta z)^{-5/2} < z = y'^2$$

El error absoluto es menor que $^3/_2\, y''\, y'^2$ y el error relativo menor que $^3/_2\, y'^2$. Si se sabe que la pendiente se conserva menor que δ, el error relativo cometido en la curvatura es $< {}^3/_2\, \delta^2$.

Fácilmente demostrará el lector que la serie binómica en que se desarrolla la potencia es alternada y, por tanto, el valor del paréntesis es menor que $^3/_2\, y'^2$; primer término de la serie. (V. Lección 26).

EJERCICIOS

1. — Determinar los vértices de la sinusoide y cicloide.

2. — Demostrar que la evoluta de la cicloide es otra cicloide igual.

3. — Deducir la fórmula [1] como caso particular de la [2].

4. — Demostrar que el círculo osculador a una cónica en cada vértice tiene contacto de tercer orden.

LECCIÓN 22

INTERPOLACION

91. — La fórmula de Lagrange.

El desarrollo de Taylor da aproximaciones sucesivas de $f(x)$ en el entorno de un punto, pero el error crece muy rápidamente al alejarse de ese punto. Más útil es en muchos casos obtener polinomios que coincidan con la función en 2, 3, 4, ... puntos aunque las tangentes a las gráficas sean distintas; este es el problema de la *interpolación* y *extrapolación*.

Dados los valores:

$$y_0 = f(x_0) \quad , \quad y_1 = f(x_1) \quad , \quad \ldots ; \quad y_n = f(x_n)$$

existe un polinomio y solo uno, de grado n, que toma estos $n+1$ valores; pudiendo calcularse sus $n+1$ coeficientes mediante las $n+1$ ecuaciones lineales de condición; pero es preferible formarlo directamente así:

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\ & + a_1(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde en cada producto falta un factor $x - x_i$, Para $x = x_0$, se anulan todos los términos, excepto el primero, y se despeja el valor de a_0; haciendo $x = x_1$, se despeja a_1, etc.

Esta es la *fórmula de Lagrange*, que da el polinomio buscado; el cual es *único*, pues la diferencia entre dos polinomios $P_n(x) - Q_n(x)$ que tomen los mismos $n+1$ valores, se anula en ellos, y, por tanto, es idénticamente nula, luego $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.

EJEMPLOS. — Recta determinada por los puntos (x_0, y_0) (x_1, y_1):
El polinomio de primer grado es:

$$y = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0)$$

donde los coeficientes a_0 y a_1 son las fracciones:

$$\frac{y_0}{x_0 - x_1} \quad , \quad \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$

Párabola determinada por los puntos: (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

$$y = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

cuyos coeficientes se calculan inmediatamente.

92. — La interpolación parabólica progresiva.

Dos son los defectos de la fórmula de Lagrange; la complicación de los cálculos y la inutilidad de ellos cuando después de formado el polinomio $P_n(x)$ se quiere formar el $P_{n+1}(x)$ para conseguir mejor aproximación. Ambos inconvenientes se evitan con la interpolación *parabólica progresiva*, que conduce más cómodamente al mismo polinomio, por la unicidad ya demostrada.

Primer grado. — Pongamos: $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$

donde: $a_0 = y_0$; $a_1 = (y_1 - a_0):(x_1 - x_0)$

Segundo grado.

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Conservando los mismos a_0, a_1, basta calcular a_2 con la condición que y tome el valor y_2 para x_2; o sea:

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Grado n.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$\dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

El nuevo coeficiente a_n es igual a la diferencia $y_n - P_{n-1}(x_n)$ entre el nuevo valor prefijado y_n y el valor que toma el polinomio antes calculado, dividido por el producto

$$(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})$$

de distancias al nuevo punto x_n desde los anteriores.

Ejemplo. — He aquí las tensiones del vapor de agua a diversas temperaturas:

Temp:	t	80°	90°	100°
Tensiones:	P	35,46	52,55	76,00

La interpolación lineal entre 80° y 90° da:

$$P_1 = 35{,}46 + a_1(t - 80°)$$

donde:

$$a_1 = (76 - 35{,}46) : 20 = 2{,}027$$

pero si sustituímos $t = 90°$ resulta:

$$P_1 = 35{,}46 + 20{,}27 = 55{,}73$$
$$\text{error: } 52{,}55 - 55{,}73 = -3{,}18$$

como es excesivo, recurramos a la interpolación de segundo grado, cuyo nuevo

coeficiente a_2 se deduce dividiendo ese error por $(90-80)\ (90-100) = -100$; luego resulta 0,0318; la nueva fórmula es:

$$P_2 = 35{,}46 + 2{,}027(t-80) + 0{,}0318(t-80)(t-100)$$

Por ejemplo: para $t = 86$ resulta $T = 44{,}95$, mientras que la observación directa del fenómeno da 45,01; el error relativo, por tanto, no llega a 1 : 1000.

93. — Valores equidistantes. Fórmula de Newton.

Caso importante es aquel en que los puntos x_0, x_1, x_2, ... son equidistantes, es decir:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots\ldots = h$$

Los numeradores de los coeficientes a_0, a_1, ... son entonces:

$$y_0 \quad , \quad y_1 - y_0 \quad , \quad y_2 - 2y_1 + y_0 \quad , \quad \ldots\ldots$$

y los denominadores respectivos son:

$$1 \quad , \quad 1!h \quad , \quad 2!h^2 \quad , \quad \ldots\ldots$$

La formación de los numeradores se hace cómodamente con este esquema, usando las diferencias 2.as: $\Delta^2 y = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$; las 3.as, 4.as, ...

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 = y_1 - y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 & \\
 & \Delta y_1 = y_2 - y_1 & & \Delta^3 y = \ldots\ldots \\
y_2 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & & \\
y_3 & & &
\end{array}$$

en el cual se forma cada elemento restando los dos que lo comprenden en la columna anterior.

Obsérvase que los numeradores de los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... son precisamente las diferencias sucesivas:

$$y_0 \quad , \quad \Delta y_0 \quad , \quad \Delta^2 y_0 \quad , \quad \Delta^3 y_0 \quad , \quad \ldots\ldots$$

que ocupan la primera fila; y admitida la generalidad de esta ley (cuya generalidad se prueba fácilmente por inducción) resulta la importante fórmula de Newton, cuya semejanza con la de Taylor salta a la vista:

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)\Delta y_0}{1!h} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\Delta^2 y_0}{2!h^2} + \ldots\ldots + \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{n-1})\Delta^n y_0}{n!h^n} + T.$$

Ejemplo. — Como aplicación de la fórmula de Newton, resolvamos el mismo problema anterior, ya que los valores 80, 90, 100, son equidistantes:

80	35,46		
		17,09	
90	52,55		6,36
		23,45	
100	76,00		

luego la fórmula obtenida, idéntica a la antes formada en (92), es:

$$P = 35{,}46 + 1{,}709(t - 80) + 0{,}0318(t - 80)(t - 90)$$

Nota. — Es preciso agregar el término complementario, pues la función dada $f(x)$ no coincide con el polinomio que hemos formado, más que en los puntos x_0, x_1 .... x_n. La expresión del término complementario es:

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

siendo ξ un número comprendido entre x_0, x_1, ... x_n, x, y esta expresión vale aunque no sean equidistantes los valores, es decir, en la interpolación parabólica general. (La demostración puede verse en Vallée-Poussin).

Obsérvese el peligro de la *extrapolación*, es decir, la utilización de la fórmula para el cálculo de valores en puntos exteriores al intervalo de los valores observados; pues aparte el riesgo de un crecimiento rápido de la derivada, el producto de distancias a los puntos dados crece rápidamente al salir del intervalo de éstos.

Ejemplo. — La misma fórmula que tan excelente resultado nos ha dado para el valor $t = 86$, nos da para $t = 0°$ el resultado absurdo 127,70, mientras que el valor observado es 0,46.

EJERCICIOS

1. — Formar la ecuación de la parábola de eje vertical determinada por tres puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

2. — Resolver los ejemplos del texto, aplicando la fórmula de Lagrange, y comparar los diversos métodos en cada caso.

3. — De igual modo que $\Delta y_0/h \rightarrow y'_0$, se puede probar: $\Delta^2 y_0/h^2 \rightarrow y''_0$; etc. Admitido esto, demuéstrese que al tender x_1 x_2 ..... hacia x_0 resulta la fórmula de Taylor.

CAPITULO IV

LAS SERIES DE POTENCIAS

LECCIÓN 23

SERIES NUMERICAS EN GENERAL

94. — Adición y sustracción de series.

Siendo el algoritmo de las series una combinación de la suma con el paso al límite, las propiedades demostradas en la lección 6 permiten obtener nuevas propiedades de las series. Por ejemplo: dada la serie convergente:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

es decir: $\text{lím.}\, U_n = U$ por la definición (36)

se verifica: $\text{lím.}\, kU_n = kU$ por la propiedad (23)

luego resulta de la misma definición de serie:

$$ku_1 + ku_2 + \dots + ku_n + \dots = kU$$

Si se multiplican los términos de una serie convergente por un mismo número, su valor queda multiplyicado por este número.

En particular: *si se cambian de signo todos los términos, resulta como valor de la serie el número opuesto.*

Consideremos ahora varias series convergentes, por ejemplo:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = V$$

es decir: $U = \text{lím.}\, U_n$; $V = \text{lím.}\, V_n$ (def. 36)

se verifica: $U + V = \text{lím.}\, (U_n + V_n)$ (prop. 22)

o sea, por la misma definición de serie:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots = U + V$$

La serie obtenida sumando término a término dos o más series convergentes tiene como valor la suma de los valores de estas series.

Como la diferencia puede considerarse como suma resulta:

La serie obtenida restando término a término dos series convergentes, tiene como valor la diferencia de los valores de ambas.

95. — Series absolutamente convergentes; propiedad conmutativa. Considerando una serie de términos positivos y negativos, por ejemplo:

$$a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + \ldots .$$

que es la diferencia de las series:

$$a_1 + 0 + 0 + a_4 + 0 + a_6 + a_7 + a_8 + 0 + \ldots .$$
$$0 + a_2 + a_3 + 0 + a_5 + 0 + 0 + 0 + a_9 + \ldots .$$

Si formamos la serie de valores absolutos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \ldots .$$

y ésta es convergente, también lo son las dos anteriores, que tienen los términos $\leqq$, luego tienen sumas finitas A y A'. Como la serie dada es la diferencia de ambas, su valor es $A - A'$.

Resulta así el teorema o criterio de Dirichlet:

Si la serie de valores absolutos converge, también converge la serie dada y su valor es menor que el de aquélla.

Dada una serie de términos positivos y negativos, si se forma la serie de valores absolutos y resulta convergente, también lo es la serie dada la cual se llama *absolutamente convergente;* si la serie de valores absolutos diverge, nada puede decirse de la serie dada, pero si ésta es convergente su convergencia se llama *condicional.*

EJEMPLO 1. — La serie

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} +$$

cualquiera que sea la ley de los signos de sus términos, es absolutamente convergente, pues la serie d valors absolutos es la que defin el número e.

EJEMPLO 2. — La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

es convergente por ser alternada y tender a 0 su término general; sin embargo, la serie de valores absolutos es la serie armónica, cuya divergencia se ha visto en (39). Por tanto: la serie dada es *condicionalmente convergente.*

La distinción entre la convergencia absoluta y condicional es importante, si se desea alterar el orden de los términos. En efecto:

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad conmutativa; en las condicionalmente convergentes la alteración del orden de los términos puede cambiar el valor y hasta el carácter de la serie.

Demostración — Veamos la propiedad conmutativa para las series de términos positivos. Si se altera el orden de éstos, cualquiera que sea el número de términos que tomemos en la segunda serie, es la suma $S'_n < S$, pues todos ellos figuran en una cierta suma parcial de S; luego el límite es $S' \leq S$; por igual razón, invirtiendo el razonamiento, debe ser $S \leq S'$, luego $S = S'$.

Esta es la propiedad llamada *conmutativa*, análoga a la de las sumas finitas; mas no se crea que esta propiedad subsiste para todas las series, pues al alterar el orden de los términos, no sólo puede cambiar la suma, sino hasta hacerse divergente la serie. (Véase el ejemplo).

Las series absolutamente convergentes tienen la propiedad conmutativa, pues toda alteración de orden en sus términos produce una alteración en los minuendos, (que no hace variar su suma A), y otra en los sustraendos, que tampoco altera la suma A', luego resulta $S = A - A'$, después de la alteración del orden

EJEMPLOS. — Con los términos de la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

cuya suma es $l2 = 0{,}69 \dots$, como pronto veremos, se pueden *formar estas series*:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

donde las fracciones de denominador par ocupan los puestos cuyos números de orden son $1, 4, 9, \dots n^2, \dots$ Esta serie es *divergente*; *en cambio*

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{1} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{3} - \dots$$

en la que las fracciones impares ocupan los lugares múltiplos de 5, converge y vale 0. (Puede verse la demostración en *Análisis algebraico*, núm. 353).

Compruebe el lector aproximadamente estos resultados tomando suficiente número de términos.

Esta variación de la suma y aún del carácter de la serie es debida a no ser absolutamente convergente, pues al tomar todos los términos en valor absoluto, resulta la serie armónica, cuya divergencia se demostró en (39).

96. — Multiplicación de series.

Dadas las series convergentes de términos *positivos*:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = V$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = U$$

multipliquemos cada término de una por cada término de la otra, agrupando los productos en esta forma:

$u_1 v_1 +$
$+ u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_2 v_2 +$
$+ u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_1 + u_3 v_2 + u_3 v_3 +$
$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

de modo que la suma de 1, 4, 9, ... n^2, ... términos es precisamente $U_n \,.\, V_n$; *luego esta serie es convergente y su valor es* $U \,.\, V$; y de cualquier modo que se ordene, siempre vale $U \,.\, V$, producto de los valores de ambas series.

Si las dos series son de términos positivos y negativos, pero *absolutamente convergentes,* la serie de productos es absolutamente convergente e igual al producto de las series de valores absolutos de ambas; pero si los términos se ordenan como arriba se hizo, es decir, *de modo que los* n^2 *primeros sumen* $U_n \,.\, V_n$, *su límite es* $U \,.\, V$. Por tanto:

Dadas dos series absolutamente convergentes, la serie obtenida multiplicando en cualquier orden cada término de una por cada término de la otra, es absolutamente convergente e igual al producto de los valores de ambas.

En particular, puede adoptarse esta ordenación llamada de Cauchy, atendiendo a la suma de índices:

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \dots\dots\dots$$

EJERCICIOS

1. — Demostrar que el error cometido en una serie absolutamente convergente al tomar S_n, es menor que el resto de la serie de valores absolutos.

2. — Demostrar que si las dos series de términos positivos y negativos *componentes de una serie son divergentes,* pero el *término general tiende a* cero, alterando el orden se puede formar una serie convergente de suma prefijada, o una serie divergente de suma $+\infty$, o bien una serie oscilante.

3. — Elevar al cuadrado la serie de valores absolutos de la serie que desarrolla e^x (42), ordenando según la regla de Cauchy; multiplicar de nuevo por la serie exponencial y descubrir la ley que siguen estas series, potencias de aquélla.

LECCIÓN 24

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS

97. — Intervalo de convergencia de una serie de potencias.

Una generalización muy útil de las funciones enteras o polinomios *son las series enteras o series potenciales:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \qquad [1]$$

cuyos términos son las potencias sucesivas de una variable x, multiplicadas *por coeficientes cualesquiera. De este tipo general resulta* cada serie particular dando valores numéricos a los coeficientes $a_0, a_1, a_2 \dots$ Tales *series no tienen significado numérico sino para* aquellos valores especiales de x que sustituídos en vez de la variable *dan una serie numérica convergente.*

El conjunto de valores de x que hacen convergente una serie se llama *campo de convergencia;* veamos qué es un *intervalo.*

Formemos el cociente de valores absolutos de cada coeficiente al *siguiente:* $|a_n| : |a_{n+1}|$ y calculemos su límite R, para $n \to \infty$.

Apliquemos a la serie el criterio de convergencia de Dirichlet (95), es decir, formemos la serie de valores absolutos:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \qquad [2]$$

El cociente de un *término* al anterior es

$$\frac{|a_{n+1} \cdot x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|}{|a_n|}$$

cuyo límite para $n \to \infty$ es $|x| : R$.

1.º) Si $R = \infty$ el límite *de este cociente* es 0, cualquiera que sea x, es decir, la serie [2] converge y también la [1] para todo valor de x. El *intervalo de convergencia es todo el eje de las* x.

2.º) Si $R > 0$ *pero finito,* este límite es:

$$\begin{array}{ll} < 1 \text{ para los valores } & |x| < R \\ > 1 \quad ,, \quad ,, \quad ,, & |x| > R \end{array}$$

es decir, por el criterio (40) de d'Alembert, la serie [2] converge y por el de Dirichlet la [1] converge, por tanto, *absolutamente,* para los valores de x comprendidos entre $-R$ y $+R$. Para valores

$|x| > R$, la serie [2] diverge y sus términos van creciendo desde un cierto lugar en adelante, por ser > 1 el límite del cociente de términos consecutivos; luego la serie [1] cuyos términos crecen, no converge, por no tender éstos a cero (36).

Este número R, que mide la amplitud del intervalo de convergencia a uno y otro lado del origen, suele llamarse *radio de convergencia*. En los extremos R, $-R$, caben todas las posibilidades.

3.º) Si $R = 0$ la serie [1] sólo converge para el valor $x = 0$ que la reduce a su primer término a_0. La serie no define, pues, función ninguna. Ejemplo: $0! + 1!x + 2!x^2 + \ldots$

Podemos resumir en una sola regla práctica los tres casos:

El radio de convergencia es el límite para $n \to \infty$, del cociente de cada coeficiente al siguiente, tomados ambos en valor absoluto.

Solamente las series de los dos primeros tipos tienen interés, pues definen funciones de x para los valores del intervalo de convergencia. Las series de intervalo infinito de convergencia son las más parecidas a los polinomios, pues toman valor numérico para cualquier valor de x; se llaman funciones ***trascendentes enteras.***

EJEMPLOS. — Compruebe el lector que pertenecen al primer tipo las series

$$(e^x) \qquad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$(\cos x) \qquad x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{(2n)!} \mp \ldots$$

$$(\operatorname{sen} x) \qquad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \mp \ldots$$

y al segundo tipo las series siguientes:

$$l(1+x) \qquad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

que serán estudiadas en las lecciones siguientes, donde demostraremos que sus sumas respectivas son las anotadas a la izquierda.

En estas series, excepto primera y penúltima, no es aplicable la fórmula dada para R, pues hay infinitos coeficientes 0; pero tomando x^2 como variable, resulta 1 como límite en la última, luego $R = 1$; y en las 2.ª y 3.ª, $R = \infty$.

En las funciones no elementales el cociente $|a_n| : |a_{n+1}|$ suele carecer de límite y también falla la regla análoga de la raíz n-sima (Lecc. 10, Ejerc. 4); pero se generaliza mediante el concepto de *límite de oscilación* (V. *Teoría de funciones*).

98. — Operaciones con series de potencias.

La utilidad de las series de potencias reside, sobre todo, en sus propiedades sencillas, análogas a las de los polinomios y que ya hemos demostrado. Las series de potencias se suman y restan como polinomios ordenados; se multiplican formando el producto de cada término de una por cada término de la otra, y ordenando los productos según las potencias crecientes de x.

El intervalo de convergencia de la serie que resulta comprende *al menor de los intervalos de convergencia*; pues para x interior a él, ambas series convergen absolutamente.

EJEMPLO. — Elevando al cuadrado la serie

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots = 1:(1 - x) \qquad |x| < 1,$$

y ordenando según las potencias ascendentes de x obtenemos este resultado:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots = 1:(1 - x)^2 \qquad |x| < 1$$

Análogamente, pueden dividirse las series de potencias como los polinomios, ordenando el cociente según las potencias ascendentes de x, pero la validez del resultado ya no es de tan fácil expresión como en la suma, resta y multiplicación, pues el radio de convergencia del cociente puede ser menor que los de ambas series, ya que no puede superar al menor de los módulos de las raíces reales o complejas del denominador. (Véase lección 27).

99. — Desarrollo en serie por división.

En particular, los polinomios son series que tienen nulos infinitos términos y prolongado indefinidamente el cociente de dos polinomios, ordenado según las potencias ascendentes, resulta una serie que equivale al cociente de ambos polinomios en un cierto intervalo de convergencia. Su radio es el *módulo mínimo de los ceros reales o imaginarios del denominador.*

La demostración exige pasar al campo complejo, explicándose así paradojas como la que presenta la función [4].

Sin apoyarnos en el teorema general arriba citado, si dividimos 1 por $1 + x$ podemos escribir la igualdad:

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots \qquad [3]$$

pues tal desarrollo es válido para $|x| < 1$ *como se demostró en* (36).

En este caso el radio de convergencia que limita la validez de esta igualdad es $R = 1$; para valores fuera del intervalo $(-1+1)$ deja de ser cierta la igualdad ;así, por ejemplo, para $x = 2$, el primer miembro toma el valor -1 mientras el segundo carece de valor, pues es *divergente. Tal es el inconveniente de los desarrollos en*

serie, que no dan la función completa, sino sólo un *trozo de función* comprendido en el intervalo de convergencia.

Análogamente se obtiene:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots . \qquad [4]$$

desarrollo también válido para $|x| < 1$.

100. — Desarrollo en serie mediante la fórmula de Mac-Laurin.

La fórmula de Mac-Laurin, aplicable a toda función que tiene infinitas derivadas, expresa la función en forma de polinomio, más un término complementario:

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2.f''(0)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}.f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \frac{x^n f^n(\xi)}{n!}$$

Inmediatamente ocurre pensar si será legítimo extender indefinidamente el desarrollo, poniendo en vez del término complementario unos puntos suspensivos. Vamos a estudiar cuándo será cierta esta igualdad:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2.f''(0)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}.f^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \ldots\ldots$$

Para ello basta recordar el significado de estos puntos suspensivos que equivale al símbolo lím. S_n. Llamando, pues, S_n a la suma de los n primeros términos; la segunda igualdad será cierta, si lo es esta otra:

$$f(x) = \text{lím. } S_n \quad ;$$

o lo que es lo mismo: lím. $[f(x) - S_n] = 0$.

Ahora bien, esta diferencia $f(x) - S_n$ es precisamente el término complementario, luego resulta:

El desarrollo de una función en serie por la fórmula de Mac-Laurin, es legítimo para todo valor de x para el cual el término complementario tiende a 0, al crecer n infinitamente.

NOTA. — El mismo criterio subsiste para la validez del desarrollo general tayloriano:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + (x-a)^2 f''(a)/2! + \ldots .$$

101. — Desarrollos mediante la serie derivada.

En las lecciones siguientes será muy útil este teorema:

Si $f'(x)$ es desarrollable en serie potencial en $(-R, +R)$, también lo es $f(x)$ en el mismo intervalo y los términos de la serie son las potencias primitivas de los términos de aquélla.

Demostración. — Hemos visto (97) que si la serie [1] converge en un punto x_0 del intervalo de convergencia $(-R, +R)$ la serie de valores absolutos [2] converge para todo x tal que $|x| < |x_0|$ y el resto es:

$$|R_n(x)| \leq |a_n x^n| + \ldots . \leq |a_n x_0^n| + \ldots \ldots < \varepsilon$$

desde un cierto índice $n \geqq \nu$, para todo $|x| < |x_0|$.

Aplicando la fórmula de Taylor a las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ se tiene:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots . + a_n x^n + R_n(x)$$

$$f'(x) = a_1 + \ldots . + n a_n x^{n-1} + R'_n(x)$$

y si $f'(x)$ es desarrollable en serie para $x = x_0$, se verifica, como acabamos de probar, $|R'_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x < x_0$ y todo $n \geqq \nu$. Por el teorema del valor medio es

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(0) = x \, . \, R'_n(\xi)$$

luego para cada $|x| < |x_0|$ es desde $n \geqq \nu$: $|R_n(x)| < |x_0| \varepsilon$; por tanto, es $R_n(x) \to 0$ para $-R < x < R$, y $f(x)$ es desarrollable en todo el intervalo $(-R + R)$.

102. — Aproximaciones sucesivas de las funciones.

Los desarrollos en serie de potencias son el instrumento óptimo para el cálculo aproximado y tabulación de funciones, puesto que se puede tomar mayor o menor número de términos según la aproximación exigida.

Para determinar el grado de aproximación alcanzado al tomar varios términos, no basta que sean despreciables los siguientes; pues la suma de ellos puede exceder el límite de error y aun ser infinita (*). Solamente en las series alternadas puede asegurarse que el error cometido es inferior al primer término despreciado; en las demás series sólo podrá precisarse el grado de aproximación, formando el término complementario de Taylor o comparando con una propresión geométrica convergente que tenga los términos mayores que la serie dada. Este último procedimiento (que suele llamarse de la serie *mayorante*) ha sido utilizado para la serie del número e; el método del término complementario ha sido aplicado repetidas veces.

Hay funciones complicadas de una o varias variables, que pueden expresarse aproximadamente por fórmulas sencillas (que los principiantes creen exactas), *cuando una de las variables es suficientemente pequeña.* El significado de esta palabra es el siguiente: Se desarrolla en serie de potencias de dicha variable, y la serie es válida para todos los valores de la variable inferiores al radio de convergencia. Tomando 1, 2, 3, ... términos de la serie resultan fórmulas que dan aproximaciones sucesivas de la función. Algunos ejemplos expuestos en la lección siguiente enseñarán el modo de proceder.

EJERCICIOS

1. — Calcular el desarrollo de $1 : (1 - 3x + 2x^2)$.

2. — Demostrar que el producto de dos series exponenciales es del mismo tipo; y comprobarlo para el cociente de 1 por una serie exponencial.

(*) El principiante que al calcular la suma 3,81737, . . . de los 100 primeros términos de la serie armónica crea poder asegurar siquiera las cifras 3,8 de la suma total de la serie en vista de que los términos siguientes son inferiores a 0,01 cometerá craso error, pues esta serie es divergente.

La afirmación tan frecuente en libros técnicos, de que el error de una aproximación es *despreciable* por ser del orden del primer término que sigue, el cual es despreciable, es tan arbitraria y peligrosa como la anterior.

DESARROLLO EN SERIE DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL, CIRCULARES E HIPERBOLICAS

103. — La serie exponencial.

Las derivadas sucesivas de $f(x) = e^x$ son todas e^x, y para $x = 0$ toman el valor 1, luego el desarrollo en serie de Mac-Laurin es:

$$[1] \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

¿Para qué valores es válido? La serie converge para todo x; luego el término general tiende a 0; y como el término complementario, según (100), sólo difiere de él en el factor e^ξ, resulta que este desarrollo es válido para todo valor de x. En particular, para $x = 1$, tenemos la serie ya estudiada en la lección 11, con la cual se calcula el número e con cuantas cifras decimales se quiera.

La función $a^x = (e^{la})^x = e^{x \cdot la}$ se reduce a la exponencial natural, sustituyendo x por $x \cdot la$.

104. — Desarrollos de sen x y cos x.

Derivando sucesivamente la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, resulta:

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$,
$f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{v}(x) = \cos x$, ...

y para $x = 0$ toman los valores:

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{iv}(0) = 0$, ...

luego el desarrollo en serie es:

$$[2] \qquad \operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots \pm \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \mp \cdots$$

Análogamente para el coseno, basta rebajar en 1 los índices de las derivadas y resultan los valores:

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{iv}(0) = 1$, ...

con los cuales se forma la serie siguiente, que solo contiene las potencias pares de x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \pm \frac{x^{2k}}{(2k)!} \mp \dots$$

Como el término complementario sólo difiere del término general en un factor sen ξ o cos ξ, tiende a 0 para todo valor de x.

Luego ambos desarrollos son válidos para todo valor de x. Sin embargo sólo son útiles para valores menores que un octante, lo cual es suficiente.

Es sabido que sen x es función *impar*, es decir, cambia de signo al cambiar x, y cos x es función *par*, que toma valores iguales para x y $-x$; *estas propiedades aparecen claramente en los desarrollos* [2] y [3].

También se observa que la serie del cos x resulta derivando *término a término la serie del sen* x, *de acuerdo con* (101).

105. — Funciones hiperbólicas.

Con frecuencia se presentan series de potencias, que sólo difieren de las series del sen x y del cos x en tener positivos todos los coeficientes. Estas nuevas funciones se llaman *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico*, y se representan así:

[4] $$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

[5] $$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Inmediatamente resulta de esta definición:

[6] $$\operatorname{sh} 0 = 0 \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$

[7] $$\operatorname{ch} 0 = 1 \qquad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$$

relaciones que son análogas a las del sen x y cos x.

Comparemos estas series con las exponenciales e^x y e^{-x}

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \pm \frac{x^n}{n!} \mp \dots$$

y resulta la descomposición

[8] $$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \quad ; \quad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$$

sumando y restando ambas igualdades, resultan éstas:

[9] $\text{ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

y multiplicándolas se obtiene la relación fundamental:

[10] $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$

Todas las propiedades de las funciones hiperbólicas resultan fácilmente sustituyéndolas por las expresiones [9], que también pueden *adoptarse como definición.*

Las relaciones fundamentales son:

[11] $\text{sh}(x + y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y + \text{ch} x\, \text{sh}\, y$

[12] $\text{sh}(x - y) = \text{sh}\, x\, \text{ch}\, y - \text{ch}\, x\, \text{sh}\, y$

[13] $\text{ch}(x + y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y + \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$

[14] $\text{ch}(x - y) = \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y - \text{sh}\, x\, \text{sh}\, y$

relaciones muy análogas a las de Trigonometría circular, y más si*métricas que ellas, pues hay correspondencia en los signos.*

Haciendo $x = y$, resultan las fórmulas de duplicación:

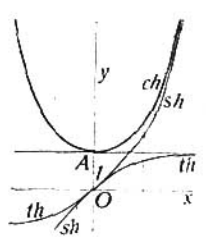
[15] $\text{sh}\, 2x = 2\text{sh}\, x \,.\, \text{ch}\, x$

[16] $\text{ch}\, 2x = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x = 2\text{ch}^2 x - 1 = 2\text{sh}^2 x + 1$

de donde se despejan estas fórmulas útiles:

[17] $\text{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\text{ch} 2x + 1)$

[18] $\text{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\text{ch} 2x - 1)$



Derivando sh x resulta ch x; y derivando ch x, resulta sh x. Las derivadas sucesivas son: sh x, ch x, sh x, ch x, ...

La tangente hiperbólica se define:

$$\text{th}\, x = \text{sh}\, x / \text{ch}\, x$$

y su derivada es $1/\text{ch}^2 x$.

EJERCICIOS

1. — *Demostrar para las funciones hiperbólicas las fórmulas correspondientes a las conocidas para las circulares: expresión de sh^2x, ch^2x mediante el arco doble, transformación de sumas y diferencias en productos, etc.*

2. — *¿Qué curva representan las ecuaciones paramétricas $x = cht$, $y = sht$? Establézcanse analogías con la representación geométrica de las funciones circulares.*

LECCIÓN 26

SERIES LOGARITMICA, BINOMICA Y CIRCULARES INVERSAS

106. — Desarrollos en serie mediante la serie derivada.

Aunque la serie de Mac-Laurin permite desarrollar todas las funciones elementales, al examinar el término complementario para determinar el intervalo de convergencia surgen dificultades, para evitar las cuales vamos a seguir otro método, que consiste en efectuar el desarrollo de la función derivada (cuando es *más sencilla* que la función dada) y de este desarrollo pasar al de la función propuesta (que también se llama función *primitiva*) como se ha explicado en (101).

Obtenida una serie primitiva y sumándole una constante arbitraria, *se tienen todas las series primitivas*, y todas tienen el mismo intervalo de convergencia que la sere derivada.

Las funciones log $(1+x)$, arc sen x, arc tg x tienen derivadas algebraicas, fácilmente desarrollables en serie y de este desarrollo se pasa al de aquéllas formando la serie primitiva y determinando la constante. En los párrafos siguientes puede verse el modo de proceder.

107. — Desarrollo en serie de la función l (1 + x)

La función lx no es desarrollable en serie de potencias, por no ser finita para $x=0$, condición que cumplen todas las series enteras; pero la función $l(1+x)$ se desarrolla fácilmente mediante la derivada cuyo desarrollo [3] ha sido obtenido en (99).

[1] $y' = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm x^n \mp \ldots$

serie cuyo radio de convergencia es $R=1$. Integrando, o sea tomando funciones primitivas de ambos miembros, resulta:

[2] $$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + C \; ;$$

y como para $x=0$ la función vale $l1 = 0$, y el segundo miembro se reduce a C, debe ser $C=0$. Resulta, pues, este desarrollo:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots\ldots$$

Nota. — Para $x = 1$ la serie del segundo miembro es alternada convergente y aunque la demostración dada de [2] nada dice sobre ese punto, se puede demosrtar (V. *Teoría de funciones*) que el desarrollo es válido en ese extremo $x = 1$, resultando el desarrollo

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots. \qquad [3]$$

inservible prácticamente, por su lenta convergencia.

108. — Transformación de la serie logarítmica.

La serie logarítmica converge tan lentamente que no es aplicable al cálculo de logaritmos. De ella se deducen estas series más útiles, que exponemos a continuación:

Cambiando x por $-x$ en la serie

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

resulta:

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots. \qquad [4]$$

y restando,

$$\tfrac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots. \qquad [5]$$

Aplicación técnica. — En los cálculos de la flexión de vigas curvas de sección rectangular interviene en vez de la sección rectangular $b.h$ el *área corregida,* cuyo valor es

$$A = Rb.l \frac{2R+h}{2R-h}$$

siendo b la base de la sección rectangular y h la altura; R es el radio de curvatura de la viga. Para simplificar el cálculo de A, basta aplicar la última formula y resulta:

$$A = bh\left[1 + \frac{h^2}{12R^2} + \frac{h^4}{80R^4} + \ldots.\right]$$

Como la razón $h : R = \lambda$ es muy pequeña, con dos términos puede obtenerse buena aproximación; es decir, basta agregar al área bh un término de corrección que resulta de multiplicarla por $\lambda^2 : 12$.

Aplicación al cálculo de tablas de logaritmos. — Si en la serie [5] hacemos el cambio de variable

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+x}{1-x}$$

es decir:

$$x = \frac{1}{2n+1}$$

resulta:

$$l(n+1) - ln = \frac{2}{2n+1} + \ldots.$$

serie que converge muy rápidamente cuando n es grande y que permite calcular $l(n+1)$ conocido $l\,n$, mediante un solo término del desarrollo.

Los logaritmos decimales se calculan fácilmente multiplicando por el módulo $M = 0{,}43429\ldots.$

Con el primer término del desarrollo es suficiente para construir las tablas usuales hasta 10000, con 7 decimales exactas.

109. — Desarrollo en serie de arc tg x.

La derivada admite desarrollo inmediato en progresión geométrica:

$$[1] \quad y' = 1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{2n} \mp \ldots$$

convergente para $|x| < 1$. Pasando a las funciones primitivas, resulta:

$$\operatorname{arctg} x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Haciendo $x = 0$, el segundo miembro se reduce a C y como entre todos los arcos que tienen la tangente 0 se elige el menor, que es 0, resulta $C = 0$.

Nota. — Para $x = 1$ la serie converge, pues resulta alternada con un término general que tiende a 0, y se puede demostrar que coincide con arc tg 1, resultando el desarrollo:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

serie llamada de Gregory o de Leibniz, cuya lenta convergencia ya observada (37), la hace inservible para el cálculo de π.

110. — Desarrollo de arc sen x y arc cos x.

La derivada de $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es:

$$y' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Esta potencia se desarrolla, como veremos en el párrafo siguiente, aplicando la misma fórmula del binomio de Newton; es decir:

$$y' = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{x^6}{2^3} + \ldots$$

y pasando a la función primitiva, resulta:

$$\operatorname{arc\,sen} x = C + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Como la función arc sen x se anula cuando el seno es $x = 0$, el valor de la constante es $C = 0$.

La serie de $\text{arc}\cos x = \frac{1}{2}\pi - \text{arc sen}\, x$, se deduce fácilmente de la anterior, restándola de $\frac{1}{2}\pi$.

111. — Serie binómica. Fórmula de Newton.

La derivada n-sima de $y = (a + x)^m$ es:

$$y^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots.\ (m-n+1)(a+x)^{m-n}$$

y la fórmula de Mac-Laurin da el desarrollo:

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \tfrac{1}{2}m(m-1)\,.\,a^{m-2}x^2 + \ldots.$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{n!}\ a^{m-n}x^n + \ldots.$$

serie cuyo radio de convergencia es a, pues la razón de un coeficiente al siguiente (en valor absoluto) es:

$$\frac{a(n+1)}{|\,m-n\,|} = \frac{a(n+1)}{n-m}$$

cuyo límite, para $n \to \infty$, es a. Faltaría ver que el término complementario tiende a 0; pero es más sencillo otro método que puede verse en las notas. Resulta, pues, un desarrollo de $(a+x)^m$, cuya ley de formación es la misma de la fórmula de Algebra elemental, pero que no es polinomio, sino *serie,* pues los factores $m - n$ no son nulos si m no es un número natural. Este desarrollo general en serie es la fórmula de Newton.

Al desarrollar la potencia de un binomio deberá cuidarse de elegir el mayor de los sumandos como primero, pues el desarrollo es divergente si $|\,x\,| > a$.

112. — Aplicaciones numéricas.

1.° Para extraer la raíz cuadrada de un número comprendido entre dos cuadrados consecutivos a^2 y $(a+1)^2$, si r es el resto, es decir: $N = a^2 + r$: como es $r \leq 2a < a^2$ desde $a > 2$, resulta la serie convergente:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{8a^3} + \ldots.$$

Tomando la raíz entera más el resto dividido por el duplo de la raíz se tiene una aproximación cuyo error, por exceso, es menor que el término siguiente (por ser alternada la serie) o sea el cuadrado del resto, dividido por $8a^3$.

2.° En el cálculo de hipotenusas se aplica con frecuencia la fórmula de Newton

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \ldots.$$

Aproximación suficiente casi siempre en el cálculo de oblicuas (anchura de tejados, corrección de lecturas en mira oblicua, etc.) es la siguiente:

La hipotenusa difiere del cateto mayor en el cuadrado del cateto menor dividido por el duplo del mayor.

Así, un tejado de caída 1 *m* en 5 *m* tiene la anchura 5,10 *m*. Si la caída es 0,50 en 4 *m* hay que sumar a este ancho $\frac{1}{8}$ 0,25 = 0,03 *m*. Total: 4,03.

3.° He aquí algunas fórmulas aproximadas de uso frecuente:

$$(1 + x)^m \sim 1 + mx$$

siendo m cualquiera y $x < 1$. De ella resultan inmediatamente:

$$\frac{1 + x}{1 + y} \sim 1 + x - y$$

$$\frac{(1 + x)^m}{(1 + y)^n} \sim 1 + mx - ny$$

Ejemplo de cálculo rápido:

$$\frac{(100{,}2)^2 . 9{,}89^3}{(100{,}3)^5 . 20} = \frac{10^4 (1 + 0{,}002)^2 . (1 - 0{,}011)^3 . 10^3}{10^{10} . (1 + 0{,}003)^5 . 2}$$

$$\sim \tfrac{1}{2}\, 10^{-4} (1 + 0{,}004 - 0{,}033 - 0{,}015) = 0{,}0000478$$

Notas. — Para estudiar la función definida por la serie binómica, formemos su derivada, y fácilmente se comprueba la identidad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{a + x}$$

pero el primer miembro es la derivada de ly, y el segundo es la derivada de $l(a + x)^m$; siendo iguales las derivadas, ambas funciones ly, $l(a + x)^m$ solo difieren en una constante; y como para $x = 0$ vale $y = a^m$, la constante es 0, siendo por tanto

$$ly = l(a + x)^m \qquad \text{es decir:} \qquad y = (a + x)^m$$

La serie coincide, pues, con $(a + x)^m$, para todo valor de x inferior a a en valor absoluto. Para valores exteriores al intervalo de convergencia la función $(a + x)^m$ está definida, pero la serie carece de valor numérico.

EJERCICIOS

1. — Si la longitud de un segmento situado a altura h es l, su longitud l' referida al nivel del mar es $l' = lR : (R + h)$. Deducir una fórmula práctica, y acotar el error.

2. — Desarrollar en serie de potencias de h/l la longitud del arco de circunferencia de cuerda $2l$ y flecha h.

LECCIÓN 27

SERIES DE VARIABLE COMPLEJA

113. — Límites y derivadas.

Casi todos los resultados de este capítulo son aplicables a variables complejas $z = x + iy$, aclarándose y simplificándose en este *campo más amplio muchos resultados, inexplicables en el campo* real.

Las definiciones de límite, de infinitésimo, etc., son válidas para *variables complejas, entendiendo que el valor absoluto es el módulo;* las reglas de cálculo de límites son igualmente aplicables; pero al llegar a las derivadas surgen algunas novedades.

En la definición de derivadas hemos insistido en que el límite del cociente $\Delta y : \Delta x$ debe ser único, tanto si Δx es positivo como negativo, es decir, lo mismo si el nuevo valor de x tiende al valor x_0 por la derecha o por la izquierda. En el campo complejo, hay no *dos,* sino *infinitos* caminos para tender a un punto z_0, y es preciso que el cociente de incrementos $\Delta w : \Delta z$ tenga el mismo límite para $\Delta z \to 0$, cualquiera que sea el argumento o dirección de Δz; cuando tal sucede, ese límite único w' se llama *derivada* de la función w en el punto z_0.

Sea, por ejemplo, la función $w = z^2$; el mismo cálculo hecho *para variables reales sirve aquí:*

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z . \Delta z + (\Delta z)^2$$

y como el cociente $\Delta w : \Delta z$ se compone del sumando fijo $2z$ y el sumando infinitésimo Δz, tiene como límite $2z$ para $\Delta z \to 0$.

Por tanto: la derivada de z^2 es $2z$.

Análogamente: la derivada de z^n es nz^{n-1} (n natural).

DEFINICIÓN. — Las funciones que para cada punto z de una cierta región tienen derivada ,se llaman *analíticas.*

Son analíticas todas las funciones elementales y también las compuestas con ellas, pues las reglas de derivación de sumas, diferencias, productos, cocientes, funciones de función, etc., conservan su validez en el campo complejo, como se observa repasando sus demostraciones.

114. — Series numéricas de términos complejos.

La serie de términos complejos:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots.$$

se dice *convergente cuando la suma de los n primeros términos*: $S_n = A_n + iB_n$ tiene un límite $A + iB$; es decir: cuando $A_n \to A$, $B_n \to B$, *o sea: cuando son convergentes las dos series componentes*:

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_n + \ldots. = A$$
$$b_1 + b_2 + \ldots. + b_n + \ldots. = B\ .$$

EJEMPLO. — Es convergente la serie:

$$(a + ib) + (a^2 + ib^2) + \ldots + (a^n + ib^n) + \ldots.$$

y su suma, si $|a| < 1$, $|b| < 1$, es:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{bi}{1-b}$$

El criterio de Dirichlet es aplicable: *si la serie de valores absolutos converge, también converge la serie dada y su suma es menor.*

En efecto, si converge la serie de términos positivos:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots. + r_n + \ldots.$$

formada por los módulos $r_n = |a_n + ib_n|$; como r_n es la hipotenusa y los catetos son a_n y b_n, se verifica: $|a_n| < r_n$, $|b_n| < r_n$; luego son convergentes las series de $|a_n|$ y de $|b_n|$ que tienen sus términos menores que los de ésta; y por el teorema ya demostrado de Dirichlet, convergen absolutamente las series A y B.

Como se puede alterar el orden en ellas sin cambiar sus sumas A y B, resulta: *una serie absolutamente convergente de términos complejos tiene la propiedad conmutativa.*

115. — Series potenciales de variable compleja.

La demostración dada en (97) para calcular el radio de convergencia subsiste íntegramente. Por tanto: si es R el límite del cociente de un coeficiente por el siguiente en valor absoluto, la serie converge absolutamente para todo valor $|z| < R$; y no converge para $|z| > R$.

Resulta, pues, que *el campo de convergencia es el interior del círculo de centro 0 y radio R.*

Resulta, pues, que si en las series ya estudiadas de tipo $R = \infty$ (exponencial, seno y coseno circulares e hiperbólicos) damos a x valores complejos z, la serie converge para todo z del plano. Quedan así generalizadas estas funciones, mediante las series:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots.$$

y análogamente las hiperbólicas. ¿Qué quiere decir, por ejemplo, sen i? Carece de sentido geométrico hablar de un *arco imaginario;* pero la serie tiene un valor numérico, que es, por definición, el seno propuesto.

Pongamos, por ejemplo, $z = iy$; la serie exponencial se descompone en dos, que son: cos y la parte real, y sen y la imaginaria; luego resulta esta igualdad:

$$e^{iy} = \cos y + i \text{ sen } y$$

análogamente:

$$e^{-iy} = \cos y - i \text{ sen } y$$

Sumando y restando, salen las *fórmulas de Euler:*

$$\cos y = \tfrac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

$$\text{sen } y = \tfrac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy}) : i$$

que expresan las funciones circulares reales mediante exponenciales imaginarias. Resulta así, que la exponencial (o el logaritmo) es la única función *simple,* con la que se componen todas las elementales.

Como la regla de derivación término a término es legítima (omitimos la demostración), resulta que toda serie de potencias con coeficientes arbitrarios y radio $R > 0$, define una función analítica.

Mediante series de potencias podemos, pues, definir innumerables nuevas funciones de variable z; y así se tienen todas las funciones posibles, en virtud del famoso teorema de Cauchy, uno de los más capitales descubrimientos matemáticos de todos los siglos:

Si una función $w = f(z)$ tiene derivada finita en un entorno del origen, admite infinitas derivadas y es desarrollable en serie de potencias por la fórmula de Mac-Laurin; siendo el desarrollo válido en el máximo círculo de centro O que no contiene puntos singulares.

No es fácil caracterizar con generalidad los puntos *singulares;* para las funciones elementales basta este criterio: son aquellos en que no toma valor finito y determinado.

Dada, pues, una función, puede afirmarse inmediatamente cuál será el campo de validez de su desarrollo en serie, cuyo radio es la distancia desde O al punto singular más próximo.

EJEMPLO. — Que el desarrollo de $1:(1-z)$ tenga radio 1 se explica por hacerse infinita la función para $z = 1$; pero ¿cómo se explica que el radio del desarrollo de $1:(1+z^2)$ tenga radio 1, a pesar de ser finita para $z = 1$ y para $z = -1$?

La explicación, imposible en el campo real, es inmediata en el campo complejo. Basta observar que los puntos $\pm i$ son singulares y el círculo de convergencia no puede contenerlos; esas singularidades complejas repercuten en el eje real, limitando sobre él el intervalo de convergencia $(-1, +1)$.

NOTA. — Compárese la sencillez y generalidad de este teorema con las restricciones de los desarrollos en serie en el campo real; en éste, no es suficiente la existencia de derivadas de todos órdenes, ni aun siquiera basta la convergencia de la serie de Mac-Laurin, pues puede dar una función distinta de la $f(x)$; el único criterio seguro es el examen del término complementario y *éste no siempre es fácil y en cada caso exige análisis especial.*

En cambio, basta la *existencia* de primera derivada en el campo complejo, para asegurar la existencia de infinitas derivadas y la validez del desarrollo en serie.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que la exponencial compleja tiene también la propiedad $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.

2. — Demostrar que el logaritmo de un número de módulo r y argumento α es $lz = lr + i(\alpha + 2k\pi)$.

3. — Desarrollar en serie, por división, las funciones

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 2} \qquad \frac{z-1}{z^3 + 3z^2 + z + 3}$$

y determinar sus radios de convergencia.

(Basta determinar la menor de las raíces del denominador, en valor absoluto). Soluciones: $R = \sqrt{2}$, $R = 1$.

Lección 28

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

116. — Representación geométrica de las funciones complejas.

Cada valor $z = x + iy$, está representado por el punto del plano, cuyas coordenadas son (x, y); para representar a la función de z, que llamaremos $w = u + iv$, se adopta otro plano, de ejes u, v (que a veces conviene tomar coincidentes con los x, y); cada función $w = f(z)$ está representada por una correspondencia entre los puntos de los planos z y w.

Para hacer visible tal correspondencia suele dibujarse un reticulado de líneas; por ejemplo, a las rectas $x =$ const., corresponden curvas dadas paramétricamente así:

$$u = u(c, y) \qquad v = v(c, y)$$

y análogamente para las rectas $y =$ const.

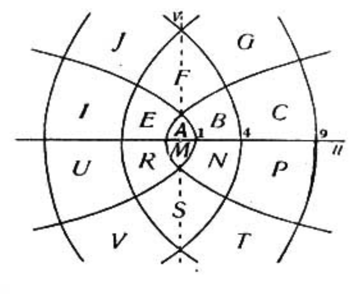
A las rectas $u = c$ del plano w corresponden las curvas de ecuaciones: $u(x, y) = c$; y a las rectas $v = c$, las curvas: $v(x, y) = c$.

Ejemplo. — Sea $\qquad w = z^2 = (x + iy)^2$

de donde: $\qquad u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy.$

W''	V''	U''	I'	J'	K'
T''	S''	R''	E'	F'	G'
P''	N''	M''	A'	B'	C'
C''	B''	A''	M'	N'	P'
G''	F''	E''	R'	S'	T'
K''	J''	I''	U'	V'	W'

(Ejes: y, x, O; marcas -3, -2, -1, 1, 2, 3)



A las rectas $x = c$ corresponden las curvas

$$u = c^2 - y^2 \quad , \quad v = 2cy$$

o sea eliminando el parámetro y, las parábolas:

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

Análogamente, a las rectas $y = c$, corresponden las curvas

$$u = x^2 - c^2 \quad , \quad v = 2xc$$

o sea, eliminando el parámetro x, las parábolas

$$v^2 = 4c^2(c^2 + u)$$

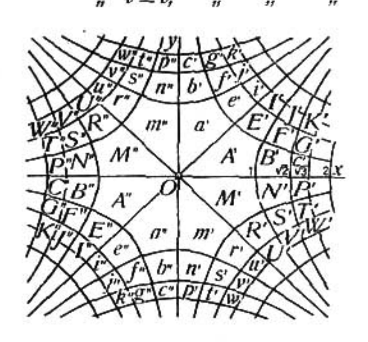
El parámetro de estas parábolas es $p = \pm 2c^2$; y como la abscisa del vértice es precisamente $\pm c^2$, *resulta que todas ellas tienen O como foco, es* decir, son *homofocales*.

En Analítica se demuestra que deben cortarse perpendicularmente; esto mismo resultará en seguida de modo inmediato.

Veamos ahora las curvas homólogas de las rectas $u = c$, $v = c$.

Para $u = c$, resultan las hipérbolas $x^2 - y^2 = c$.

" $v = c$, " " " $2xy = c$.



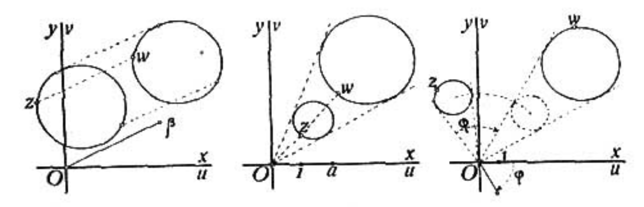
			v		
k	j	i	I	J	K
g	f	e	E	F	G
c	b	a	A	B	C
p	n	m O	M	N	P
t	s	r	R	S	T
w	v	u	U	V	W

117. — Representación de la función lineal.

Veamos el significado geométrico de las funciones más sencillas, cuando los dos planos z y w se toman coincidentes.

Función $w = z + \beta$. Representa una *traslación*, pues a cada punto z se le aplica el vector β para obtener el w.

Función $w = az$. Si a es real, el argumento de u es igual que el de z, y el módulo queda multiplicado por a, luego la transformación es una *homotecia* de centro 0 y razón a.



Sea $w = \alpha z$ donde α es un complejo de módulo a y argumento φ; el módulo de z hay que multiplicarlo por a, pero al argumento hay que sumarle φ; luego la transformación se compone de una homotecia de razón a y un giro de ángulo φ.

Función $w = \alpha z + \beta$. Como se compone de una homotecia, un giro y una traslación, transforma cada figura en otra semejante.

Recíprocamente, como la semejanza entre dos figuras está determinada por dos pares (z_1, z_2) y (u_1, u_2) de puntos homólogos, y con ellos se calculan inmediatamente los coeficientes α, β resulta que *la función lineal entera representa todas las semejanzas entre los planos z y w.*

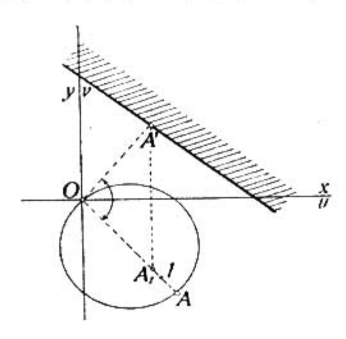
Pasemos ahora a estudiar las funciones fraccionarias, comenzando por la más sencilla:

Función $w = 1 : z$. Poniendo $z = x + iy$ resulta para w:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2} .$$

de donde resulta: la circunferencia del plano w, cuya ecuación es:

$$a(u^2 + v^2) + bu + cv + d = 0$$



se transforma en esta otra del plano z:

$$d(x^2 + y^2) + bx + cy + a = 0$$

Si la primera pasa por el origen, es $d = 0$ y la segunda se reduce a recta; si la primera se reduce a recta, es $a = 0$ y la segunda pasa por el origen.

Si convenimos en decir que al punto $z = 0$ corresponde el punto $w = \infty$; y al punto $z = \infty$ el punto $w = 0$, y convenimos en incluir a las rectas entre las circunferencias, resulta: la función $1:z$ *transforma las circunferencias en circunferencias.*

Siendo $|w| = 1:|z|$, Arg $w = -$ Arg z, resulta:

La transformación efectuada por la función $w = 1/z$ se compone de la inversión respecto del origen, y de la simetría respecto del eje real.

Función $w = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$

Podemos suponer $\gamma = 1$, dividiendo previamente por él, y después de sacar el cociente entero α, queda la fracción:

$$\frac{\beta - \alpha\delta}{z + \delta} = \frac{\Delta}{z + \delta}$$

llamando Δ al numerador. De la variable z se pasa a la w mediante las operaciones siguientes:

Se suma δ; se toma el recíproco; se multiplica por Δ; se suma α.

Como todas ellas transforman las circunferencias en circunferencias, esta misma propiedad tiene la función lineal; entendiendo que al punto $z = -\delta$ corresponde $w = \infty$; y al punto $z = \infty$ el $w = \alpha$.

NOTA: La función lineal *entera*, esto es, la del tipo $w = \alpha z + \beta$, conserva los ángulos de las curvas homólogas, puesto que la transformación es una *semejanza*.

En Geometría elemental se demuestra que también conserva los ángulos la inversión o transformación por radios recíprocos, pero cambiando su sentido; luego la función $1/z$, que significa una inversión y una simetría, conserva los ángulos en valor absoluto y signo; igual propiedad tiene, por consiguiente, la función lineal general, por componerse mediante las funciones anteriores.

No dedicamos, sin embargo, mayor atención a esta importante propiedad, porque en los próximos párrafos aparecerá como consecuencia inmediata del hecho esencial de ser función *derivable*, sin necesidad de apoyarnos en las citadas propiedades geométricas, especiales de la función lineal.

EJEMPLO: Para transformar en el círculo de radio 1 el semiplano $x < 1$, basta fijar sobre los contornos tres pares de puntos correspondientes, resolviendo las tres ecuaciones a que deben satisfacer los coeficientes α, β, γ, δ, las cuales determinan éstos, o mejor dicho las razones de tres de ellos al cuarto.

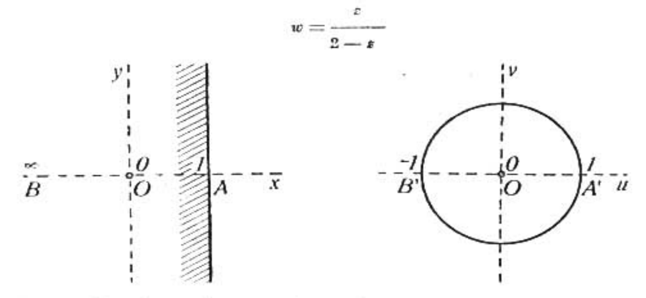
Este problema no tiene tanto interés como el siguiente: *transformar el semiplano en círculo de modo que se correspondan dos puntos interiores y dos puntos de contorno.* Sean los orígenes $z = 0$, $w = 0$ los puntos interiores homólogos, y los puntos de contorno los $z = 1$, $w = 1$. Al eje x, recta que pasa por 0 y es perpendicular al contorno del semiplano, debe corresponder la recta o circunferencia que pasa por 0 y sea perpendicular al contorno del círculo, es decir, debe ser precisamente el eje real u; al punto del infinito del plano z

debe corresponder, por tanto, el punto $w = -1$. Tenemos, pues, con el convenio del punto ∞ (117), tres pares de puntos homólogos:

$$z = 0 \quad , \quad z = 1 \quad , \quad z = \infty$$
$$w = 0 \quad , \quad w = 1 \quad , \quad w = -1$$

La primera condición exige que sea $\beta = 0$; la tercera exige $\alpha = -\gamma$, pudiendo tomarse $\alpha = 1$, $\gamma = -1$; la segunda determina $\delta = 2$; por consiguiente, la función que transforma el semiplano en el círculo de radio 1 es:

$$w = \frac{z}{2 - z}$$



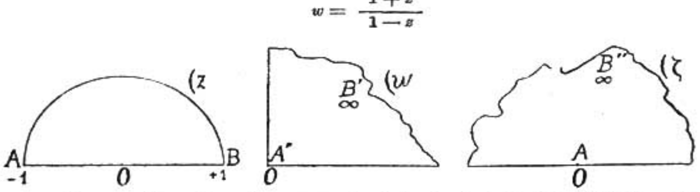
118. — Funciones de segundo grado.

La función $w = z^2$ eleva al cuadrado el módulo y duplica el argumento; por tanto, un ángulo cualquiera de vértice O en el plano z se transforma en un ángulo doble en el plano w; un cuadrante se transforma en semiplano.

Esta función, aplicada convenientemente en combinación con la lineal, permite convertir en semiplanos los recintos compuestos de dos arcos de circunferencia perpendiculares.

Sea el semicírculo de la figura. Comenzaremos por trasformar un vértice en el origen y el otro en el punto ∞; para ello basta poner:

$$w = \frac{1 + z}{1 - z}$$



Al segmento -1, $+1$ corresponde el 0, $+\infty$; a la circunferencia, que pasa por A y B, corresponde la que pasa por 0 e ∞, es decir, una recta; y como forma con AB un ángulo $+90°$, le corresponde el semieje $+y$.

Para transformar el ángulo en semiplano, basta elevar al cuadrado.

119. — Funciones analíticas y representación conforme.

Sea $w_0 = f(z_0)$ y sea la derivada $w'_0 = f'(z_0) \neq 0$, es decir, con argumento bien definido φ. Por definición:

$$w'_0 = \text{lím.}\ (\Delta w : \Delta z) \qquad \text{para } \Delta z \to 0$$

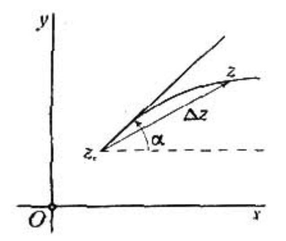
Si un punto tiende hacia otro distinto de 0, su argumento tiende al de ese otro punto, luego:

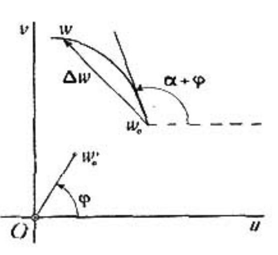
$$\arg \Delta w - \arg \Delta z \to \varphi$$

si el punto $z \to z_0$, siguiendo una curva de argumento α, es decir, si $\arg \Delta z \to \alpha$, resulta:

$$\arg \Delta w \to \alpha + \varphi$$

es decir, el punto homólogo describe una curva cuya tangente en w_0 tiene el argumento $\alpha + \varphi$. El haz de tangentes en w_0 a las curvas *homólogas de las trazadas por* z_0, *es igual a él, pero ha girado un* ángulo φ, argumento de la derivada. Por tanto, el ángulo que forman dos curvas por z_0 es igual en magnitud y en signo al que forman sus transformadas; la correspondencia entre ambos planos se llama *conforme*.





EJEMPLO. — En la correspondencia $w = z^2$ son rectos los ángulos que forman en cada plano las curvas homólogas de las rectas paralelas a los ejes en el otro plano.

Consideremos el punto $z = 1 + i$; su homólogo es $w = 2i$; la derivada vale en él $2(1 + i)$, cuyo argumento es $\pi : 4$; luego el haz de tangentes a las curvas homólogas de las trazadas por aquel punto se deduce de él girando 45° en sentido positivo.

DEFINICIÓN. — Las funciones que admiten derivada finita en cada punto de un cierto recinto, se llaman *analíticas*.

120. — Teorema fundamental de la representación conforme.

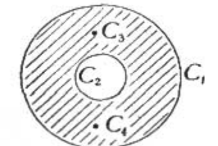
Hemos visto cómo, mediante funciones sencillas, se logra transformar en círculo recintos de formas muy variadas, siendo la representación conforme, por ser analíticas tales funciones. Se comprende que utilizando series de potencias se logrará la transformación sobre el círculo de recintos mucho más complicados.

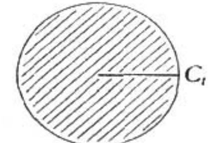
El concepto de *recinto* es muy amplio. Es recinto el conjunto de puntos interiores a una elipse, a un polígono, a una curva cerrada sin puntos dobles, etc.; pero se puede dar esta definición mucho más general, que no presupone el difícil concepto de curva: *Recinto es un conjunto de puntos tales que cada uno tiene un entorno perteneciente al mismo.* Tales puntos se llaman *interiores* y se llaman puntos de *contorno* los puntos tales que en todo entorno suyo hay puntos del recinto y puntos que no pertenecen a él.

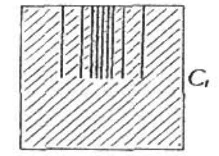
Los puntos de contorno pueden formar conjuntos muy complicados; se dice que hay más de un contorno, cuando los puntos de contorno forman dos o más conjuntos tales que la distancia entre dos puntos cualesquiera, uno de cada uno, es superior a un número positivo. Por ejemplo, un anillo circular tiene dos contornos y si de ese anillo se suprimen dos puntos interiores resulta un recinto de cuatro contornos, pues cada uno de estos puntos forma un contorno.

En cambio, si en un círculo se efectúa un corte a lo largo de un radio, el círculo así cortado es un recinto de un solo contorno.

También tiene un solo contorno el recinto formado cortando el cuadrado según infinitos segmentos cuyas distancias forman una progresión de razón 1/2; algunos de estos cortes están dibujados en la figura.







Los recintos de un solo contorno se llaman *simplemente conexos;* también los llamaremos *dominios,* representándolos por la letra D.

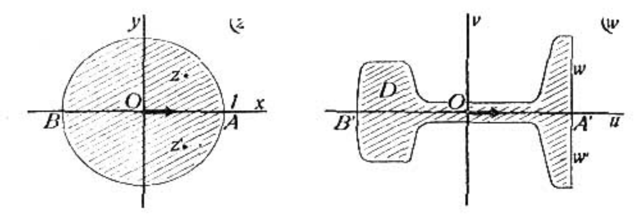
El famoso *teorema de* RIEMANN, fundamento de la teoría de la representación conforme, expresa:

Si D es un recinto simplemente conexo al cual es interior el origen del plano w y C el círculo de radio 1 cuyo centro es el origen del plano z, existe una función y solo una, definida por una serie

[1] $$w = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\dots (a_1 \text{ real positivo})$$

convergente en el círculo C, que lo transforma en el recinto D, haciendo corresponder los orígenes de ambos planos y siendo la correspondencia biunívoca y conforme en todos los puntos interiores.

Obsérvese el amplísimo alcance de este teorema, uno de los más importantes del Análisis. Por complicado que sea el recinto, existe una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \dots\dots$ (el primero de los cuales puede elegirse real positivo) tales que la serie converge en todo el círculo y lo transforma en el interior del recinto. Como hay problemas capitales en Mecánica de flúidos, en Electrotécnica, etc., cuya solución sobre el círculo es sencilla, la transformación conforme de un recinto cualquiera en círculo permite resolver el problema para todo recinto simplemente conexo; aquí radica la importancia de la representación conforme para la Física.



121. — Representación conforme de recintos simétricos.

Recintos con simetría axial. — Si todos los coeficientes a_n son reales, a valores conjugados de z corresponden valores conjugados de w, es decir puntos simétricos del eje x corresponden puntos simétricos respecto del eje u; y como el círculo es simétrico respecto del eje x, resulta: *el recinto D es simétrico respecto del eje u.*

Recíprocamente: dado un recinto D simétrico respecto del eje u, si en la serie [1] que la representa sobre el círculo sustituimos cada coeficiente a_n por su conjugado a'_n, resulta la nueva serie

[2] $$u_1 = a'_1 z + a'_2 z^2 + a'_3 z^3 + \ldots\ldots (a'_1 = a_1)$$

que hace corresponder al punto $z' = x - iy$ el $w' = u - iv$, pues las potencias de números conjugados son conjugadas y las series de términos conjugados lo son también.

Como el círculo y el recinto son simétricos, resulta pues que la serie [2] transforma C en D, y como por el teorema de Riemann no puede haber más que una sóla serie que transforme el círculo en el recinto, deben ser iguales los coeficientes de ambas, es decir:

$$a'_n = a_n \qquad \text{o sea: } a_n \textit{ real.}$$

La representación conforme sobre el círculo de recintos con un eje de simetría, se simplifica notablemente gracias a esta propiedad, pues la determinación de los coeficientes reales es mucho más sencilla que la de los complejos, cada uno de los cuales encierra dos valores reales.

Simetría central. — Se dice que una figura tiene *simetría central de orden n* cuando al girar en torno del centro un ángulo igual a la n-sima parte de una vuelta, la figura coincide consigo misma.

La simetría central de orden 2 es la única estudiada en Geometría elemental bajo el nombre de simetría central. En el campo complejo la rotación de media vuelta equivale a la multiplicación de la variable por -1.

Si la serie [1] tiene nulos los coeficientes de orden par, es decir, si es del tipo

[3] $$w = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots\ldots$$

al cambiar z por $-z$ resulta $-w$, es decir: a puntos simétricos respecto del origen en el plano z corresponden puntos simétricos en el plano w; luego el *recinto D es simétrico respecto del origen.*

Recíprocamente, dado un recinto D simétrico respecto del origen, si la serie que lo transforma sobre el círculo es [1] y formamos la nueva serie

$$w_1 = a_1 z - a_2 z^2 + a_3 z^3 - \ldots\ldots$$

al valor $-z$ corresponde el $-w$, opuesto al dado por [1] y como el círculo y el recinto son simétricos respecto de sus orígenes, esta serie transforma uno en otro; pero el teorema de Riemann exige la identidad de ambas series, siendo por tanto

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots = 0$$

La representación conforme sobre el círculo de recintos con centro de simetría de orden 2 se reduce, pues, a la determinación de los coeficientes $a_1, a_3, a_5, \ldots$, que en general serán complejos; pero si además hay simetría axial, como acontece en el rectángulo, rombo, elipse, ... todos los coeficientes serán reales.

Finalmente, el mismo razonamiento anterior conduce a este resultado: la serie correspondiente a un recinto que tiene el origen como centro de simetría n-aria, es del tipo:

[4] $$w = a_1 z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots\ldots$$

cuyos coeficientes serán reales si además existe simetría respecto del eje x.

En la práctica suele adoptarse como variable independiente la del plano del recinto D y entonces la serie que resulta despejando z de [1] por el método de coeficientes indeterminados, y permutando las letras z y w, será del tipo:

[5] $$w = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\ldots \quad (c_1 = 1/a_1)$$

subsistiendo todas las conclusiones relativas a los casos de simetría, con la sola complicación de que su círculo de convergencia puede no contener todo el recinto D. Así, por ej. si se desarrolla en serie la función

$$\frac{z}{2-z} = \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \ldots\ldots$$

que transforma el semiplano $x < 1$ en el círculo de radio 1 como hemos visto en (117), su radio de convergencia es 2, no cubriendo su círculo de convergencia más que una parte del semiplano.

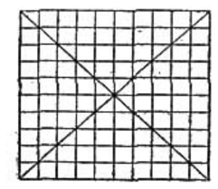
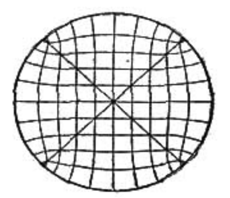
Esta dificultad, que se vence en la teoría general de funciones mediante el proceso que se llama de *prolongación analítica*, no dificulta en nada el cálculo aproximado de la función $w = f(z)$, sustituyendo la serie por polinomios, los cuales tienen valor determinado para todo valor de la variable z.

Consideremos, por ej. el cuadrado de apotema 1; por tener centro de simetría de orden 4, el desarrollo será del tipo

$$w = c_1 z + c_5 z^5 + c_9 z^9 + \ldots\ldots$$

y por la simetría axial, todos estos coeficientes serán *reales*.

Como primer coeficiente se puede tomar $c_1 = 1$, simplificación que modificará el radio del círculo obtenido, el cual será $1/c_1$ en vez de 1.

EJERCICIOS

1. — Transformar el semiplano $x > 0$ en el círculo $|w| \leq 1$, mediante una función lineal.

2. — Transformar en círculo un ángulo de 60°.

CAPITULO V

INTEGRALES SIMPLES Y SUS APLICACIONES GEOMETRICAS

LECCIÓN 29

METODOS GENERALES DE INTEGRACION

122. — Definición y teorema fundamental.

Recordemos conceptos ya dados en (67) y utilizados en Lecc. 26.

Se dice que $F(x)$ es función primitiva de $f(x)$ si es $F'(x) = f(x)$; de otro modo: si es $dF(x) = f(x)dx$. La función primitiva suele llamarse también *integral indefinida*, por la razón que veremos después, y se representa así:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Este signo $\int$ representa, pues, la operación inversa de la diferenciación. Por consiguiente, los signos $\int d$, o bien $d \int$, antepuestos a cualquier función, se reducen y pueden suprimirse.

Hemos demostrado (67) que si dos funciones tienen la misma derivada, su diferencia es constante.

Resulta de aquí que obtenida una función primitiva de $f(x)$, todas las demás se obtienen sumando una constante arbitraria.

En lo sucesivo daremos siempre una sola función primitiva; las demás podrán deducirse sumando constantes.

123. — Funciones primitivas inmediatas.

Para encontrar la función primitiva de una dada es necesario recordar las derivadas de las funciones elementales, tanto de la variable independiente como de otra función cualquiera de x.

He aquí una tabla con algunas de dichas funciones y sus derivadas:

Funciones	Derivadas
$f(x)^n$	$f(x)^{n-1} . f'(x)$,
$\sqrt{f(x)}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$a^{f(x)}$	$f'(x) . a^{f(x)} . l\, a$.
$lf(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen} f(x)$	$f'(x) . \cos f(x)$.
$\cos f(x)$	$-f'(x) \operatorname{sen} f(x)$.
$\operatorname{tg} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$\operatorname{cotg} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
$\operatorname{arc\,sen} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,cos} f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Ejemplos. — **1.° Calcular la función primitiva de la función**

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Esta es del tipo 2.°, es decir, una fracción, el denominador un radical y el numerador la derivada de la cantidad sub-radical. La función primitiva es: $\sqrt{1+x^2}$.

2.° Encontrar la función primitiva de $3x^3:(x^8+1)$.

Si fuera

$$\frac{4x^3}{1+x^8} = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

la función primitiva sería: $\operatorname{arc\,tg}(x^4)$; basta multiplicar por ¾ y se tiene que la función primitiva de la dada es: ¾ $\operatorname{arc\,tg}(x^4)$.

3.° Análogamente, la función primitiva de $x:\sqrt{1-x^4}$ es: ½ $\operatorname{arc\,sen}(x^2)$, puesto que si derivamos esta última resulta la primera.

124. —Método de integración por sustitución.

Para calcular la función primitiva $\int f(x)dx$ conviene con frecuencia, introducir una variable auxiliar t, ligada con la x por una expresión $x = \alpha(t)$ elegida de tal modo que sea fácil calcular la nueva expresión

$$\int f[\alpha(t)]\,\alpha'(t)dt = \Phi(t) \qquad [1]$$

Esta función puede expresarse mediante x sustituyendo t por su valor, y es la función primitiva buscada. En efecto, por definición de integral indefinida, es

$$d\Phi(t) = f[\alpha(t)]\,\alpha'(t)dt$$

y recordando que $\alpha'(t)dt = dx$, resulta $f(x)dx$. Vemos así la ventaja de la notación adoptada para la integral que nos indica cómo debe hacerse la sustitución.

Cual sea la transformación más conveniente de la variable de integración, resulta del examen de la curva dada. Así, por ejemplo, para calcular $\int \sqrt{1 - x^2}dx$ observamos que la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ o sea $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia y sus coordenadas se expresan muy sencillamente en coordenadas polares $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; siendo t el argumento. Elegida esta nueva variable auxiliar, la diferencial $y.dx = \sqrt{1 - x^2}.dx$ se convierte en

$$-\operatorname{sen} t.\operatorname{sen} t.dt = -\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)dt$$

cuya función primitiva es $-\tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$.

125. — Integración por partes.

Recordemos la regla de diferenciación de un producto de funciones:

$$d(uv) = u.dv + v.du \qquad u.dv = d(uv) - v.du$$

Si la expresión bajo el signo integral se pone en la forma $u.dv$, vemos que es igual a la diferencial de la función conocida uv, menos otra expresión $v.du$; por tanto: la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v.du \qquad [2]$$

llamada de la integración *por partes*, reduce el cálculo de una integral al de otra que, si es más sencilla que la primera, puede condu-

cir a la solución. Podemos enunciar así esta regla de integración por partes:

La integral del producto de una función por la diferencial de otra es el producto de ambas menos la integral de la ya integrada por la diferencial de la otra.

De otro modo: *para integrar un producto se sustituye un factor por su integral y se resta la integral del producto de la función así obtenida por la diferencial del otro factor.*

La expresión diferencial que aparece bajo el signo integral es siempre de la forma $u.dv$ siendo $v = x$ y la fórmula [2] será conveniente cuando $x.f'(x)$ sea más sencilla. Tal sucede en aquellas funciones trascendentes que tienen derivada algebraica, como son: $\log x$, arc. tg x, arc. sen x.

EJEMPLOS:

$\int l\, x.dx = x.l\, x - \int x.x^{-1}\, dx = x\, l\, x - x$

$\int \text{arc sen}\, x.dx = x.\text{arc sen}\, x - \int x\, dx : \sqrt{1-x^2} = x.\text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2}$

$\int \text{arc tg}\, x.dx = x.\text{arc tg}\, x - \int x\, dx : (1+x^2) = x.\text{arc tg}\, x - \frac{1}{2} l(1+x^2)$

Integración de las funciones $x^m . e^x$.

Como aplicación del método de integración por partes vamos a estudiar estas funciones. Antes de aplicarlo hay que observar cuál de las dos partes conviene integrar primero, puesto que puede escribirse de dos modos:

$$\int x^m . e^x . dx = \int x^m . d(e^x)$$

o bien (salvo el factor $m+1$) así:

$$\int e^x\, d(x^{m+1})$$

y emprendiendo el primer camino aparecerá en la nueva integral x^{m-1} y en cambio aparecerá x^{m+1} si se emprende el segundo. Por tanto: si $m > 1$ conviene la primera transformación, mientras que es mejor la segunda si m es negativo.

Sea m entero positivo; entonces se va rebajando de unidad en unidad hasta desaparecer la potencia de x.

EJEMPLOS:

$$\int x^2\, e^x . dx = \int x^2 . d\, e^x = x^2\, e^x - 2\int e^x . x . dx$$

$$\int x . e^x\, dx = \int x . d\, e^x = x . e^x - \int e^x . dx = x . e^x - e^x .$$

y sustituyendo en la igualdad anterior queda resuelto el problema.

Si m es negativo, aplicaremos el segundo procedimiento para rebajar su valor absoluto, pero al llegar a $\int x^{-1} e^x dx$ no se puede proseguir, pues el factor x^{-1} tiene el logaritmo como función primitiva, y la expresión se complica.

EJEMPLO:

$$\int x^{-3} e^x . dx = - \tfrac{1}{2} \int e^x . dx^{-2} = - \tfrac{1}{2} e^x . x^{-2} + \tfrac{1}{2} \int x^{-2} . e^x . dx$$

$$\int x^{-2} . e^x . dx = - \int e^x . dx^{-1} = - e^x . x^{-1} + \int x^{-1} . e^x . dx$$

NOTA. — Esta integral $\int e^x x^{-1} . dx$ da origen a una función no expresable mediante las funciones elementales, la cual se llama *logaritmo integral.*

NOTAS

El método de sustitución se apoya en la correspondencia entre x y t por la expresión $x = \varphi(t)$ y solamente en el caso en que exista esta correspondencia puede aplicarse el método; de lo contrario pueden resultar absurdos.

EJEMPLO. — Sea $\int dx/1 - x$. Pongamos $t = l(1 - x)$ y la integral se transforma así: $\int - dt = - t = - l(1 - x)$

$$dt = - \frac{dx}{1 - x}$$

pero no debe olvidarse que mientras la integral propuesta tiene valor cualquiera que sea x (excepto $x = 1$) el resultado carece de sentido para $x > 1$, pues el logaritmo de $1 - x$ sería imaginario.

Al llegar a las integrales definidas deberá cuidarse mucho del intervalo de validez de la transformación.

EJERCICIOS

1. — Integrar por partes $\int \sqrt{1 - x^2} . dx$.

(Sumando y restando 1 en la nueva integral que resulta, aparece de nuevo la integral propuesta, que se despeja fácilmente).

2. — Calcular $\int e^{ax} . \cos bx . dx$, $\int e^{ax} . \operatorname{sen} bx . dx$.

(Integrando por partes cada una, resultan dos ecuaciones lineales de las que se despejan ambas).

3.—Sustituir $x = lt$ en la integral y se verá justificada tal denominación.

4. — Calcular por partes la integral de $(1 + x^2)^{-2}$.

(Escríbase el numerador $1 = (1 + x^2) - x^2$, descomponiendo en dos fracciones; la primera se integra inmediatamente, y la segunda por partes, descomponiéndola así: $x . x(1 = x^2)^{-2} . dx$).

LECCIÓN 30

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

126. — Descomposición en fracciones simples.

Si el numerador no es de grado menor que el denominador $Q(x)$, comenzaremos sacando el cociente entero, por división. La primitiva de ese polinomio es otro polinomio y basta integrar la fracción complementaria $P(x)/Q(x)$.

Suponiendo que se conozcan las raíces del denominador (cuestión árdua en general), es decir, que se logre descomponer $Q(x)$ en factores de 1.° y 2.° grado, es ya fácil descomponerla en *fracciones simples;* se llaman así las fracciones cuyos denominadores son esos factores de 1.° y 2.° grado, y los numeradores son de grado menor, es decir, constantes, o lineales.

PRIMER CASO. — Las raíces del denominador son *reales* y *simples.* La fracción se descompone en suma de fracciones de numeradores constantes, y denominadores $x - x_1$, $x - x_2$, ..., que pueden ser integradas inmediatamente, resultando logaritmos.

EJEMPLO 1. — El más sencillo es la fracción siguiente, cuya descomposición salta a la vista:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{x + 1}$$

y por tanto la primitiva es $\frac{1}{2}\, l(x - 1) - \frac{1}{2}\, l(x + 1)$, que también puede escribirse así: $\frac{1}{2}\, l\,[(x - 1) : (x + 1)]$.

EJ. 2. — Análogamente, si el denominador es $x^2 - a^2$ el coeficiente es $1/2a$.

EJ. 3. — Al tipo anterior se reduce cualquier fracción cuyo denominador de 2.° grado tenga raíces reales simples; pues aplicando el método índico de la formación del cuadrado, se transforma en el anterior tipo. Así, por ejemplo:

$$x^2 - 4x - 1 = (x - 2)^2 - 5 \quad , \quad \text{luego } a = \sqrt{5}.$$

Suponiendo numerador de 1.er grado (si éste es superior se divide previamente), transformaremos la fracción, como en este ejemplo:

$$\frac{3x + 5}{x^2 - 4x - 1} = \frac{3(x - 2) + 11}{(x - 2)^2 - 5} = \frac{3(x - 2)}{(x - 2)^2 - 5} + \frac{11}{(x - 2)^2 - 5}$$

Con el artificio de haber puesto $x - 2$ en vez de x, se ha logrado que el numerador de la 1.ª fracción sea la derivada del denominador y la integral vale por tanto $l\,[x^2 - 4x - 1]$.

La integral de la 2.ª fracción, como se ha visto en el ejemplo 2.° (cambiando x por $x - 2$), es:

$$[l(x - 2 \sqrt{5}) - l(x - 2 + \sqrt{5})]\, 11 : 2 \sqrt{5}.$$

Cálculo general de coeficientes. — Si las raíces del denominador son $x_1, \ldots, x_n$, la fórmula de Lagrange (91) da la descomposición en fracciones simples dividiendo ambos miembros por $Q(x)$. Los coeficientes son por tanto: $a_i = P(x_i) : q(x_i)$ si es $q(x) = Q(x) : (x - x_i)$. Para $x \to x_i$ resulta $q(x_i) = Q'(x_i)$, fórmula útil que puede aplicar el lector a los ejemplos anteriores. Que la descomposición es *única* fué ya demostrado en (91).

REGLA: El numerador de $x - a$ es el cociente de $P(a)$ por $q(a) = Q'(a)$.

EJ. 4. — Para encontrar la función primitiva de:

$$\frac{\tfrac{1}{2}x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{\tfrac{1}{2}x^2 + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

basta aplicar la fórmula $P(a)/q(a)$; o bien identificando resultan ecuaciones:

$$A + B + C = \tfrac{1}{2} \quad , \quad 3A + B = 0 \quad , \quad 2A - 2B - C = 1$$

de donde: $A = \tfrac{1}{4}$, $B = -\tfrac{3}{4}$, $C = 1$; luego la primitiva es:

$$\tfrac{1}{4}\, l(x - 1) - \tfrac{3}{4}\, l(x + 1) + l(x + 2)$$

SEGUNDO CASO. — *Hay raíces imaginarias simples.* El caso más sencillo, en que $Q(x)$ es de 2.° grado con raíces $a \pm bi$, es el de una fracción del tipo:

$$\frac{Mx + N}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{M(x - a)}{(x - a)^2 + b^2} + \frac{N + Ma}{(x - a)^2 + b^2}$$

poniendo $x - a$ en vez de x, a fin de que el numerador sea, salvo factor constante, derivada del denominador; resulta así como expresión de la integral, llamando $M' = (N + Ma)/b$;

$$\tfrac{1}{2} M \,.\, l\,[(x - a)^2 + b^2] + M' \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x - a}$$

Cualquiera que sea el número de raíces reales e imaginarias simples, cada dos conjugadas dan coeficientes A'_i, A_i'' conjugados y la suma de ambas fracciones es real. Queda así descompuesta $P(x)/Q(x)$ en fracciones reales de los tipos:

$$\frac{A_i}{x - x_i} \quad ; \quad \frac{M_i x + N_i}{(x - a_i)^2 + b_i^2}$$

Esta descomposición, que es *única*, como ya se ha visto, se puede obtener mejor identificando los dos polinomios que resultan de multiplicar ambos miembros por $Q(x)$, y resolviendo las n ecuaciones lineales así formadas.

EJEMPLO. — Aplíquense ambos métodos a fracciones de denominador $x(x^2 + 1)$.

TERCER CASO. — *Raíces múltiples.* Si en el denominador hay un factor $(x-a)^h$ esta raíz h-ple a origina h fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^h q(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^h} + \frac{A_1}{(x-a)^{h-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{h-1}}{x-a} + \frac{p(x)}{q(x)}$$

Multiplicando por $(x-a)^h$ y llamando $F(x) = P(x)/q(x)$ la descomposición:

$$F(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots\ldots + (x-a)^h p(x)/q(x)$$

determina, según (74) y (75) los coeficientes $A_0 = F(a)$, $A_1 = F'(a)$, $A_2 = \frac{1}{2} F''(a)$, ...

El método de coeficientes indeterminados, ya visto, es también útil; sobre todo cuando hay raíces imaginarias, es más breve que la agrupación de fracciones conjugadas obtenidas por el método anterior. Si las raíces son reales, es muy preferible el método de las derivadas.

EJEMPLO 1.° — Descompongamos:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

e identificados los numeradores en ambos miembros resulta:

$$A = 1 \quad , \quad -2A + B = 0 \quad , \quad A - B + C = 0$$

de donde $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$; luego la función primitiva es

$$l(x-1) - 2(x-1)^{-1} - \tfrac{1}{2}(x-1)^{-2}$$

Más breve es el método de las derivadas, pues en este caso es: $F(x) = x^2$, $F(1) = 1$, $F'(1) = 2$, $F''(1) = 2$.

EJ. 2.° — Separemos ante todo la parte entera 1 de la fracción

$$\frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^5 - 8x^3 + 16x} = 1 + \frac{6x^3 - 16x + 1}{x(x-2)^2(x+2)^2}$$

La descomposición en fracciones simples, será por tanto:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{(x+2)^2}$$

Calcúlense los cinco coeficientes por ambos métodos.

NOTA. — Los antiguos tratados dedicaban gran extensión a este problema, un tanto ficticio, puesto que se basa en otro, prácticamente irresoluble en general. Aunque muy abreviado ya, todavía revela este capítulo la inerte fuerza de la tradición.

Por si acaso se presentan alguna vez raíces imaginarias dobles, basta utilizar este recurso:

$$\frac{1}{(x^2+b^2)^2} = \frac{(x^2+b^2)+(b^2-x^2)}{(x^2+b^2)^2} \cdot \frac{1}{2b^2}$$

que se descompone en dos fracciones; la 1.ª tiene como primitiva arc tg x/b, salvo el coeficiente, y la 2.ª es la derivada de $\dfrac{x}{x^2+b^2}$.

EJERCICIO. — Partiendo de la derivada de $x/(x^2+b^2)^2$ aplíquese el método al caso de raíces triples; etc.

Si las raíces tienen parte real a, basta escribir $x-a$ en vez de x.

127. — Método directo de integración.

Aunque sobra con lo expuesto, veamos cómo se procedería por el método más rápido, en el caso más general posible. Descompuesto en factores el denominador, éstos son de dos tipos:

$$(x-a)^m \quad , \quad (x^2+px+q)^n \quad , \quad (p^2<4q) \qquad [1]$$

Para cada factor escribiremos una fracción simple del tipo:

$$\frac{A}{x-a} \ , \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

respectivamente, como antes se hizo. Si todas las raíces son simples, es decir, $m=1$, $n=1$ la fracción dada, una vez separada su parte entera, es suma de fracciones de este tipo, como hemos visto, y la integración se hace mediante logaritmos y arcos tangentes.

Si hay raíces múltiples agreguemos a estas fracciones simples la derivada de una sola fracción complementaria, cuyo denominador es el producto de los factores [1] con exponentes disminuídos en 1, es decir: $(x-a)^{m-1}$, $(x^2+px+q)^{n-1}$, y como numerador pondremos un polinomio de grado inferior en 1 a dicho denominador.

EJEMPLO. — Si el denominador de la fracción dada es $x^3(x^2+1)^2$, el de la fracción complementaria será $x^2(x^2+1)$ y escribiremos la descomposición:

$$\frac{\frac{1}{2}x^2+2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\,\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}$$

Esta derivada se calcula considerando el cociente como producto de tres factores y vale:

$$(3ax^2+2bx+c)x^{-2}(x^2+1)^{-1} -$$
$$-2(ax^3+bx^2+cx+d)x^{-3}(x^2+1)^{-1} -$$
$$-2(ax^3+bx^2+cx+d)x^{-1}(x^2+1)^{-2}$$

Multiplicando ambos miembros por $x^3(x^2+1)^2$, el segundo se convierte en:

$$Ax^2(x^2+1)^2 + (Bx+C)x^3(x^2+1) +$$

$$+ (3ax^2+2bx+c)x(x^2+1) - (ax^3+bx^2+cx+d)(4x^2+2)$$

cuyos siete coeficientes se identifican con los del primer miembro, y el sistema de siete ecuaciones lineales determina las siete incógnitas: A, B, C, a, b, c, d:

$$A+B=0 \quad , \quad C-a=0 \quad , \quad 2A+B-2b=0 \quad ,$$

$$C+a-3c=0 \quad , \quad A-4d=\tfrac{1}{2} \quad , \quad -c=0 \quad , \quad -2d=2$$

comenzando por las últimas, resulta sucesivamente:

$$d=-1 \ , \ c=0 \ , \ A=-7/_2 \ , \ \mathrm{B}=7/_2 \ , \quad a=0 \ , \ C=0 \ , \ b=-7/_4 \ ;$$

y la integral buscada es, por consiguiente:

$$-7/_2\, lx + 7/_4\, l(x^2+1) \quad \frac{7x^2+1}{4x^2\,(x^2+1)}$$

Nota. — Que el número de coeficientes indeterminados es precisamente igual al número de ecuaciones, resulta observando que en la fracción comple mentaria hay tantos como el grado de su denominador; y a cada factor de los que juntos con éste forman el denominador de la fracción dada, corres ponde un coeficiente indeterminado, si es de primer grado, y dos si es de segundo grado; luego el número total de coeficientes indeterminados es igual al grado del denominador, es decir, igual al número de ecuaciones.

Ahora bien: ¿siempre serán éstas compatibles? Basta ver que el determinante de coeficientes no es nulo. En efecto, si fuera nulo, el sistema homogéneo tendría solución no nula, es decir, tendríamos una descomposición de la nueva fracción cuyo numerador tiene coeficientes nulos, en suma de fracciones no nulas; pero al integrar tendríamos: suma de logaritmos y arcos tangentes, más una fracción complementaria, igual a una constante. Como la fracción es función uniforme y aquéllas no, deberían ser nulos los coeficientes de los logaritmos y arc tg., resultando la *fracción igual a una constante*, cosa imposible por tener el numerador menor grado que el denominador.

La idea de este método de integración es de Hermite; pero su demostración es mucho más complicada que la nuestra y sería inadecuada en este curso.

EJERCICIOS

Calcular la función primitiva de la fracción:

$$\frac{x^5+2x^3-5x^2+x-1}{x^2(x^3+1)^2}$$

Los coeficientes que deben resultar son:

$$A=1 \quad , \quad B=0 \quad , \quad C=-1 \quad , \quad a=-1, \quad b=0 \quad , \quad c=+1.$$

Lección 31

INTEGRACION DE FUNCIONES IRRACIONALES Y TRIGONOMETRICAS

128. —Integración de irracionales cuadráticos.

He aquí otro tipo de funciones que se integran elementalmente, a saber, aquellas de forma entera o fraccionaria en que figura una raíz cuadrada de una expresión de primero o segundo grado en x.

Si el radical que figura es $\sqrt{ax+b}$, hacemos el cambio de variable: $\sqrt{ax+b}=t$, de donde se despeja x, y la expresión se transforma en racional. Lo mismo vale para raíces de índice m.

Nota. — Si bajo el signo integral figura una o varias veces una fracción $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ elevada a m/n, basta igualar esa fracción a t^n.

Si el radical es $\sqrt{ax^2+bx+c}$ distinguiremos estos casos:

1.° $a>o$. Sacado fuera del radical el primer coeficiente queda reducido a 1 y haremos el cambio de variable: $\sqrt{x^2+bx+c}=x+t$, de donde:

$$x^2+bx+c=x^2+2tx+t^2 \qquad [1]$$

y se puede despejar racionalmente x y dx haciéndose la integral racional en t.

2.° $a<o$. Sacado el valor absoluto del coeficiente fuera del radical, queda éste reducido a: $\sqrt{-x^2+bx+c}$.

Para que la integral tenga sentido el trinomio ha de ser *positivo* en el intervalo de integración, y como es negativo para valores muy grandes de x, por ser $-x^2$ el término de mayor grado, resulta que el trinomio cambia de signo y por tanto tiene raíces reales α y β. Es decir:

$$-x^2+bx+c=-(x-\alpha)(x-\beta)$$

haremos, pues, el cambio de variable:

$$\sqrt{-(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$$

de donde:

$$-x+\beta=(x-\alpha)t^2$$

y ya se puede despejar racionalmente x.

En resumen: La idea fundamental del método consiste en poner el radical igual a una expresión tal, que al elevar al cuadrado quede la x en el primer grado y, por tanto, se pueda despejar sin radicales.

NOTA. — Cuando es $c > o$, puede seguirse este otro artificio: ponemos

$$\sqrt{bx + c - x^2} = \sqrt{c} + xt \text{ de donde:}$$

$$bx - x^2 = 2\sqrt{c}\,xt + x^2.t^2$$

$$b - x = 2t\,\sqrt{c} + x\,t^2$$

de donde se despeja x, y sustituyendo x y dx en la expresión, ha desaparecido el radical.

EJEMPLO. — Calcular:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

Pondremos:

$$\sqrt{1 + x^2} = x + t, \qquad 1 = 2xt + t^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}\, \frac{1 - t^2}{t}$$

y sustituyendo $t = \sqrt{1 + x^2} - x$ sale, puesto que

$$1/t = \sqrt{1 + x^2} + x;$$

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{1 + x^2} - l\left[\sqrt{1 + x^2} - x\right]\right]$$

NOTA. — En el ejemplo anterior será más conveniente poner

$$x = Sh\,t; \;\; dx = Ch\,t.dt; \;\; \sqrt{1 + x^2} = Ch\,t$$

y la expresión se transforma así:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int Ch^2\,t.dt = \tfrac{1}{2}\int (1 + Ch\,2t)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}Sh\,2t$$

Este método es válido para las expresiones donde figure

$\sqrt{1 + x^2}$ o bien $\sqrt{x^2 - 1}$, poniendo en este caso $x = Ch\,t$

129. — Integración de funciones trigonométricas.

Toda función racional de sen x, y cos x se reduce a racional introduciendo la variable:

$$t = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x \quad \therefore \quad x = 2 \operatorname{arc\,tg} t.$$

En efecto:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

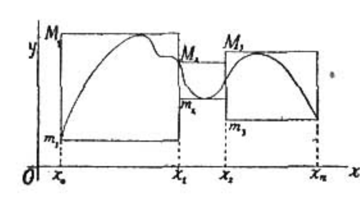
Lección 32

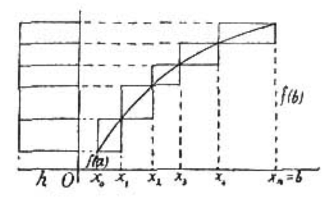
INTEGRALES DEFINIDAS

130. — El problema del área y el concepto de integral.

Tratemos de definir el área encerrada por la curva $f(x)$, el eje de abscisas y las dos ordenadas en los puntos a y b. Dividiendo el intervalo (a, b) por puntos intermedios en intervalos

$$(x_0, x_1),\ (x_1, x_2)\ (x_2, x_3) \ldots . (x_{n-1}, x_n)$$





y levantando las ordenadas de dichos puntos, tenemos dividida la superficie en fajas que podrán tener o no la misma anchura.

Si trazamos horizontales por los puntos de altura máxima y mínima de la curva en cada faja, habremos formado una serie de rectángulos. Llamaremos S_i a la suma de los rectángulos cuya ordenada es máxima:

$$S_i = (x_1 - x_0) M_1 + (x_2 - x_1) M_2 + \ldots . + (x_n - x_{n-1}) M_n.$$

y s_i a la suma de los rectángulos de ordenada mínima:

$$s_i = (x_1 - x_0) m_1 + (x_2 - x_1) m_2 + \ldots . + (x_n - x_{n-1}) m_n.$$

El área del recinto será menor que S_i y mayor que s_i. Si aumentamos el número de intervalos y por consiguiente el de fajas, en cada una disminuye la ordenada M y aumenta la m, o a lo sumo permanecen iguales, luego las s_i decrecen, Para probar la convergencia de estas sucesiones monótonas (Lecc. 3), basta ver que las diferencias $S_i - s_i$ llegan a ser arbitrariamente pequeñas.

Tal sucede si $f(x)$ es monótona, p. ej. creciente (fig. 2); pues si el mayor de los intervalos es h, transportando en columna los rectángulos que componen $S_i - s_i$, es:

$$S_i - s_i \leqq h\ [f(b) - f(a)].$$

Si aumentamos indefinidamente el número de fajas, de modo que $h \to o$, y siendo $f(b) - f(a)$ constante, la diferencia $S_i - s_i$ llega a ser tan pequeña como se quiera; lo mismo sucede para la curva total, si se descompone en un número finito de arcos crecientes o decrecientes, luego:

$$\text{lím.}\ S_i = \text{lím.}\ s_i = S.$$

Este valor límite es el que se toma como medida del **área del recinto.**

Si consideramos ahora la suma

$$\Sigma f(x)\Delta x = (x_1 - x_0) f(\xi_1) + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})\ f(\xi_n)$$

formada multiplicando cada intervalo por una ordenada cualquiera del mismo, será:

$$s_i \leqq \Sigma f(x)\Delta x \leqq S_i$$

luego también tiene Σ el mismo límite.

Este límite común de todas las Σ, entre las cuales están las S_i y las s_i, se llama integral definida de $f(x)$ y se representa así:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \text{lím.}\ \Sigma f(x)\Delta x$$

Como se ve en esta definición, la integral no es sino límite de una suma; y se presenta, no sólo en los problemas de áreas, sino también en todo límite de sumas cuyos sumandos tienden a 0 al crecer su número infinitamente. Daremos, pues, una definición general:

Integral de $f(x)$ entre a y b es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando cada uno de los intervalos parciales en que el (a, b) se divide, por uno cualquiera de los valores de la función en el mismo, al tender a 0 la amplitud de todos.

Hemos probado que toda función monótona acotada es integrable, y lo mismo si dividido (a, b) en número finito de intervalos es monótona en cada uno, aunque sea discontinua; pero hemos visto funciones continuas, como $x \cdot \operatorname{sen} \pi/x$, que no cumplen tal condición. Sin embargo., *toda función continua es integrable.* (V. *Complementos*)

Propiedades. — Si $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, cada suma s_i, S_i, se desdobla en dos; y según (22) resulta:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \qquad [1]$$

Análogamente, según (23): $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ [2]

Es, pues, legítimo, sacar fuera del signo, como coeficiente, todo factor *constante;* si el integrando cambia de signo, también la integral.

De (10) resulta asimismo la ley de monotonía:

Si $f(x) < g(x)$ es $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ [3]

Si $a < c < b$ y cada suma s_i S_i se desdobla en dos sobre (a, c) y sobre (c, b), el límite de la primera es la suma de los límites de estas dos; por tanto, para una misma función $f(x)$ es:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \qquad \text{o sea:} \qquad \int_c^b = \int_a^b - \int_a^c \qquad [4]$$

Finalmente, se hace este convenio: $\int_b^a = -\int_a^b$ [5]

131. – Teorema del valor medio y media aritmética de una función.

Sean m y M los valores mínimo y máximo de $f(x)$ en el intervalo (a, b); puesto que el área calculada está comprendida entre los rectángulos: $(b - a)m$ y $(b - a)M$, será igual a un número intermedio $(b - a)\mu$, siendo: $m \leq \mu \leq M$, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\mu = (b - a)f(\xi)$$

pues si $f(x)$ es *continua*, alcanza esé valor μ (13, II) en algún punto intermedio; aunque sea discontinua, vale la expresión $(b - a)\mu$.

Esta es la fórmula *del valor medio* del cálculo integral. Geométricamente expresa que el área limitada por la curva es igual a la de un rectángulo de base $b - a$ y cuya altura es una cierta ordenada intermedia.

Si dividimos (a, b) en n partes iguales a h y tomamos las n ordenadas: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $f(x)$, su media aritmética es:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{y_1 h + y_2 h + \ldots + y_n h}{nh}$$

El denominador es $nh = b - a$. El límite del numerador para $n \to \infty$ es la integral de $f(x)$. Por tanto, el límite de la media aritmética de las n ordenadas al crecer n es:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

Este número μ es, pues, el mismo que nos daba el teorema del valor medio, y es legítimo llamarlo *media aritmética de la función* en el intervalo (a, b).

Generalización. — Si $g(x) \gtreqless 0$, $m \leq f(x) \leq M$ existe un número μ intermedio entre m y M tal que:

$$\int f(x)g(x)dx = \mu \int g(x)dx$$

Basta observar, comparando los integrandos, que es:

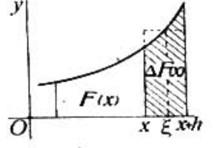
$$\int m \,.\, g(x)dx \leq \int f(x)g(x)dx \leq \int Mg(x)dx$$

luego el cociente de la integral de $f \,.\, g$ por la integral de g es un número intermedio entre m y M, suponiendo las integrales sobre un mismo intervalo (a, b).

132. — El área como función primitiva.

Sea una curva, representación de una función $f(x)$. El área limitada por esta curva, el eje de abscisas, una ordenada fija $f(a)$ y la ordenada variable $f(x)$ es una función $F(x)$, nula para $x = a$. Esta función es *continua*, aunque $f(x)$ *sea discontinua*, pues

$$\triangle F(x) = F(x + h) - F(x) = h\mu$$



llamando μ al valor medio obtenido en (131). Si $f(x)$ es *continua*, hay un punto ξ donde

$$f(\xi) = \mu, \quad \text{luego} \qquad f(\xi) = \frac{\Delta F(x)}{h}$$

Si $h \to 0$, por definición (12) se verifica:

$$f(\xi) \to f(x), \quad \text{luego } F'(x) = f(x)$$

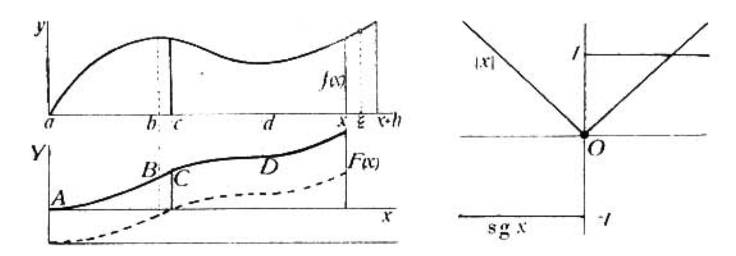
Obtenemos así dos resultados: *La integral $F(x)$ es función continua, aunque $f(x)$ sea discontinua. Si $f(x)$ es continua, $F(x)$ tiene como derivada $f(x)$.*

O sea: Si $f(x)$ es continua, $F(x)$ es función *primitiva* de $f(x)$.

Si sobre un par de ejes llevamos para cada valor de x, sobre la ordenada correspondiente, el valor $F(x)$ del área de la curva $f(x)$, habiendo adoptado una unidad de longitud para representar

la unidad de áreas, obtenemos una curva que se llama *curva integral* de la dada.

EJEMPLO. — Veamos la marcha de la curva integral. Para el valor $x = a$, es $F(a) = 0$ y obtenemos el punto A. Cuando x aumenta, el área crece y la curva va creciendo; para tener una idea de su marcha, observemos que $F'(x) = f(x)$; luego $F''(x) = f'(x)$; los valores de $f'(x)$ los conocemos pues son las pendientes de las tangentes en los puntos de la $f(x)$. Así entre a y b es $f'(x)$ positiva, luego también lo es $F''(x)$, es decir, la curva integral entre a y b es convexa con respecto al eje x. Entre b y d, $f'(x) = F''(x)$ es negativa y por tanto la curva integral, $y = F(x)$ será cóncava y así sucesivamente. En el punto D tendríamos un punto de inflexión, pues en él se tiene: $F''(x) = 0$.



Intégrese la función discontinua sg x que ha sido definida (16, Ej. 3) así: para $x < 0$ es $y = -1$; para $x > 0$ es $y = +1$. Salta a la vista que elegido $a = 0$ resulta la función *continua* $y = |x|$. El punto de discontinuidad $x = 0$ del integrando es anguloso en la integral (fig. 2.ª). La derivada de $|x|$, salvo en el origen, es sg x.

133. — Paso de la integral indefinida a la definida.

Si en lugar de empezar a calcular el área en la ordenada correspondiente al punto a, comenzamos por ejemplo en el punto **c**, para ese punto, $F(x)$ valdrá 0 y para el valor $x = 0$ tendrá $F(a)$ un cierto valor $-C$, que es el área comprendida entre la curva, el eje de las x y las ordenadas del origen y del punto c. Como el punto desde donde se empieza a medir el área puede ser cualquiera habrá infinitas curvas integrales que diferirán en un cierto valor constante arbitrario C.

Cuando se fija el extremo a del intervalo, pero se deja variable el extremo x, tenemos la integral $\int_a^x$ que se llama *definida inferiormente*. Cuando se dejan indeterminados los dos extremos se escribe simplemente $\int f(x)dx$ y se llama *integral indefinida*.

Si queremos calcular el valor del área en el intervalo (a, b) comenzaremos por encontrar una función primitiva cualquiera $\Phi(x)$ de $f(x)$, es decir, mediante artificios convenientes encontramos una función tal que $\Phi'(x) = f(x)$. Ahora bien, el área buscada, a partir de a, es una función primitiva de $f(x)$, luego ambas funciones primitivas difieren en una constante ,es decir:

$$\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) + c.$$

Para calcular c hagamos $x = a$ y como el área es nula, resulta:

$$c = -\Phi(a)$$

por tanto: $\text{Area} = \int_a^x f(x)dx = \Phi(x) - \Phi(a)$

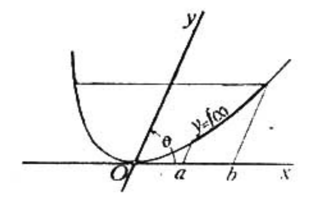
Es decir: *para calcular el área o sea la integral definida se sustituye en una función primitiva cualquiera el límite superior y luego el inferior y se resta este resultado de aquél.*

Esta *fórmula* de BARROW es el fundamento del Cálculo integral.

EJEMPLO. — Sea la parábola $x^2 = 2py$.

Para calcular el área limitada por la parábola, el eje x y la ordenada correspondiente a $x = a$, formemos la primitiva de $y = x^2 : 2p$, que es $x^3 : 6p$; para $x = a$ vale $a^3 : 6p$ y para $x = 0$, vale O, luego $A = a^3 : 6p$.

Para $x = a$, $y = a^2 : 2p$, el rectángulo 0 a b c tiene por área: $Ar = a^3 : 2p$; es decir, el área del segmento parabólico es la tercera parte del área del rectángulo que lo comprende.



NOTA. — Si la función $f(x)$ se representa en ejes oblicuos de ángulo θ, la integral ya no representa el área; para obtener el área de cada paralelógramo habrá que multiplicar $f(x)\Delta x$ por sen θ, y por tanto

$$A = \text{sen}\,\theta \int_a^b f(x)\,dx$$

EJERCICIOS

1. — Variar el origen a de la integral definida inferiormente, equivale a sumar una constante; pero a veces no toma ésta todos los valores reales. Así, la integral en (a, x) de $2x$ es x^2 más *constante negativa,* cualquiera que sea a.

Revise el lector las integrales de lecciones anteriores y vea qué limitaciones tiene la constante.

2. — ¿Qué significado geométrico tiene la integral de $|f(x)|$?

AREAS Y VOLUMENES

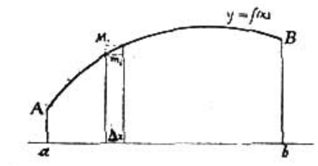
134. — Volumen de los cuerpos de revolución.

Sea $y = f(x)$ la función que representa la sección meridiana de una superficie de revolución respecto del eje x.

Al girar en torno de ese eje el trapezoide que tal curva limita, engendra un cuerpo *redondo* o *cuerpo de revolución.*

Dividido el intervalo ab en n partes, el trapezoide está contenido en la suma de rectángulos de bases Δx y alturas M_i; y a su vez contiene los de alturas m_i.

Estos rectángulos, al girar la meridiana, engendran cilindros. El volumen buscado será el límite común de la suma de los volúmenes engendrados por los rectángulos de ordenadas m_i o M_i o cualquier ordenada intermedia.



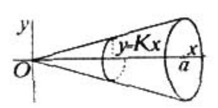
El volumen del cilindro de ordenada $y = f(x)$ es igual a la base por la altura o sea: $\pi y^2 \Delta x$, luego el volumen del cuerpo de revolución es el límite de la suma de éstos, o sea

$$\text{Vol} = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Ejemplo 1.° — Calcular el volumen del cono.

Aplicando la fórmula anterior teniendo presente que $f(x)$ en este caso es: Kx, tenemos:

$$\text{Vol.} = \pi \int_0^a K^2 x^2 \, dx = 1/3 \, \pi \, K^2 \, a^3$$



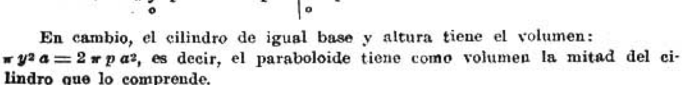
Siendo $K = r : a$ (coeficiente angular) se tiene:
Vol. del cono $= 1/3 \, \pi \, r^2 \, a$, es decir, la tercera parte del cilindro de igual base y altura.

Ejemplo 2.° — Volumen de un paraboloide.

Sea su meridiana: $y^2 = 2px$.

Aplicando la misma fórmula:

$$V = \pi \int_0^a 2p \, x \, d \, x = \pi p x^2 \Big|_0^a = p \, \pi \, a^2$$



En cambio, el cilindro de igual base y altura tiene el volumen: $\pi \, y^2 \, a = 2 \, \pi \, p \, a^2$, es decir, el paraboloide tiene como volumen la mitad del cilindro que lo comprende.

EJEMPLO 3.° — Si tuviéramos un elipsoide de revolución:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

la meridiana tendría por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore \; y = b/a\sqrt{a^2 - x^2}$$

Aplicando la fórmula y separando el factor constante $2\pi\, b^2 : a^2$, calculemos:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = a^3 - a^3 : 3 = 2a^3 : 3$$

$$V = 4/3\;\pi\, a\, b^2.$$

Si tuviéramos $a = b = r$, resultaría el volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

135. — Volúmenes de cuerpos cualesquiera.

Se podrá calcular por una integral simple el volumen limitado por una superficie, siempre que se pueda calcular el área de cualquier sección paralela a uno de los planos coordenados.

En efecto; trazando un sistema de planos paralelos, por ejemplo, al plano yz, si sumamos los cilindros que tienen como bases las secciones de la superficie y como alturas las distancias entre cada dos planos consecutivos, el límite de esa suma es el volumen; como el área es función de la distancia x, si es: Area $= \alpha(x)$, resulta:

$$\text{Volumen} = \text{lím.}\; \Sigma\, \alpha(x)\,\Delta x = \int_a^b \alpha(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1.° — Calcular el volumen de un elipsoide de ejes desiguales cuya ecuación es la del ejemplo anterior, con denominadores a^2, b^2, c^2.

El área de la elipse sección con el plano yz es: $\pi\, b\, c$. Las secciones con planos paralelos al yz dan elipses semejantes a la anterior, cuyos semiejes son:

$$\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \frac{c\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$$

luego el área de cualquier sección paralela al plano yz en función de su distancia x al mismo, es

$$\frac{\pi\, bc(a^2 - x^2)}{a^2}$$

Aplicando la fórmula general deducida en el número anterior, se tiene:

$$\text{Volumen} = 4/3\;\pi\, a\, b\, c.$$

EJEMPLO 2.° — Calcular el volumen del cuerpo limitado por un hiperboloide de una hoja y dos planos perpendiculares al eje, a las distancias $z = \pm\, c$.

Las secciones con planos perpendiculares al eje dan en el hiperboloide de una hoja elipses semejantes. El área de una de ellas es: $\pi\, xy$. Sacando x e y de las ecuaciones de las hipérbolas, secciones del hiperboloide con los planos xz e yz e integrando entre los límites $z = 0$ y $z = c$ y duplicando, se tiene:

$$V = 4/3\;\pi\, abc.$$

En la misma forma se podría calcular el volumen de un segmento de hiperboloide de dos hojas o de un paraboloide.

136. — Area de las superficies de revolución.

Consideremos una sección meridiana de la superficie de revolución entre los límites $x = a$, $x = b$. Se trata de calcular el área de la superficie que engendra ese arco alrededor del eje x.

Dividamos el intervalo ab en un cierto número de partes y tracemos tangentes a la curva en los puntos de abscisa media.

La superficie engendrada por cada lado es un tronco de cono de área: $2\pi yl$, siendo $2\pi y$ la longitud de la circunferencia media y l la apotema, cuya expresión es $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, luego el límite de esta suma, que se llama *área de la superficie de revolución*, es:

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,.\,dx$$

$$\text{o bien: } 2\pi \int_a^b y\,.\,ds,$$

representando abreviadamente por ds el infinitésimo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ cuyo significado geométrico es el trozo de tangente limitado por las ordenadas que distan dx.

Ejemplo 1.° — Calcular el área de una esfera.

Está engendrada por una semicircunferencia, de ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

de donde:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Aplicando la fórmula anterior, resulta la conocida expresión $4\pi r^2$.

Ejemplo 2.° — Area de un paraboloide de revolución: Sea la ecuación de la meridiana

$$y^2 = 2px, \quad \text{de donde: } y = \sqrt{2px}.$$

Aplicando la fórmula [1] se tiene el resultado siguiente:

$$\text{Area} = 2/3\pi\sqrt{p}[(2a + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}]$$

EJERCICIOS

1. — Calcular el área y el volumen del cuerpo engendrado por la revolución de la cicloide alrededor de su recta base. ($A = {}^{32}/_{3}\,\pi r^2$, $V = 5\pi^2 a^3$).

2. — Deducir sin cálculo el área de la elipse del área del círculo; y el volumen del elipsoide reduciéndolo al de la esfera.

Lección 34

RECTIFICACION DE LAS CURVAS PLANAS Y CURVATURA

137. — Rectificación de curvas planas.

Definición. — Se llama *longitud* de un arco al límite de la longitud de una poligonal inscripta en ella o circunscripta a ella, *cuando sus lados tienden a cero, al crecer infinitamente el número* de éstos.

Sea una curva representada por una función $f(x)$. La longitud de cada segmento de tangente correspondiente a un intervalo dx, es como hemos visto

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

luego el límite de la suma de estos segmentos (aunque no forman poligonal) es

$$\int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

extendida al intervalo en que está definido el arco.

Nota. — Queda justificada la notación ds, pues vemos que es la diferencial del arco s.

No se confundan los tres infinitésimos equivalentes:

$$AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad , \quad \Delta s \quad , \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

El primero es la cuerda, el segundo el arco, el tercero es el trozo de tangente limitado por las ordenadas de los puntos x, $x + dx$. Aunque son diferentes, pueden sustituirse en toda cuestión de límites de cocientes y la integral de cualquiera de los tres es s. En efecto, tanto la suma de las cuerdas como de las tangentes tiene el límite s y claro es que también la suma de arcos vale justamente s.

Para aquilatar el concepto de longitud de curva, véase el capítulo: *Complementos de Cálculo integral.*

Ejemplo. — Rectificar un arco de la parábola: $x^2 = 2py$.

La fórmula que da la longitud es:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, . \, dx = \int_0^a \sqrt{1 + (x/p)^2} \, . \, dx$$

integral ya calculada en (128) y sustituyendo los límites resulta:

$$\tfrac{1}{2} a/p \sqrt{p^2 + a^2} + 1/2p \, . \, l \frac{\sqrt{p^2 + a^2} + a}{p}$$

EJEMPLO 2.° — Rectifíquese la curva catenaria, cuya ecuación es

$$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Aplicando la fórmula resulta:

$$y' = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad 1 + y'^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$$

que es un cuadrado perfecto, luego

$$\int \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

expresión que limitada entre las abscisas extremas da la longitud del arco.

Utilizando las funciones hiperbólicas, tenemos:

$$y = Ch\,x \qquad y' = Sh\,x \qquad 1 + y'^2 = Ch^2\,x$$

luego

$$\int \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int Ch\,x . dx = Sh\,x$$

138. — Curvatura de curvas planas.

Hemos definido en (86) la *curvatura* de una circunferencia como número recíproco de su radio y extendido el concepto a cualquier curva, sustituyéndola por su círculo osculador; pero la curvatura se puede definir más directamente como *límite del cociente del ángulo de dos tangentes al arco correspondiente,* cuando éste tiende a 0. Llamado τ a la inclinación de la tangente respecto del eje x, o sea $\tau = \text{arctg}\, y'$, el ángulo que forma con ella otra tangente es $\Delta\tau$ y la curvatura se define así:

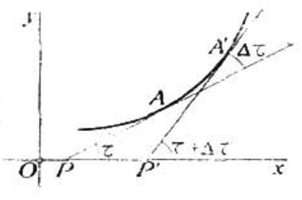
$$C = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}$$

Esta definición concuerda con la dada para la circunferencia, por ser en ella

$$\Delta s = R\Delta\tau \qquad \text{luego: } C = 1/R$$

y veamos que también concuerda para toda curva. En efecto:

$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}dx \quad ; \quad d\tau = \frac{y'' . dx}{1 + y'^2}$$

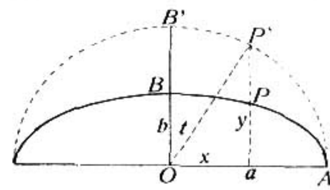


y al dividir ds por $d\tau$ resulta la expresión ya conocida del radio del círculo osculador, es decir:

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{C}$$

Para el estudio de las relaciones entre una curva y su evoluta (86) véanse los *Complementos de Cálculo integral.*

139. — Rectificación de la elipse.



Sea la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Podemos hacer:

$$x = a \operatorname{sen} t; \qquad y = b \cos t$$

llamando k a la excentricidad, se tiene:

[1] $$k = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$$

El valor: $ds^2 = dx^2 + dy^2$ se calcula así:

$$dx = a \cos t \,.\, dt \qquad dy = -b \operatorname{sen} t \,.\, dt,$$

$$ds^2 = [a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2.$$

De [1] sacamos: $\quad a^2 - b^2 = k^2 . a^2 \quad b^2 = a^2 (1 - k^2).$

Reemplazando en [2]:

$$ds^2 = [a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t - a^2 k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2 = a^2 [1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t]\, dt^2.$$

[3] $$s = a \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t} \,.\, dt$$

integral que da la longitud de un arco de elipse.

140. — Integrales elípticas de primera y segunda especie.

Las integrales del tipo [3] se llaman *elípticas* de segunda especie y en Análisis se demuestra que no existe ninguna combinación de funciones elementales que sea primitiva de la función $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}$, pero la función primitiva existe y se puede calcular numérica y gráficamente.

Hay otras integrales elípticas de primera especie cuyo integrando es del tipo:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} = \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

Como las integrales elípticas se presentan muy a menudo en los *problemas de la técnica*, se han construído tablas que dan el valor de estas integrales, para los diferentes valores de k y de t.

Como es $k < 1$, si llamamos α al arco cuyo seno es k, es decir, si ponemos $k = \operatorname{sen} \alpha$, la tabla da los valores de la integral al variar α y t. (Véase el apéndice).

EJEMPLO 1.° — Sea la elipse de semiejes $a = 2$, $b = 1$ $\therefore$ $c = \sqrt{3}$.

Su excentricidad es $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, luego $\alpha = 60°$.

Para rectificar el arco limitado por las abscisas $x = 0$, $x = 1$, calcularemos t por la fórmula

$$1 = 2 \operatorname{sen} t \qquad \text{de donde: } t = 30°.$$

El valor dado por la tabla es: 0,506, luego la longitud del arco es 2. 0,506 = 1,012.

La longitud del cuadrante se obtendrá para $t = 90°$; la tabla da 1,211 luego la longitud del cuadrante es 2,422.

EJEMPLO 2.° — Rectifíquese la elipse intersección de un cilindro y un plano:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad 4z - 3y = 1.$$

Adoptando y como variable independiente,

$$ds = \sqrt{1 + x'^2 + z'^2}\, dy$$

Diferenciando las dos ecuaciones, se despejan x', z', y sustituyendo en la expresión del arco, resulta:

$$ds = \sqrt{25:(16 - y^2)}\, dy \therefore s = 5 \operatorname{arc\,sen} \tfrac{1}{4} y$$

La posibilidad de efectuar la integración por funciones elementales indica que la elipse es una circunferencia, lo que puede observarse directamente en la figura que representa la intersección, comparando los semiejes de la curva que resultan ambos iguales a 5.

Así la fórmula obtenida de para el arco ($y_0 = 0$, $y_1 = 4$) $s = 5\,\pi/2$ que es la longitud del cuadrante.

ECUACIÓN DEL PÉNDULO SIMPLE.

Si es a el ángulo de desviación, la duración de la oscilación está expresada por la integral elíptica:

$$T = \sqrt{l/g} \int_{-a}^{a} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}}.$$

si a es bastante pequeño para que puedan equipararse arcos y senos, resulta una integral elemental, que conduce a la fórmula $T = 2\pi \sqrt{l/g}$.

EJERCICIOS

1. — Rectificar la sinusoide, gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$.

2. — Cuadratura del óvalo definido por la ecuación $y^2 = \cos 2x$.

3. — Rectificar la curva de Viviani ($k = 1 : \sqrt{2}$).

4. — Expresar como integral elíptica de 1.ª especie la integral de $1 : \sqrt{\cos a - \cos x}$. (Basta sustituir: $t = \cos \frac{1}{2} x$, y es $k = 1 : \cos \frac{1}{2} a$).

5. — Idem la integral de $1 : \sqrt{\cos 2x}$.

6. — Acotar el error de la fórmula aproximada del péndulo.

LECCIÓN 35

INTEGRACION NUMERICA

141. — Fórmula de Simpson - Acotación del error.

Para calcular una integral cuando no es fácil obtener la función primitiva, o aun obtenida resulta complicada, hay diversos métodos de cálculo aproximado, numérico, gráfico y mecánico, que exponemos a continuación.

Puesto que la integral representa el área limitada por la curva y el eje x en el intervalo (a, b) ocurre dividir éste en partes iguales y tomar como valor aproximado del área la suma de los trapecios inscritos o de los circunscritos, limitados por las ordenadas $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$ en los puntos intermedios. Pero como estos métodos dan aproximación muy insuficiente, solo indicaremos la regla de Simpson que da resultados muy satisfactorios.

Consideremos las tres ordenadas y_0, y_1, y_2, de la función y elegida la intermedia como eje y, sea el desarrollo de la función:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

cuya integral desde $-h$ a $+h$ es:

$$2ah + {}^2/_3\, ch^3 + {}^2/_5\, ch^5 + \ldots$$

Si la curva fuese parábola de segundo grado, es decir, si el desarrollo solo contuviese hasta el término de segundo grado, la expresión del área sería exactamente

$$S = h(6a + 2ch^2) : 3 = h(y_0 + 4y_1 + y_2) : 3$$

pues para $x = -h$ es:	$y_0 = a - bh + ch^2$
,, ,, $x = 0$,,	$y_1 = a$
,, ,, $x = h$,,	$y_2 = a + bh + ch^2$

Cualquiera que sea la curva, esta fórmula dará un valor que coincide con la expresión del área en tres términos y el error es del orden de h^5.

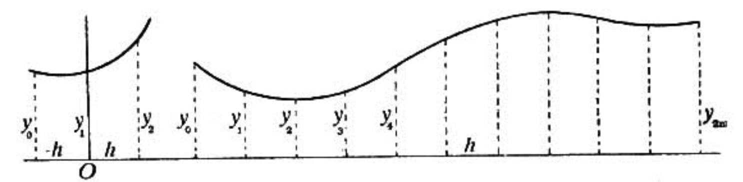
Si ahora consideramos análogamente los intervalos y_2, y_4, y_6, $\ldots$, y_{2n} y al sumar sacamos $h/3$ factor común, resulta la suma:

$$(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Las ordenadas extremas, cuya suma llamaremos E, figuran una sola vez; cuatro vèces las impares intermedias cuya suma designaremos por I, y dos veces las pares intermedias, que llamaremos P.

Resulta así la fórmula de Simpson:

$$\text{Area} \sim h(E + 4I + 2P) : 3 \qquad [1]$$



EJEMPLO. — Para aplicar la fórmula de Simpson a la integral entre 1 y 2 de $1/x$, adoptamos $h = 0{,}1$ y calculados los recíprocos de 1,1; 1,2; 1,3; ....; 2 con la regla de cálculo, resulta:

$$E = 1{,}5 \qquad P = 2{,}71 \qquad I = 3{,}42$$

luego el área vale aproximadamente $S = 0{,}68$; valor exacto hasta las centésimas, pues la integral es $l2 = 0{,}69\ldots.$

Acotación del error. — Si el valor absoluto de $f^{IV}(x)$ se conserva inferior a M en el intervalo $(-h, +h)$ el resto despreciado es menor que $x^4M/4!$ y su integral inferior a $x^5M/5!$, luego entre $-h$ y $+h$ resulta

$$\text{error} < h^5M : 60.$$

142. — Integración por desarrollos en serie.

Si la función $f(x)$ admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots. + a_nx^n + \ldots.$$

una función primitiva resulta como se vió en el párrafo (101) integrando cada término, y el intervalo de convergencia es el mismo de la serie dada. Al efectuar la integración por este método debe cuidarse, ante todo, de no aplicarlo más allá del intervalo de convergencia, pues esto conduciría a absurdos. Además es necesario calcular el grado de aproximación alcanzado al tomar algunos términos, pues bien puede suceder que los infinitos despreciados (aun siendo insignificantes los primeros que siguen a los tomados) tengan suma considerable.

El desarrollo de la serie de la función puede hacerse combinando las propiedades ya expuestas en la lección 23, esto es, operando por suma, resta, multiplicación, etc., con las series que representan las funciones elementales que componen $f(x)$, o bien con la fórmula de Mac-Laurin. Si no hay desarrollo según potencias

de x o el intervalo de convergencia no comprende al intervalo dado, convendrá trasladar el origen poniendo $x = x' + \alpha$, o bien desarrollar en fórmula de Taylor, según las potencias de $x - \alpha$.

EJEMPLO. — Una integral fundamental en la teoría de los errores es: $\int e^{-x^2} dx$.

Como la función exponencial admite desarrollo convergente para todo valor de x

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

resulta para la integral entre o y x:

$$\frac{x}{1} - \frac{1}{1!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \dots$$

Si tomamos solamente los dos primeros términos, el error cometido es en valor absoluto menor que $x^5/10$ si es $x^2 < 10/3$, por ser alternada la serie

En general: si es $x^2 < m$ al tomar un número de términos $n \gtreqless m$, el error es menor que el primero siguiente. (V. *Complementos*), o sea:

$$\frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

143. — Método de integración aproximada de Gauss.

La fórmula de Simpson expresa la integral mediante las tres ordenadas y_0, y_1, y_2.

Ahora bien, vamos a ver que es posible elegir las tres ordenadas no equidistantes de modo que el área venga expresada más exactamente por una expresión también lineal, de la forma

$$S = R_0 y_0 + R_1 y_1 + R_2 y_2.$$

Adoptando como origen el punto medio del intervalo y tomando como unidad a la semi-amplitud del mismo, hemos obtenido:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \qquad [3]$$

y su integral entre -1 y $+1$ es:

$$\frac{2a_0}{1} + \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_4}{5} + \dots$$

Ensayemos ahora la determinación de tres valores x_0, x_1, x_2 y tres coeficientes R_0, R_1, R_2, tales que la expresión $R_0 y_0 + R_1 y_1 + R_2 y_2$ coincida con este desarrollo, o sea:

$$\begin{aligned} &R_0(a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \dots) + \\ &+ R_1(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots) + \\ &+ R_2(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \dots) = \\ &= \frac{2a_0}{1} + \frac{2a_2}{3} + \frac{2a_4}{5} + \dots \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de a_0, a_1, a_2, ... resultan las condiciones:

$$R_0 + R_1 + R_2 = 2$$
$$R_0 x_0 + R_1 x_1 + R_2 x_2 = 0$$
$$R_0 x_0^2 + R_1 x_1^2 + R_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$
$$R_0 x_0^3 + R_1 x_1^3 + R_2 x_2^3 = 0$$
$$R_0 x_0^4 + R_1 x_1^4 + R_2 x_2^4 = \frac{2}{5}$$
$$R_0 x_0^5 + R_1 x_1^5 + R_2 x_2^5 = 0$$

de donde se despeja:

$$R_0 = 5/9 \quad , \quad x_0 = -\sqrt{3/5} = -0{,}774\ldots$$
$$R_1 = 8/9 \quad , \quad x_1 = 0.$$
$$R_2 = 5/9 \quad , \quad x_2 = \sqrt{3/5} = 0{,}774\ldots$$

si la semiamplitud del intervalo es h, basta multiplicar por h las abscisas y resulta:

Adoptando como valor del área la expresión:

$$h(5y_0 + 8y_1 + 5y_2) : 9$$

siendo y_0, y_1, y_2 las ordenadas en los puntos de abscisas:

$$-h\sqrt{3/5} \quad , \quad 0 \quad , \quad +h\sqrt{3/5}$$

resulta un valor del área cuyo error es del orden de h^7.

Comparada esta fórmula de Gauss con la de Simpson se ve que el mayor trabajo del cálculo queda compensado con la mejor aproximación obtenida.

Así, por ejemplo, si se desea calcular con solo tres datos la temperatura media en un día (es decir, la integral de la temperatura, dividida por el intervalo), deberían tomarse estas tres temperaturas a las horas siguientes:

$2^h\ 24^m$ a/m, 12^h m, $9^h\ 18^m$ p/m.

Generalización. — El lector puede repetir sin dificultad el cálculo para n ordenadas. Así p. ej. para $n = 4$, la expresión del área es

$$S \sim R_0 y_0 + R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3$$

siendo:

$$R_0 = R_3 = 0{,}1739 \qquad R_1 = R_2 = 0{,}3261$$
$$-x_0 = +x_3 = 0{,}8611 \qquad -x_1 = +x_2 = 0{,}3400$$

EJERCICIOS

1. — Calcular la integral desde 1 hasta 2, 3, 4, ... de la expresión $e^x . dx/x$. Utilícese la fórmula de Simpson y la de Gauss.

2. — Dedúzcanse los coeficientes de Gauss para $n = 4$, comprobando los valores indicados en el texto.

3. — Expresar las integrales elípticas de 1.ª y 2.ª especie por series de potencias del parámetro k y obtener así expresiones con error menor que 0,001 para $k = \text{sen } 2°$.

Comprobar los resultados con la 1.ª fila de las tablas finales.

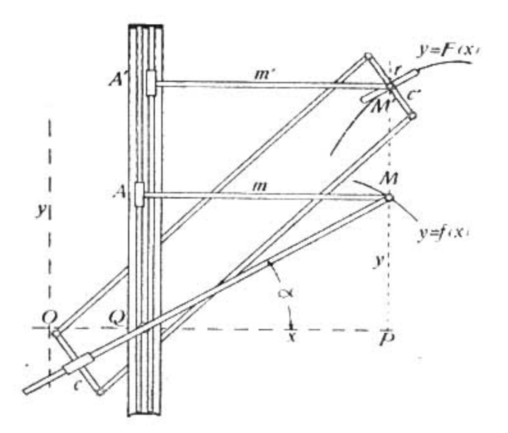
4. — Calcular para $t = 0{,}1$ la función $\Theta(t)$, tabulada en el Apéndice sobre la Teoría de errores.

Lección 36

INTEGRACION GRAFICA Y MECANICA

144. — Intégrafo de Abdank Abakanowitz.

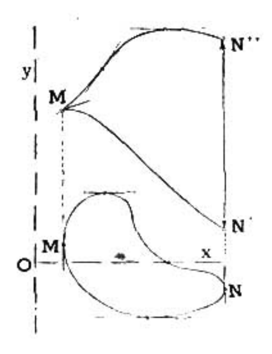
Supongamos una curva dada por la función: $y = f(x)$; sea $F(x)$ una curva integral, es decir, tal que: $F'(x) = f(x)$; los valores de $F'(x)$ son las pendientes $tg\,\alpha$ de las tangentes en los diferentes puntos de la curva integral, y coinciden con los valores de las ordenadas de la curva $f(x)$ en los mismos puntos.



Adoptando como unidad un segmento QP, se tiene: $f(x) = tg\,\alpha$ para cada valor de x. A medida que $f(x)$ toma distintos valores, según los de x, el ángulo α varía, puesto que $QP = 1$. Si se tiene, pues, un medio de ir dibujando una curva $y = F(x)$, tal que la tangente en cada punto sea paralela a la correspondiente recta QM, dicha función cumplirá la condición: $F'(x) = f(x)$ y, por tanto, será una curva integral de $f(x)$.

En este principio está basado el aparato llamado *intégrafo*, que dibuja la curva integral de una curva dada.

Una barra QAA' se traslada conservándose perpendicular al eje x, arrastrando dos varillas AM y $A'M'$ perpendiculares a ella y que pueden deslizarse a lo largo de ella. El estilete M destinado a describir la curva $y = f(x)$ es origen de una varilla que pasa por Q deslizándose por él según varía la hipotenusa QM al variar la ordenada $y = PM$. Sobre esta varilla QM se desliza, conservándose perpendicular, otra varilla c, que forma con otra igual c' un paralelógramo articulado, de modo tal que la ruedecilla r situada en el centro de c', se conserva siempre paralela a QM; y como está obligada a conservarse en la misma ordenada PM por la varilla m' que



resbala sobre a, resulta que dicha ruedecilla r traza una huella tal que la tangente en cada punto es paralela a QM, es decir, una curva $y = F(x)$ tal que en cada punto es $F'(x) = y$, si se adopta como unidad el segmento m; luego $F(x)$ es una función integral de $f(x)$.

Al comenzar el trazado puede deslizarse c sobre QM arbitrariamente, pudiendo, por tanto, colocarse M' arbitrariamente sobre la ordenada PM (naturalmente, dentro del límite que permiten las dimensiones del aparato) pero una vez fijada la posición inicial M', es decir, elegida la constante de integración, la curva integral queda completamente determinada al recorrer M la curva dada.

El segmento de ordenada limitado por los puntos inicial y final de la curva obtenida representa el área con la unidad PQ del aparato; es decir: el recinto es equivalente al rectángulo cuyos lados son PQ y aquél segmento.

Para obtener el área de un recinto limitado por una curva cerrada, basta descomponerla en dos arcos por los puntos de abscisas extremas; y, obtenidas las dos curvas integrales a partir de un mismo punto, la diferencia $N'N''$ de ordenadas finales mide el área.

NOTA. — En el modelo de Abdank Abakanowitz, que es el más conocido, el movimiento de traslación se logra mediante ruedas de ancha llanta y eje a, en los extremos de esta barra.

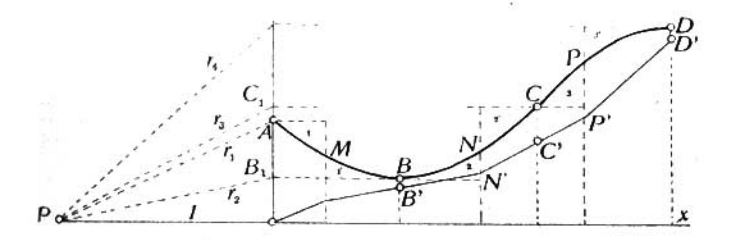
La curva derivada $y = f(x)$ no se describe con el mismo punto M, ni la integral con el M', sino por otros puntos M_1 y M'_1 en la prolongación de m y m'. Esto equivale a trasladar paralelamente ambas curvas en el sentido del eje x, pero subsiste la misma relación entre ambas.

El movimiento de traslación m y m' a lo largo de a se efectúa mediante un carro de dos ruedecillas que cada varilla lleva en su extremo y que ruedan sobre sendas ranuras de la varilla a. Estos carros situados en A y A' suelen llamarse *carro diferencial* y *carro integral*, respectivamente.

145. — Método de integración gráfica.

Cuando no se tiene intégrafo, se puede dibujar la curva integral, con bastante exactitud, por medio de métodos gráficos.

Se sustituye a la curva por una poligonal, haciendo que se vayan compensando los errores, para lo cual tendrán que ser iguales los triángulos $1 = 1'$, $2 = 2'$, $3 = 3'$, etc., lo cual se consigue en el dibujo con suficiente exactitud.



Se proyectan los puntos A, B, C, D, etc., de la poligonal sobre Oy, paralelamente a Ox. Se toma un valor $OP = 1$ arbitrario, que se llama *base* de integración o distancia polar. El punto P, llamado *polo*, se une con los puntos A_1, B_1, C_1 ... proyecciones de A, B, C ... sobre el eje y.

A partir de un punto A', arbitrario sobre la ordenada del punto A, se traza una paralela al primer radio polar, limitándola en la

ordenada correspondiente al punto M. A partir de este punto M', se traza una paralela al segundo radio polar, limitándola en la ordenada del punto N, luego una paralela al tercero y así sucesivamente.

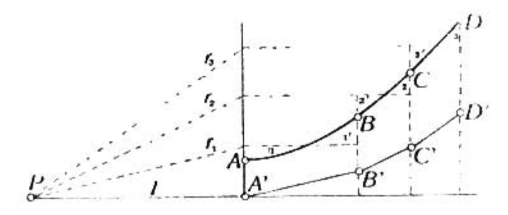
Obtenemos así una línea quebrada $A' M' N' P' D'$ .... que es la integral de la poligonal con que hemos sustituido a la curva, pues en cada punto la pendiente es la ordenada correspondiente de la poligonal dada.

La diferencia de las ordenadas extremas de la quebrada integral, multiplicada por la distancia polar, da el área de la poligonal con que hemos sustituido a la curva, o bien la de esta última, que es sensiblemente igual a la anterior.

Si queremos construir la curva integral de la dada, observamos que los puntos A', B', C' .... pertenecen a dicha curva integral, puesto que para las ordenadas de estos puntos, las áreas de la poligonal y de la curva son iguales.

Para obtener, pues, la curva integral, basta trazar una curva que pase por dichos puntos A', B', C' .... y que sea tangente en los mismos a los lados de la poligonal.

NOTA. — Si hacemos la compensación como en la figura, obtenemos también una integral poligonal, pero ya no resulta tangente a la curva integral, y de ésta sólo se tienen puntos, como el A', B', C', D'.



Se ve, pues, que es preferible el método anterior, que da la curva integral por puntos y tangentes.

Si sólo interesa el área total encerrada por la curva, el eje Ox y las ordenadas extremas, viene expresada por la diferencia de las ordenadas extremas de la curva integral, que en ambos procedimientos coinciden con las de la poligonal integral.

Para la cuadratura de recintos, limitados por una curva cerrada, se descompone ésta en dos arcos, como se hizo en la figura de pág. 162.

EJERCICIOS

1. — Efectuar la integración gráfica de la sinusoide, comprobando el resultado.

2. — Intégrense gráficamente funciones discontinuas de 1.ª especie (15).

INTEGRALES SUCESIVAS DE UNA FUNCION

146. — Derivación bajo el signo de integral.

DERIVADA PARCIAL DE $f(x, y)$. — Si se considera y fijo, la derivada de $f(x, y)$ respecto de la variable x se llama *derivada parcial*, y se designa así: $f_x(x, y)$, siendo por definición (46):

$$f(x+h, y) - f(x, y) = h\,[f'_x(x, y) + \delta] \qquad [1]$$

donde $\delta \to 0$ para $h \to 0$, es decir: fijado x, para cada $\varepsilon > 0$ hay un τ (dependiente de y) tal que $|\delta| < \varepsilon$ para $|h| < \tau$.

Cuando τ es independiente de y siendo: $|\delta| < \varepsilon$ cualquiera que sea el valor y del intervalo (a, b), diremos que $f(x, y)$ es *derivable* en el punto x, *uniformemente* para el intervalo (a, b) de y.

FUNCIONES DEFINIDAS POR INTEGRALES. — Algoritmo análogo al de las series funcionales para definir funciones de x, es toda integral del tipo:

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

en que la variable independiente es la t, siendo la x constante al efectuarse la integración, hecha la cual y sustituidos los límites, queda una función de x.

El incremento $\Delta F(x)$ de esta función, para un incremento h de x, está dado por la expresión:

$$\Delta F(x) = \int_a^b [f(x+h, t) - f(x, t)]\, dt \qquad [1]$$

la cual, en virtud de [1], puede escribirse así:

$$\Delta F(x) = \int_a^b h(f'_x(x, t) + \delta)dt \qquad [2]$$

Dividiendo ambos miembros por [2], y supuesta uniforme la convergencia hacia f'_x se tiene:

$$\frac{\Delta F(x)}{h} = \int_a^b f'_x(x, t)dt + \int_a^b \delta\,.\,dt \qquad [3]$$

$$\left|\int \delta\,.\,dt\right| < \varepsilon(b-a)$$

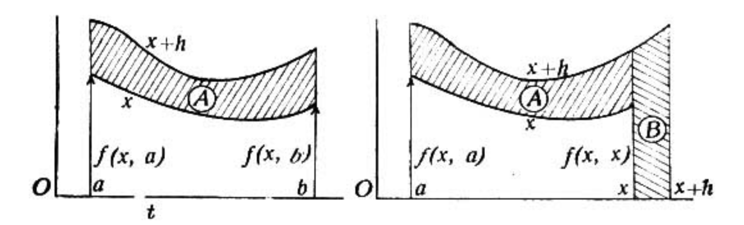
luego el cociente incremental de $F(x)$ difiere arbitrariamente poco

del primer sumando o sea tiene éste como límite, el cual es por tanto, derivada de $F(x)$, es decir:

$$F'(x) = \int_a^b f'_x(x, t)\,dt$$

Toda integral cuyo integrando contiene un parámetro, define una función de éste cuya derivada se obtiene sustituyendo el integrando por su derivada respecto de ese parámetro, suponiendo que la convergencia hacia ella sea uniforme.

Esto es suponiendo la integral definida entre límites constantes a, b, como en el caso considerado. La figura indica el significado gráfico de $\Delta F(x)$ al pasar de la curva correspondiente al valor x del parámetro a la curva correspondiente al valor $x + h$.



EJEMPLO. — Compruébese la regla en la integral:

$$F(x) = \int_0^1 l(x + t)\,dt$$

$$F'(x) = \int_0^1 dt/(x + t) = l(x + 1) - lx$$

Aplicación al cálculo de integrales. — De una integral definida o indefinida que contiene un parámetro se deduce otra por derivación respecto de este parámetro. Aplíquese esta regla a los ejercicios 3 y 4. En este último la regla es aplicable a pesar de ser infinito el intervalo, como se puede demostrar, pero el lector puede admitirlo sin demostración.

Caso de límite superior variable. Consideremos: $F(x) = \int_a^x f(x, t)\,dt$

es decir, que la integral tenga variable el límite superior.

El incremento $\Delta F(x)$ tiene el significado que se indica en la figura, el cual se compone de dos áreas $A + B$; al dividir por h el límite de $A : h$ es:

$$\int_a^x f'x(x, t)\,dt$$

El límite de $B : h$, en virtud del teorema del valor medio del Cálculo integral, es $f(x, x)$ al tender h hacia 0, luego:

$$F'(x) = \int_a^x f'_x(x, t)\,dt + f(x, x)$$

NOTA. — Más general, si es $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(x, t)dt$

puede demostrarse análogamente:

$$F'(x) = \int_a^{\varphi(x)} f'_x(x, t)dt + \varphi'(x) . f[x, \varphi(x)]$$

y si también el límite inferior es variable; $\psi(x)$, hay que agregar un nuevo término, que es: $-\psi'(x) . f[x, \psi(x)]$.

147. — Momentos de órdenes sucesivos.

Consideremos un recinto plano limitado por la curva $y = f(t)$, el eje t y dos ordenadas extremas en a y b.

Un elemento rectangular de superficie tiene por expresión: ydt, y el momento de dicho elemento de área respecto a la recta de abscisa x, paralela al eje y, es el producto del área por la distancia a dicha recta; es decir, $(x - t) f(t)dt$, siendo t la abscisa media; si hacemos la suma de todos los momentos de las áreas elementales, y calculamos el límite de dicha suma, tenemos, por definición, el momento del área encerrada por la curva $f(t)$, el eje t y las ordenadas en a y b respecto a la recta $t = x$.

Es decir:

$$\mu = \text{lím.}\, \Sigma(x - t)f(t)dt = \int_a^b (x - t)f(t)dt$$

El momento que hemos definido se llama *estático* o de primer orden. En general, la expresión que da el momento de orden n es:

$$\mu_n = \int_a^b (x - t)^n f(t)dt$$

y para $n = 2$, se llama momento de *inercia*.

Para $n = 0$, se tiene:

$$\mu_0 = \int_a^b f(t)dt$$

que no es sino el área del recinto encerrado por la curva, el eje de abscisas y las ordenadas extremas.

La expresión del momento de orden n del área comprendida entre las abscisas a y x, es:

$$\mu_n = \int_a^x (x - t)^n f(t)dt ;$$

si la derivamos respecto a x resulta:

$$\mu'_n = n \int_a^x f(t)\,(x - t)^{n-1}\,dt + (x - x)^n$$

y como la integral no es sino el momento de orden $n - 1$, se tiene:

$$\mu'_n = n\,\mu_{n-1} \qquad \text{o bien: } \mu_n = n \int_a^x \mu_{n-1}\,dx$$

148. — Cálculo gráfico de los momentos sucesivos.

Consideremos una curva $y = f(t)$ y calculemos el momento de orden n del área que encierra con el eje t, y las ordenadas en los puntos o y x, respecto del eje de abscisa $t = x$.

El momento de orden 0 es:

$$\mu_0 = \int_0^x f(t)\,dt$$

que es el área variable encerrada por la curva, los ejes ,y la ordenada de abscisa $t = x$.

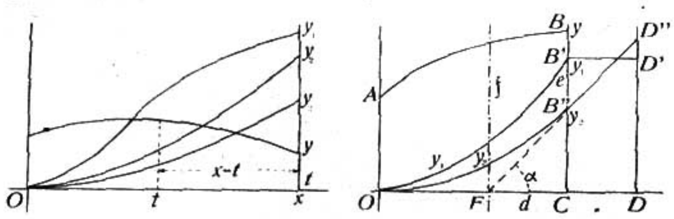
Si llamamos a esa área variable y_1, la nueva integral que da el momento de primer orden es:

$$\mu_1 = \int_0^x y_1\,dt = y_2,$$

valor que podemos calcular gráficamente, integrando la curva y_1 que da el área, como se ha hecho para la función $f(t)$; y si integramos esta curva y_2 en la misma forma obtendremos una nueva curva y_3 en que las ordenadas multiplicadas por 2 dan los momentos de inercia o de segundo orden:

$$\mu_2 = 2 \int_0^x \mu_1\,dx = 2y_3$$

Estas integrales sucesivas es necesario hacerlas partir del eje x, pues todos los momentos son nulos para $x = 0$.



Hasta ahora hemos calculado los momentos con relación a la ordenada extrema que limita a la curva; si queremos calcular los momentos con respecto al eje de abscisa $x = OD$, del área limitada por la curva y la ordenada BC, completaremos la gráfica con el segmento CD. Hasta el punto C sabemos calcular el área y los momentos de cualquier orden. Si por el punto B' trazamos la recta $B'D'$ paralela al eje x, tenemos en la ordenada $DD' = y$, el área limitada por la curva $OABCD$.

Para calcular el momento estático del área $OABCD = OABC$ *hacemos la integral gráfica de la curva* $OB'D'$, *lo que equivale a* trazar la curva integral OB'' como si fuera para hallar el momento con respecto al eje BC y luego prolongarla con la tangente en B'' a dicha curva hasta cortar el eje DD' en un punto D'', de modo que el momento estático viene dado por la ordenada DD''.

Si se prolonga la tangente a la curva OB'' hasta cortar al eje de las t, en la ordenada del punto F está situado el centro de gravedad del área de la curva. En efecto, tomando momentos con respecto al eje f, del área de la curva, resulta: $M = M_e - d.A$, siendo M el momento con respecto al eje f; $M_e =$ momento con respecto al eje e; $A =$ área y d la distancia entre los ejes f y e.

La derivada de y_2 es y_1, luego: $A = y_1 = tg\,\alpha$ y como $d.tg\,\alpha = y_2 = M_e$, resulta: $M = 0$, condición de todo eje que pasa por el centro de gravedad.

Si se tratara de calcular gráficamente los momentos con respecto *a un eje, de una curva cerrada, trazaríamos la curva integral* del arco superior, luego la del inferior; la diferencia de las ordenadas de las dos curvas integrales da el momento buscado.

EJERCICIOS

1. — Calcular $\int x^n e^x dx$ por derivación sucesiva de $\int e^{ax} dx$ respecto del parámetro a.

2. — Construir las gráficas de los momentos sucesivos de $y = 1$ respecto de un eje variable desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

3. — Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a)^2}$ por derivación de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a}$

4. — Calcular por derivación bajo el signo de integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx} \operatorname{sen} x}{x} dx$$

LA LINEA ELASTICA

149. — Ecuación de la línea elástica.

Cuando un sólido con puntos de apoyo está en equilibrio por acción de una o varias fuerzas, se introducen *reacciones* de tales puntos de apoyo, esto es, fuerzas ficticias que aplicadas en ellos equilibran a las fuerzas exteriores. Los apoyos quedan así sustituidos por las respectivas reacciones.

EJEMPLOS. — Una balanza en equilibrio por dos pesos iguales P queda sustituida por una varilla en cuyos extremos hay aplicadas dos fuerzas P hacia abajo, y en su punto medio una fuerza $-2P$, es decir, hacia arriba. Si el propio peso p de la varilla no es despreciable respecto de P, se considera una carga continua, de resultante p, y la reacción en el punto de apoyo será $-(2P+p)$.

Si una viga de peso p apoyada en sus extremos soporta la carga P en su centro, la reacción de los apoyos es $-\frac{1}{2}(P+p)$.

Se admite en la teoría de la elasticidad que en una viga horizontal, sometida a cargas verticales, la fibra que pasa por el centro de gravedad de la sección carece de tensiones, y que la curvatura que adopta en cada punto es proporcional al momento flector M en dicho punto e inversamente proporcional al momento de inercia I de la sección. Es decir, la curvatura viene expresada así:

$$\frac{M(x)}{E.I} = k \, . \, M(x)$$

siendo E el módulo de elasticidad del material.

Recuérdese que el momento flector en un punto ,es el momento estático respecto de un plano vertical que pase por él, de las cargas y reacciones a uno u otro lado del punto.

Si la curvatura es pequeña, caso el más frecuente, es decir, si la línea elástica difiere poco de la recta horizontal puede suponerse $y' = 0$, y tomarse y'' como valor aproximado de la curvatura [ver (86) y (90)].

La ecuación que caracteriza la línea elástica es entonces:

$$y'' = -kM(x)$$

de donde:

$$y' = k \int M dx + C;$$

$$y = -k \int [\int M dx] + Cx + C'$$

Las constantes deberán determinarse según las condiciones del problema.

Ejemplo. — Si se trata de una viga empotrada por el extremo O y cargada con un peso P en el otro extremo l, el momento flector en cada punto x es: $(l - x)P$.

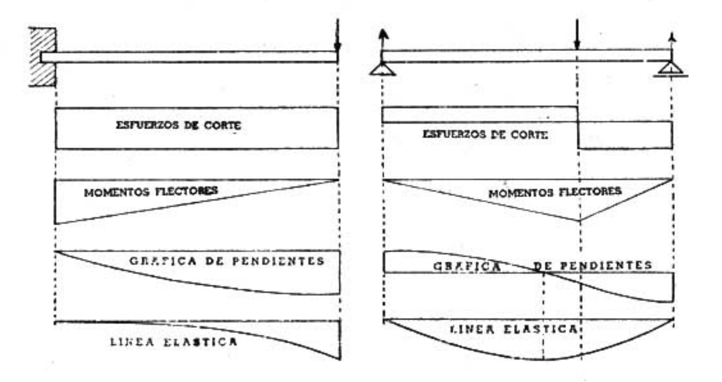
$$y' = -[lx - \tfrac{1}{2}x^2]\, P/EI$$
$$y'' = -(l - x)P/EI$$

la constante es $C = 0$, pues en el punto $x = 0$ es $y' = 0$; luego resulta:

$$y = -[lx^2/2 - x^3/6]\, P/EI$$

parábola cúbica que en la proximidad del origen difiere poco de una parábola ordinaria. La flecha máxima se presenta en el extremo y vale:

$$f = -Pl^3/3EI$$



150. — Construcción de la línea elástica.

Cuando la carga de la viga es continua, suele llamarse carga en cada punto x a la correspondiente a la unidad de longitud en dicho punto x; pero esto, que tiene significado claro cuando la carga es uniforme ,exige una aclaración cuando la carga es variable. En realidad se llama carga en el punto x al límite de la carga correspondiente a un intervalo x, $x + h$ dividida por h; si llamamos $p(x)$ a a carga en el intervalo Ox, lo que se llama *carga unitaria* en el

punto x no es sino el límite de la carga media en un intervalo indefinidamente pequeño, es decir: la carga en el punto x (que no debe confundirse con una posible *carga aislada* en él) se define así:

$$\text{lím. } [p(x+h) - p(x)]/h = p'(x),$$

es decir, la derivada de la carga total respecto del intervalo.

Por tanto, dibujada la línea de cargas, $y = f(x)$, el esfuerzo cortante en cada punto x, esto es, la resultante de las cargas del intervalo Ox, no es sino la función integral:

$$p(x) = \int_0^x f(x)\,dx,$$

esto es, el área de la curva hasta el punto x, debiendo agregarse a esta área las reacciones de los apoyos, a la izquierda del punto x; o lo que es lo mismo, el esfuerzo de corte es también igual a

$$\int_l^x f(x)dx,$$

más las reacciones de los apoyos a la derecha del punto x.

La curva de esfuerzos cortantes es, por tanto, la integral:

$$y_1 = \int_0^x f(x)\,dx$$

de la función de cargas, siendo la constante en el punto O la reacción en este punto, cuando no esté libre.

La curva de momentos flectores viene dada por la integral:

$$\int_0^x f(t)\,(x-t)\,dt \quad \text{o sea:} \quad y_2 = \int_0^x y_1\,dx$$

función a la que debe agregarse el momento de las reacciones a la izquierda del punto variable x. También puede expresarse dicho momento flector por la integral a la derecha, más los momentos de las reacciones a la derecha. En el punto O, la constante es igual al momento total de la viga respecto de O.

La tercera integral:

$$y_3 = \int_0^x y_2\,dx$$

multiplicada por la constante $1/EI$ representa la derivada y' de la función y que define la curva elástica; es decir, las pendientes en los diversos puntos de la línea elástica, o también las tangentes trigonométricas de los ángulos de giro que forman con su posición inicial las secciones normales de la viga; y como son ángulos pequeños, las ordenadas y' miden aproximadamente dichos ángulos de giro.

Finalmente, la cuarta integral:

$$y_4 = \int_o^x y_3 \, dx$$

multiplicada por $1/EI$ representa la línea elástica.

Con el intégrafo se obtiene, pues, rápidamente, sin más que integrar cuatro veces sucesivas: 1.°) la línea de esfuerzos cortantes; 2.°) la línea de momentos flectores; 3.°) la línea de inclinaciones; 4.°) la línea elástica.

La única dificultad de encontrar la constante en el punto O se resuelve como hemos indicado para la línea de esfuerzos y la de momentos; para la línea de pendientes, suele conocerse el punto en que la tangente es horizontal y en él es nula la pendiente, quedando así determinada la constante. Para la línea elástica, se conocen puntos de apoyo, y en ellos es nula la ordenada de la curva.

REGLA PRÁCTICA. — Se construye cada vez la curva integral a partir de cualquier punto; por el de la curva obtenida, cuya ordenada debe ser nula, según las condiciones del problema, se traza el eje x y la curva queda referida a él; pudiéndose integrar de nuevo para pasar a la curva siguiente. O bien, si se conoce en un punto el verdadero valor K de la ordenada, se traza el eje x paralelamente y a la distancia K.

Si hay alguna carga aislada P hay que sumar P a las ordenadas de la 1.ª integral al llegar a ese punto, y resulta una gráfica discontinua, pero la 2.ª integral, que representa los momentos flectores, es siempre continua.

Cuando sólo hay cargas aisladas, la 1.ª gráfica es una línea escalonada, de segmentos horizontales.

EJEMPLO. — Viga apoyada en sus extremos, con carga central.

Si la carga en el punto medio es P, las reacciones en los extremos son: $P/2$.

Momentos:

$$y = -\tfrac{1}{2}Px;$$

Llamando $k = 1/EI$, la pendiente de la línea elástica es:

$$y = k \int -\tfrac{1}{2}\, Px dx = (-Px^2/4 + Pl^2/16)\, k$$

Línea elástica:

$$y = -Pk(x^3/12 - l^2x/16)$$

NOTA. — Por simetría, basta hacer la construcción en la mitad de la izquierda.

Caso más general: carga no central. En la fig. 2.ª está resuelto por integración gráfica, omitiendo trazados auxiliares. Las reacciones se determinan por la ley de las fuerzas paralelas.

EJERCICIOS

1. — Calcular y construir la línea elástica de la viga empotrada en un extremo y cargada con dos pesos.

2. — Viga apoyada en sus extremos con dos cargas simétricas.

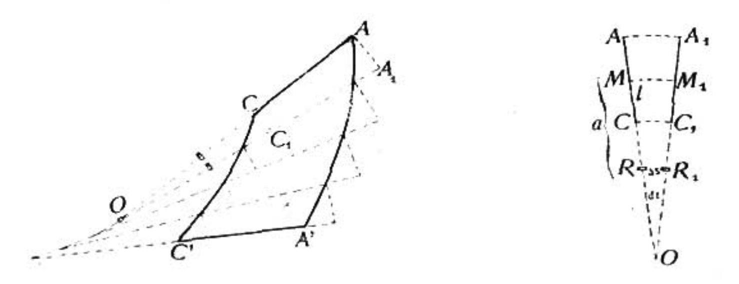
PLANIMETROS E INTEGRADORES

151. — Planímetros polares y lineales.

Son aparatos que dan al área de un recinto plano cualquiera recorriendo su contorno con un índice en uno u otro sentido.

El planímetro de Amsler, que es el más sencillo y práctico, consta de una varilla $A\,C\,R$ provista en su extremo de una ruedecilla R perpendicular a la varilla.

Con el punto A se describe el contorno del recinto cuya área se desea; el punto C está sujeto a moverse sobre una línea fija que es circunferencia o recta según se trate del tipo de planímetro *polar* o *lineal*. Uno y otro se fundan en el mismo principio, que exponemos a continuación.



Si una varilla de longitud $l = AC$ lleva una ruedecilla R en cualquier punto (*), que rueda sobre el plano al moverse la varilla, el área barrida por esta varilla es el límite de la suma de los trapecios circulares determinados por cada dos posiciones, cuando éstas tienden a confundirse. El arco central del trapecio mide:

$$OM\,.\,dt = OR\,.\,dt + RM\,.\,dt = \Delta s + a\,.\,dt$$

siendo Δs el arco rodado por R y llamando $a = RM$.

(*) En los modelos corrientes, la ruedecilla no tiene el centro en la misma varilla, sino que está montada en un eje paralelo en un pequeño bastidor. Este corrimiento no altera el arco girado en la traslación ni en el giro.

La suma de áreas de los trapecios es, por tanto:

$$\Sigma l \,.\, OM \,.\, dt = l\, s_i + la\, t$$

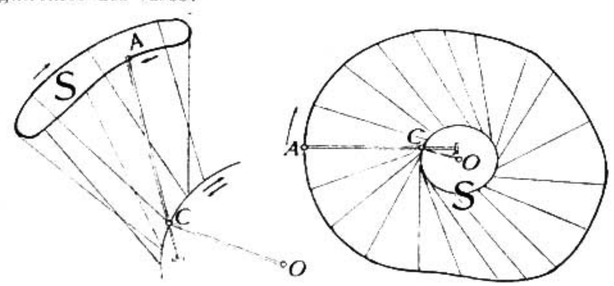
siendo s_i el arco total rodado por la ruedecilla en ese movimiento escalonado de la varilla; pues en los movimientos de deslizamiento sin rotación, para pasar, p. ej., de $A_1\,C_1$ a $A_2\,C_2$ no rueda R.

Si se consideran posiciones intermedias y se repite el movimiento escalonado, el límite del primer miembro es el área barrida por la varilla, o sea el área del trapecio curvilíneo $ACC'A'$, y en el segundo miembro, lat es siempre el producto de la por el ángulo total t girado por la varilla; luego s_i tiene límite. Este límite es precisamente la longitud s del arco rodado por R al recorrer A la curva AA'. Por consiguiente:

El área barrida por la varilla de longitud l es: $ls + lat$.

PLANÍMETRO POLAR. — El punto C de la varilla está obligado a describir un arco de circunferencia, para lo cual está sujeto por una varilla a un centro fijo O.

Según la posición y tamaño del área que se trata de medir, distinguiremos dos casos:



Primer caso. — El punto C describe un arco exterior al área. El ángulo total t descrito por la varilla l es nulo, pues vuelve a su posición inicial sin haber descrito una circunferencia completa.

El área engendrada por la varilla l se puede considerar como límite de la suma de trapecios circulares, es decir, por la integral de la expresión [1], luego resulta:

El área engendrada por la varilla de longitud l es ls.

Ahora bien: el área total descripta por l se compone de una parte descripta dos veces en sentido contrario (y por tanto de suma nula)

más el área descripta una sola vez. Resulta por tanto: $S = ls$; es decir:

El área del recinto es el producto del brazo l por el arco descripto por la rueda R, al recorrer con el índice su contorno.

Este arco s se obtiene haciendo una lectura inicial en el tambor graduado de la rueda R y otra lectura final al volver al punto de partida. La diferencia entre ambas lecturas es s; las dimensiones de la rueda y la varilla son tales que cada centésima de circunferencia por l es 1 cm². (*)

Segundo caso. — El punto C describe una circunferencia interior a S. Entonces el ángulo girado por l es 2π, y tenemos:

Area engendrada por l es: $ls + 2\pi\, al$.

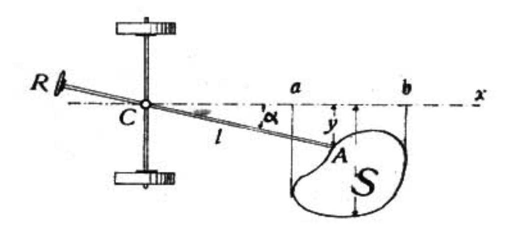
El área S es igual a ésta más el círculo de radio r; luego:

El área del recinto se deduce sumando al producto l . s la constante

$$C = \pi r^2 + 2\pi\, al.$$

Esta constante está dada en el aparato, y no es preciso calcularla.

PLANÍMETRO LINEAL. — Se distingue del polar en que el punto C está sujeto al eje de un carro que se mueve en el plano en una dirección x. Como al recorrer A la curva, describe C un segmento rectilíneo dos veces en sentido contrario, la fórmula es la misma del primer caso, esto es: $S = ls$.



Puede llegarse a este mismo resultado y al cálculo de momentos, como se indica a continuación.

(*) Por tanto, cada unidad de el nonio representa 10 mm². En muchos modelos puede hacerse variar la longitud l y para algunos de sus valores viene dada la unidad de área que corresponde a cada unidad de arco de la ruedecilla.

152. — Integradores.

El área, el momento estático y el momento de inercia de un recinto respecto del eje x, vienen definidos por las integrales:

$$S = \int (y_2 - y_1) dx = \int y \cdot dx$$

$$M = \int dx \int y \cdot dy = {}^1\!/_2 \int (y_2^2 - y_1^2) dx = {}^1\!/_2 \int y^2 \cdot dx$$

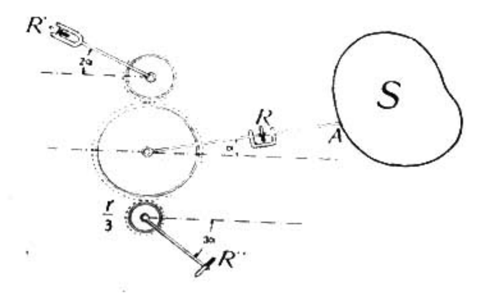
$$I = \int dx \int y^2 \cdot dy = {}^1\!/_3 \int (y_2^3 - y_1^3) dx = {}^1\!/_3 \int y^3 \cdot dx$$

entendiendo que en estas tres integrales finales x varía de a a b, tomando como valor y la ordenada superior y_2 y después varía x de b a a, tomando la ordenada inferior y_1 (*).

Fundamentos de los integradores. — Poniendo $y = l \cdot \operatorname{sen} \alpha$, basta integrar las tres funciones $\operatorname{sen} \alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen}^3 \alpha \cdot dx$, que son combinaciones lineales sencillas de $\operatorname{sen} \alpha \cdot dx$, $\cos 2\alpha \cdot dx$, $\operatorname{sen} 3\alpha \cdot dx$, por ser:

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2 \alpha.$$

$$4 \operatorname{sen}^3 \alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3 \alpha$$



y estas integrales vienen medidas por las ruedecillas R, R', R'', cuyos ejes tienen las inclinaciones α, $\pi/2 - 2\alpha$, 3α, respecto del eje x, gracias al engranaje, indicado en la figura, de las tres ruedas de radios r, $½r$, $⅓r$.

Si los arcos rodados por las tres ruedecillas son s, s', s'', el área y los momentos de 1.° y 2.° orden son, respectivamente:

$$S = ls \quad ; \quad M = -{}^1\!/_4\, l^2 s' \quad ; \quad I = {}^1\!/_{12} l^3 (3s - s'')$$

(*) Más adelante estudiaremos sistemáticamente estas integrales, llamadas *curvilíneas*.

CAPITULO VI

FUNCIONES PERIODICAS Y SERIES DE FOURIER

Lección 40

FUNCIONES PERIODICAS

153. — Definiciones y clasificación.

Una función $f(t)$ se dice *periódica,* de período T, cuando para todo valor de t satisface a la condición:

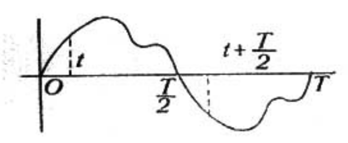
$$f(t+T)=f(t) \qquad T = \text{período.}$$

y no hay ningún $T' < T$ con igual propiedad.

La parte de curva correspondiente a un período cualquiera se llama *onda* y basta estudiar una onda, puesto que todas son iguales.

Función periódica alternada es la que tiene un *semiperíodo;* llamando así al número $\frac{1}{2}T$, si cumple la condición:

$$f(t+\tfrac{1}{2}T)=-f(t)$$



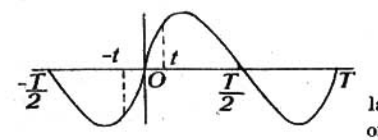
Cada onda se compone de dos semiondas; una se deduce de la otra por traslación y simetría.

Ejemplo: sen t, pero no tg t.

Períodos respectivos: 2π y π.

Función par es la que tiene las ondas simétricas respecto del eje y, es decir: $f(-t)=f(t)$.

Ejemplos: $\cos t$, $\text{sen}^2\, t$.



Períodos respectivos: 2π y π.

Función impar la que tiene las ondas simétricas respecto del origen, es decir: $f(-t)=-f(t)$.

Tales son, por ejemplo: sen t y tg $\frac{1}{2}t$. El período de ambas es 2π.

154. — Funciones armónicas o sinusoidales.

Se llaman así las del tipo:

$$y = k \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

El argumento $\omega t + \alpha$ se llama *fase*; y el valor α que éste toma para $t = 0$ es la *fase inicial;* si la fase inicial es nula, la gráfica pasa por el origen de coordenadas.

El valor máximo de la función es el número k y se llama *amplitud* de la onda o de la función; el *período, o longitud de onda* es $T = 2\pi/\omega$; el número de ondas o períodos contenidos en el segmento 2π es $\omega = 2\pi/T$, entero o no, y se llama *pulsación*.

La gráfica de una función sinusoidal es, pues, una sinusoide cuyas ordenadas están ampliadas en la proporción $k:1$, y las abscisas reducidas en la razón $1:\omega$.

NOTA. — El movimiento vibratorio de un punto sobre una recta está representado por una función periódica $y = f(t)$ del tiempo; el segmento y, abscisa del punto móvil sobre la recta, se llama *elongación*. Si t se expresa en segundos, y T es el período, se llama *frecuencia* al número $n = 1/T$ de ondas contenidas en la unidad de tiempo, es decir: *número de vibraciones completas por segundo.* Aproximadamente puede suponerse entero.

Cuando la función periódica es sinusoidal, el movimiento vibratorio se llama *armónico*. Puesto que t se expresa en segundos, ω representa la velocidad angular por segundo (véase la representación polar) y sustituyendo

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi n$$

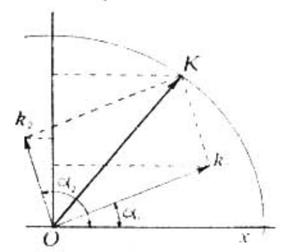
la función se transforma así:

$$y = k \cdot \operatorname{sen}(2\pi n t + \alpha)$$

Estas funciones sinusoidales son las más frecuentes en Física, sobre todo en Electrotécnica. Si, por ejemplo, un circuito rectangular gira alrededor de un eje de su plano en un campo magnético, se engendra en el circuito una fuerza electromotriz de signos alternados cuyo valor es: $e = k \cdot \operatorname{sen} \omega t$.

155. — Representación polar de las funciones sinusoidales.

Aunque estas nociones no corresponden a un curso de Cálculo, resumiremos algunas relativas a las funciones sinusoidales (*).



Si sobre una circunferencia de radio k se mueve un punto con velocidad angular constante ω, en el momento t habrá descrito el radio vector un ángulo ωt y la proyección del punto sobre el eje y es el punto de abscisa $y = k \cdot \operatorname{sen} \omega t$.

(*) V. p. ej. nuestro *Curso cíclico de Matemáticas*, tomo I. "Las magnitudes y las funciones elementales". Buenos Aires, 1924.

Al girar el punto con movimiento uniforme tenemos sobre el eje y un movimiento vibratorio sinusoidal cuya ecuación es $y = k \,.\, \text{sen}\, \omega t$. Si la fase inicial no es nula, sino α, la ecuación del movimiento es $y = k \,.\, \text{sen}(\omega + \alpha)$.

Dadas varias funciones sinusoidales de igual período, con amplitudes y fases distintas:

$$k_1 . \text{sen}(\omega t + \alpha_3) + k_2 . \text{sen}\,(\omega t + \alpha_2) + \ldots . + k_n . \text{sen}(\omega t + \alpha_n)$$

si las representamos en el momento $t = 0$ por los respectivos vectores de módulos k_1, k_3, ... k_n y construímos el vector resultante K, la ordenada de su extremo A es la suma de las ordenadas de los extremos de los n vectores: por tanto, dicha ordenada y es la suma de las n funciones en el momento t. Al variar t, tenemos un movimiento vibratorio del punto Y sobre el eje y, que representa el movimiento vibratorio resultante, suma de los n movimientos dados.

156. — Descomposición de funciones en armónicos.

Dada una función periódica cualquiera $y = f(t)$, si su período es T, haremos un cambio de variable $x = 2\pi t/T$; $t = xT/2\pi$, para que su período se convierta en 2π. Hecho esto, tiene importancia capital descomponerla en suma de funciones sinusoidales cuyas pulsaciones sean 1, 2, 3, ..., (o sea períodos divisores de 2π), es decir:

$$f(x) = k_0 + k_1 . \text{sen}(x + \alpha_1) + k_2 . \text{sen}(2x + \alpha_2) + \\ + \ldots . + k_n . \text{sen}(nx + \alpha_n)$$

Por analogía con la Acústica se dice: descomponer una onda en ondas *armónicas* o en *armónicos sucesivos;* pero en general no es posible descomponerla en una suma de finito número de sumandos.

La primera función $\text{sen}(x + \alpha_1)$ que tiene el mismo período 2π que $f(x)$ se llama armónico *fundamental*; las siguientes se llaman armónicos 2.°, 3.°, 4.°, ..., y sus períodos son:

$$\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \ldots\ldots \frac{2\pi}{n}.$$

El desarrollo en armónicos sucesivos puede descomponerse así:

$$f(x) = k_0 + k_1 . \text{sen}\, \alpha_1 . \cos x + k_2 . \text{sen}\, \alpha_2 . \cos 2x + \ldots . \\ + k_1 . \cos \alpha_1 . \text{sen}\, x + k_2 . \cos \alpha_2 . \text{sen}\, 2x + \ldots .$$

y si llamamos a los coeficientes desconocidos:

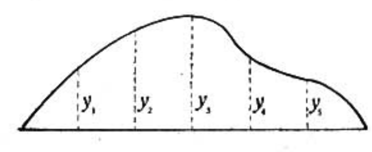
$$k_1 . \text{sen}\, \alpha_1 = a_1 ;\; k_1 . \cos \alpha_1 = b_1 ;\; k_2 . \text{sen}\, \alpha_2 = a_2 ;\; k_2 . \cos \alpha_2 = b_2 ; \ldots$$

el problema se reduce a encontrar el desarrollo siguiente, llamado polinomio trigonométrico de orden n:

$$f(x) = k_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots$$
$$\dots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

INTERPOLACIÓN TRIGONOMÉTRICA. — Es análoga a la algebraica (Lecc. 22); dada una función $f(x)$ se trata de formar una suma de n armónicos con coeficientes tales que la función formada coincida con $f(x)$ para n valores equidistantes. Veamos en un ejemplo, cómo se calculan los coeficientes indeterminados.

Sea una función alternada de período 2π, es decir, tal que al incrementar en π cambia de signo; podemos, pues, suponer nulos los coeficientes pares y calcular solamente términos impares, para que al incrementar en π los senos y cosenos cambien de signo.



$$\frac{1\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{6\pi}{6}$$

Formemos una función de seis términos:

$$a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_3 \cos 3x + $$
$$+ b_3 \operatorname{sen} 3x + a_5 \cos 5x + b_5 \operatorname{sen} 5x$$

que coincida con $f(x)$ en los puntos indicados en la figura.

Recordando los senos y cosenos de 30°, 60°, etc., se tienen estas condiciones:

$$y_1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, a_1 + \tfrac{1}{2} b_1 + b_3 - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, a_5 + \tfrac{1}{2} b_5$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, b_1 - a_3 + \tfrac{1}{2} a_5 - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, b_5$$
$$y_3 = b_1 - b_3 + b_5$$
$$y_4 = - \tfrac{1}{2} a_1 + \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, b_1 + a_3 - \tfrac{1}{2} a_5 - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, b_5$$
$$y_5 = - \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, a_1 + \tfrac{1}{2} b_1 + b_3 + \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, a_5 + \tfrac{1}{2} b_5$$
$$0 = a_1 + a_3 + a_5$$

Sumando y restando estas ecuaciones convenientemente, resulta:

$$y_1 + y_5 = b_1 + 2b_3 + b_5$$
$$y_2 + y_4 = \sqrt{3}\, b_1 - \sqrt{3}\, b_5$$
$$y_1 + y_5 - y_3 = 3b_3 \qquad \therefore \quad b_3 = (y_1 + y_5) : 3$$
$$y_1 - y_5 = \sqrt{3}\, a_1 - \sqrt{3}\, a_5$$
$$y_2 - y_4 = a_1 - 2a_3 + a_5$$
$$y_2 - y_4 - 0 = - 3a_3 \qquad \therefore \quad a_3 = -(y_2 - y_4) : 3$$

Sustituyendo estos valores a_3 y b_3 se despeja:

$$b_1 + b_5 = y_1 + y_5 - 2b_3 = (y_1 + y_5 + 2y_3) : 3$$
$$b_1 - b_5 = (y_2 + y_4) : \sqrt{3}$$
$$a_1 + a_5 = y_2 - y_4 + 2a_3 = (y_2 - y_4) : 3$$
$$a_1 - a_5 = (y_1 - y_5) : \sqrt{3}$$

Sumando y restando cada par de ecuaciones, salen los siguientes valores para los coeficientes:

$$a_1 = [(y_2 - y_4) + \sqrt{3}(y_1 - y_5)] : 6$$
$$b_1 = [(y_1 + y_5 + 2y_3) + \sqrt{3}(y_2 + y_4)] : 6$$
$$a_2 = -(y_2 - y_4) : 3$$
$$b_2 = (y_1 + y_5 - y_3) : 3$$
$$a_5 = [(y_2 - y_4) - \sqrt{3}(y_1 - y_5)] : 6$$
$$b_5 = [(y_1 + y_5 + 2y_3) - \sqrt{3}(y_2 + y_4)] : 6$$

Calculados estos coeficientes dibujaremos la curva que resulta de sumar estos senos y cosenos, la cual pasa por los 12 puntos fijados en la onda, y en los intervalos diferirá algo de ella. Si esta discrepancia es tolerable, el problema queda resuelto. Si no basta, dividiremos en mayor número de partes, para obtener mejor aproximación.

NOTA. — Pueden darse fórmulas generales para la resolución del sistema de ecuaciones; llamando $\alpha = \pi/m$, resulta:

$$m a_n = \Sigma y_k \cos kn\alpha$$
$$m b_n = \Sigma y_k \operatorname{sen} kn\alpha$$

dando a k los valores $0, 1, 2, \ldots, 2m - 1$.

Si el número m de intervalos en que se divide el intervalo $(0, \pi)$ va creciendo, las sumas tienen como límites las respectivas integrales y resultan las fórmulas que estudiaremos en la próxima lección.

El tránsito de la fórmula de interpolación que da una función *aproximada*, a la expresión de la función *exacta* por una serie se logra, pues, intercalando puntos intermedios equidistantes. En cambio, de la fórmula de interpolación de Newton (93) a la de Taylor, que también da la función exacta en cierto entorno de x_0, se pasa haciendo tender $x_1, x_2, \ldots$ hacia x_0.

EJERCICIOS

1. — Obtener aproximaciones sucesivas, dividiendo el intervalo $(0,2\pi)$ en 2, 4, 6 partes, de la función:

$$y = \pi/4 \text{ para } 0 < x < \pi$$
$$y = -\pi/4 \text{ para } \pi < x < 2\pi$$

2. — Idem para el ejemplo 1.° de la lección siguiente.

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE TRIGONOMETRICA

157. — Planteo del problema.

La descomposición aproximada de una función periódica $f(t)$ en n armónicos, es decir: la descomposición de $f(t)$ en suma de senos y cosenos de arcos múltiplos sucesivos, si bien puede ser suficiente en algunos problemas de la técnica, no es satisfactoria en general ,porque el grado de aproximación logrado sólo puede calcularse *a posteriori;* y si no es suficiente, precisa reanudar otra, con mayor número de divisiones del intervalo.

Suponiendo reducido el período T al 2π por el cambio de variable $x = 2\pi t/T$, vamos a abordar el problema de la descomposición *exacta* de $f(x)$ en infinitos armónicos, o sea el desarrollo en serie trigonométrica:

$$f(x) = k_0 + a_1 . \cos x + b_1 . \operatorname{sen} x + a_2 . \cos 2x + b_2 . \operatorname{sen} 2x + \ldots \qquad \ldots + a_n . \cos nx + b_n . \operatorname{sen} nx + \ldots \quad [1]$$

Con método analítico, supongamos que $f(x)$ admite tal desarrollo en serie, integrable término a término, y veamos que los coeficientes están unívocamente determinados, calculando para ello algunas integrales elementales.

158. — Integración de productos de senos y cosenos.

Recordando el desarrollo de senos y cosenos de sumas y diferencias y suponiendo enteros los coeficientes m y n, resultan inmediatamente:

Para integrar productos de senos y cosenos de múltiplos de t los transformaremos en suma o diferencia de senos o cosenos:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx . \cos nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx . \cos nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]\, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx . \operatorname{sen} nx . dx = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x]\, dx = 0$$

puesto que las funciones primitivas son senos o cosenos, que toman igual valor en 0 y en 2π.

Sólo un caso hay en que el resultado de las dos últimas integrales no es nulo; cuando sea: $m = n$; pues siendo $\cos(m-n)t = 1$, resulta de las fórmulas anteriores:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx \,.\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx = \pi$$

159.—Cálculo de los coeficientes de Fourier.

Supuesto el desarrollo [1] de $f(x)$ en serie integrable, veamos cómo se determinan muy fácilmente sus coeficientes.

Para calcular k_0 integraremos ambos miembros entre 0 y 2π, y en el segundo miembro se anulan todas las integrales (según el párrafo anterior) excepto la primera, que vale $2\pi k_0$. Por tanto:

$$2\pi\, k_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \qquad [2]$$

o sea: k_0 = valor medio de $f(x)$ en el intervalo $(0{,}2\pi)$.

Para calcular a_n multiplicaremos ambos miembros por $\cos nx$ e integrando se anulan todos los términos excepto el a_n y resulta:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \,.\, \cos nx \,.\, dx = \int_0^{2\pi} a_n \,.\, \cos^2 nx \,.\, dx = a_n\, \pi.$$

Análogamente para determinar b_n multiplicamos por $\operatorname{sen} nx$ e integrando obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, \operatorname{sen} nx \,.\, dx = \int_0^{2\pi} b_n \,.\, \operatorname{sen}^2 nx \,.\, dx = b_n\, \pi.$$

Despejando a_n y b_n obtenemos las fórmulas generales:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \,.\, \cos nx \,.\, dx \quad ; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \,.\, \operatorname{sen} nx \,.\, dx \qquad [3]$$

Cada coeficiente de la serie de Fourier viene dado, por consiguiente, por una integral en el intervalo $(0{,}2\pi)$ que puede calcularse con la fórmula de Simpson, con el intégrafo o gráficamente. Hay aparatos especiales, compuestos de varios intégrafos que dan mecánicamente los coeficientes sucesivos; se llaman *analizadores armónicos* y de ellos nos ocuparemos después.

Resulta, pues, que si $f(x)$ es desarrollable en serie integrable [1] tal desarrollo es único; y sus coeficientes vienen dados por las fórmulas [2] y [3]. Ahora bien: dada una función $f(x)$ periódica, ¿cómo reconocer *a priori* si admite o no tal tipo de desarrollo?

Podemos calcular los números [2] y [3] que llamaremos *coeficientes de Fourier* de la función (en abreviatura: c. F.) podemos formar con ellos la *serie de Fourier* (en abreviatura: s. F.); pero, ¿cómo probar su convergencia y, lo que es mucho más fifícil, sumarlas y demostrar que tal suma es precisamente $f(x)$?

Afortunadamente para todos los que precisan este maravilloso instrumento analítico, sin poder estudiar a fondo su difícil teoría, el criterio práctico (que demostramos en las Notas) es sencillísimo.

160. — Desarrollos de tipos especiales.

Se abrevia notablemente el cálculo de coeficientes cuando la función es de estructura especial.

Observemos ante todo que se puede tomar como intervalo de integración $[-\pi, +\pi]$ en lugar de $[0,2\pi]$; pues por la periodicidad del integrando, resulta la descomposición:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx . ax = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{0}$$

y análogamente para la fórmula que expresa b_n.

1.° Si $f(x)$ es *impar*, es decir, $f(-x) = -f(x)$, el integrando $f(x) \cos nx$, toma en $[-\pi,0]$ valores opuestos a los que toma en $[0,\pi]$, luego las dos integrales son opuestas y resulta $a_n = 0$. Por tanto:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = 0,$$

es decir: *El desarrollo de una función impar, sólo contiene senos.*

2.° Si $f(x)$ es *par*, es decir, $f(-x) = f(x)$, el integrando $f(x)$ sen nx toma en $[-\pi,0]$ valores opuestos a los de $[0,\pi]$, por causa del factor sen nx, luego resulta nula la integral que expresa b_n. Por tanto:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots\ldots = 0,$$

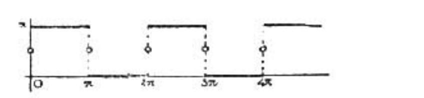
es decir: *El desarrollo de una función par sólo contiene cosenos.*

Si $f(x)$ es *alternada*, esto es: $f(x + \pi) = -f(x)$, resulta que al incrementar x es π, si n es número par queda el arco incrementado en múltiplo de 2π; luego tanto cos nx como sen nx toman el mismo valor, mientras que $f(x)$ toma el opuesto y por tanto las integrales que definen a_n y b_n son nulas. Es decir:

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \ldots\ldots = 0$$
$$b_2 = b_4 = b_6 = \ldots\ldots = 0$$

El desarrollo de una función alternada sólo contiene múltiplos impares de la variable.

EJEMPLO 1.° — Sea la función periódica representada en la figura; se tiene:



$$a_0 = \pi/2$$

$$a_n = \int_0^\pi \cos nt \,.\, dt + 0 = 0$$

$$b_n = \int_0^\pi \operatorname{sen} n\,t\,dt + 0$$

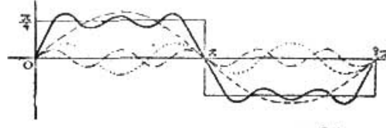
y siendo esta última igual a $2/n$ o bien nula, según que n sea impar o par, resulta el desarrollo:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2 \,.\, \operatorname{sen} t}{1} + \frac{2 \,.\, \operatorname{sen} 3\,t}{3} + \frac{2 \,.\, \operatorname{sen} 5\,t}{5} + \ldots\ldots$$

Se observa que para $t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \ldots\ldots$ resulta $y = \pi/2$, es decir: el promedio de los dos límites a derecha e izquierda.

En cambio, para $t = \pi/2$, resulta: $y = \pi$.

EJEMPLO 2.° — Sea la onda:



$$y = \pi/4 \quad \text{entre} \quad 0 < x < \pi$$
$$y = -\pi/4 \quad \text{para} \quad \pi < x < 2\pi$$

El desarrollo sólo contiene senos de múltiplos impares, por ser la función impar y alternada:

$$y = \operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 3\,t}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5\,t}{5} + \ldots\ldots$$

En la figura se han dibujado los tres primeros términos y su suma, para ver como se va aproximando a la función dada, al tomar términos sucesivos de la serie.

EJEMPLO 3.° — Sea la función definida por los segmentos de paralelas a la bisectriz trazados por los puntos $2n\pi$.

Por ser función impar (es decir: $f(-t) = -f(t)$) el desarrollo sólo contendrá senos. Calculados los coeficientes, resulta fácilmente:

$$f(t) = \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 2\,t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\,t}{3} - \ldots$$

Y aquí también se ve que para $t = \pi,\ 3\pi\ \ldots\ldots$ resulta $y = 0$, es decir, el promedio de la discontinuidad.

EJEMPLO 4.° — Efectúense los desarrollos de estas funciones:

$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\ldots$$

$$|\,x\,| = \tfrac{1}{2}\,\pi - (4/\pi)\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\ldots\right)$$

−π O π 2π   −π O π 2π

161. — Analizadores armónicos.

Son aparatos que determinan automáticamente los primeros coeficientes del desarrollo en serie de cualquier función continua, con un número finito de máximos y mínimos en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para poder realizar simultáneamente la multiplicación de $f(x)$ por el coseno o seno de $n\,x$, y la integración entre 0 y 2π, transformaremos por partes las integrales que expresan los coeficientes, en esta forma:

$$n \int y.\cos n\,x.dx = \int y.d(\operatorname{sen} n\,x) = y.\operatorname{sen} n\,x - \int \operatorname{sen} n\,x.dy$$

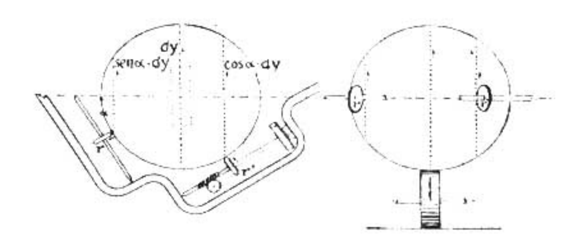
$$n \int y.\operatorname{sen} n\,x.dx = -\int y.d(\cos n\,x) = -y.\cos n\,x + \int \cos n\,x.dy$$

luego integrando entre 0 y 2π y dividiendo por π resulta:

$$n\pi a_n = -\int_{x=0}^{x=2\pi} \operatorname{sen} n\,x.dy; \quad n\pi b_n = \int_{x=0}^{x=2\pi} \cos n\,x.dy$$

debiendo extenderse ambas desde $x = 0$ hasta $x = 2\pi$.

El cálculo de estas integrales se efectúa mediante una esfera que gira alrededor de un diámetro horizontal paralelo al eje x.



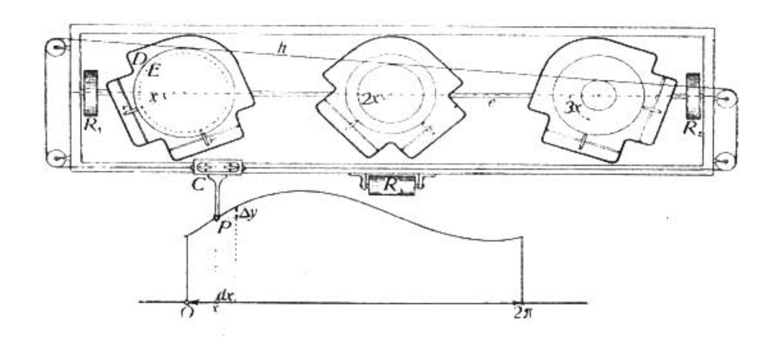
En un bastidor horizontal hay dos ejes perpendiculares entre sí que llevan sendas ruedecillas r y r' las cuales tocan a la esfera en puntos del círculo máximo horizontal. La sección por este plano horizontal está representada por la fig. 1.ª y la sección vertical en la fig. 2.ª. Debajo de la esfera y tangente a ella hay un disco de ancha llanta; si éste gira un arco Δy, también la circunferencia meridiana de la esfera gira Δy en sentido contrario, y los puntos de contacto de las ruedecillas $r\,r'$ describen sobre la esfera circunferencias menores, paralelas a dicho meridiano; las longitudes de estos arcos de circunferencia son proporcionales a los radios respectivos, luego al girar Δy la esfera, la ruedecilla r *gira* $\operatorname{sen} \alpha.\Delta y$, *y la ruedecilla* r' *gira* $\cos \alpha.\Delta y$.

Bastará, pues, un mecanismo que obligue al bastidor a girar en su plano horizontal de modo que en todo momento sea: $\alpha = n\,x$; y como la variable independiente es y, siendo por tanto $\Delta y = dy$, el arco total girado por r será la integral definida que figura en a_n, así como la ruedecilla r' marcará como arco total girado la integral que figura en b_n.

Estos números leídos directamente en las graduaciones que acompañan a r y r', bastará dividirlos por $n\pi$, para tener los coeficientes a_n y b_n.

El aparato determinará tantos pares de coeficientes como esferas tenga, (en la figura se han representado tres esferas solamente). El término constante a_0 del desarrollo se determina por un planímetro o intégrafo, puesto que su significado es el área limitada por la onda con el eje x, dividida por 2π.

Descripción del modelo Henrici-Coradi. — Consta de un gran bastidor provisto de tres ruedas R_1, R_2, R_3, de modo que se mueve solamente en dirección perpendicular al eje x; sobre uno de los lados de este bastidor se mueve en un intervalo 2π un carrito el cual lleva unido un estilete P que permite recorrer la curva dada. Al pasar desde el punto P al P', el carrito se ha movido Δx sobre el gran carro y éste a su vez se ha movido Δy en la dirección del eje y; los discos situados debajo de las esferas, las cuales van invariablemente unidas al eje e de las ruedas R_1, R_2 giran como éstas Δy (*) y esta rotación es trasmitida a las esferas, y de éstas a las respectivas ruedecillas r, r'.



Al comenzar a recorrer la onda, desde la posición extrema P_0 del carrito, todos los bastidores están dispuestos de modo que la ruedecilla r de cada uno toca en el diámetro de giro de las esferas, es decir, de modo que el ángulo α de la figura es nulo. Bastará, pues, que al avanzar x el carrito, el valor de α en cada bastidor sea respectivamente x, $2x$, $3x$, $4x$, ... y esto se consigue fácilmente, porque el carrito lleva atado en sus extremos un hilo de plata que hace girar los bastidores mediante poleas situadas horizontalmente en la parte superior del aparato ,formando cuerpo con dichos bastidores y cuyos radios son, respectivamente, 1, 2, 3, ..., de modo que la primera polea da justamente una vuelta, al avanzar 2π el hilo; y cuando éste avanza x, la polea, y con ella el bastidor que soporta las ruedecillas $r\,r'$) gira un ángulo $\alpha = x$; el bastidor de la segunda esfera gira un ángulo $2x$; el tercero gira $3x$; etc.

En resumen, los coeficientes a_1, b_1; a_2, b_2; .... se obtienen dividiendo las lecturas en las ruedecillas del primero, segundo, ... bastidor por 1, 2, 3, ...

(*) Si, como suele suceder, estos discos de eje e tienen menor radio que las ruedas R_1, R_2, el arco girado no será Δy sino $h\,\Delta y$ siendo h la razón de los radios y en vez de multiplicar por $1/\pi$ las lecturas finales en r y r', la constante será distinta; para cada aparato la graduación de las ruedas r, r' está hecha teniendo en cuenta esta constante, de modo que basta una simple lectura.

COMPLEMENTOS DE CALCULO INTEGRAL

1. — Lema de Borel.

He aquí una sencilla propiedad de los intervalos *completos* $[a,b]$ que no vale para los incompletos, y que por efectuar el tránsito de lo infinito a lo finito, es muy útil en Análisis.

Si cada punto de un intervalo completo $[a,b]$ *tiene un entorno, hay un número finito de éstos, tales que cada punto del intervalo tiene alguno de ellos como entorno.* (BOREL).

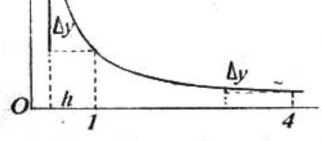
Supongamos, por el absurdo, que para todo conjunto finito de tales entornos e haya puntos x no cubiertos; bisecado $[a,b]$, en alguna de sus mitades $[a_1, b_1]$ habrá de tales puntos; bisecado éste, en alguna de sus dos partes, que llamaremos $[a_2, b_2]$, acontecerá lo mismo; etc. Por el teorema (11) de las sucesiones monótonas convergentes, hay un punto ξ, contenido en todos estos intervalos, el cual, por la hipótesis, es interior a uno de los entornos e; y éste es también entorno de todos los puntos de los $[a_n, b_n]$ que desde un n en adelante son interiores a él. Habíamos supuesto que no podían cubrirse con *ningún número* finito de entornos e y resultan cubiertos con un e; contradicción que prueba la imposibilidad de tal supuesto.

Ejercicio. — Asígnese a cada x de $(0,1]$ el entorno $(\frac{1}{2}x,\ 2)$ y véase que no es posible cubrir todo ese intervalo $(0,1]$ con número finito de tales entornos.

Vemos, así, cuán esencial es que el intervalo sea *completo*.

2. — La continuidad uniforme.

Para captar la esencia de este importante concepto, nada mejor que un ejemplo. La función $y = 1/x$ es continua en todo punto distinto de O, como se ve formando el incremento:



$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{(x+h)x} = -hyy_1$$

llamando y_1 a la ordenada correspondiente al punto $x+h$.

Si se elige p. ej. $x=4$, $y=\frac{1}{4}$, para lograr que sea $|\Delta y| < 0{,}1$ bastara evidentemente tomar $|h| \leqq 1$; pero esta amplitud resulta ya excesiva en el punto $x=1$, pues en él es $y=1$, mientras y_1 toma en el entorno de radio 1 valores arbitrariamente grandes. Es claro que se logra hacer Δy menor que 0,1 tanto en el punto 4, como en el 1, tomando $|h| \leqq 0{,}1$; pero también esta amplitud resulta excesiva para todos los puntos comprendidos entre 0 y 0.1, pues en entorno de tal amplitud hay valores y *arbitrariamente* grandes.

DEFINICIÓN. — La continuidad de $f(x)$ se dice *uniforme en un intervalo*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe otro número positivo δ, tal que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ para todo par de puntos x', x'' que distan menos de δ.

Resulta, pues, que la continuidad de $1/x$ *no es uniforme* en ningún intervalo $(0,a)$; pues aunque en un cierto entorno de cada punto los valores de $f(x)$ difieren del que toma en él en menos de ε y por tanto difieren entre sí en menos de 2ε, como hay infinitos de tales intervalos, y los hay arbitrariamente pequeños, no es posible elegir una amplitud mínima, válida para todo punto x.

Ahora bien, si el intervalo de continuidad es *completo* (tal p. ej. el $[1,2]$ para la función $1/x$) es aplicable el Lema de Borel, y si δ es la amplitud mínima de los entornos elegidos para cubrir $[a, b]$, dos puntos x', x'' que disten menos de δ deben estar en un mismo entorno, en cuyo caso los valores de $f(x)$ difieren en menos de 2ε; o bien en dos entornos con punto común, y en ese punto difiere $f(x)$ de $f(x')$ y de $f(x'')$ menos de 2ε, luego éstos difieren entre sí menos de 4ε. Por tanto:

Toda función continua en intervalo completo es uniformemente continua en él. (HEINE).

De esta uniformidad hemos hecho uso en la *Nota* de Lecc. 53, sobre rectificación de curvas, y ahora vamos a deducir otro importante teorema.

3. — Integración de funciones continuas.

Hemos demostrado en (130) que son integrables las funciones monótonas (continuas o discontinuas) y más en general las que son monótonas en cada intervalo parcial de una cierta partición finita del intervalo $[a\,b]$. Brevemente diremos: funciones que cumplen la *condición de Dirichlet*.

Otra clase importante es la de las funciones continuas en intervalo *completo* $[a, b]$, y por tanto *uniformemente continuas*, en virtud del teorema de Heine. Siendo, en efecto, menores que ε todos los incrementos Δy, es decir, todas las alturas de los rectángulos que encierran la curva (130), eligiendo los Δx inferiores a un cierto δ, (lo que acontece desde una partición en adelante) la suma de todas sus áreas es:

$$S_i - s_i < \varepsilon\,[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})] = \varepsilon\,(b - a)$$

Siendo, pues, esta diferencia arbitrariamente pequeña, resulta:

Toda función continua en intervalo completo, es integrable en él.

El problema de la primitiva, que sólo en casos muy particulares encuentra solución algorítmica, queda así resuelto para todo integrando continuo; pues la integral de $f(x)$ en $[a, x]$ (que puede construirse con el intégrafo), es primitiva de $f(x)$.

Pudiera creer el lector que para calcular tales integrales definidas lo mejor es obtener previamente la primitiva; pero tal problema es en general irresoluble. Así, p. ej., si $f(x) = e^{-x^2}$, el cálculo de la primitiva, que interesa en Probabilidades, lo hemos hecho en (192) aproximadamente, por desarrollo en serie, y en el Apéndice tabulamos los resultados. (*)

(*) Esencial en tales cálculos aproximados es la acotación del error, para saber cuantas son las cifras exactas que pueden utilizarse.

En vez de adoptar como cota de error el primer término despreciado, como hemos hecho en (142), algún autor obtiene cota mucho mayor por no utilizar el carácter alternado de la serie. Así p. ej. *Scheffer* en su *Lehrbuch der Mathematik*, Leipzig, 1901, pág. 569, da ese mismo término dividido por $1 - x^2 : (m + 1)$.

Resulta así que si se toman tres términos, y es p. ej. $x = 1{,}9$, su cota resulta 10 veces mayor que la nuestra; si es $x = 1{,}99$ resulta 100 veces mayor; y siendo ya grosera la aproximación para $x > 1$, tal imprecisión de la cota la hace inservible.

4. — Rectificación de curvas.

Aunque sale del marco del Cálculo diferencial e integral el estudio general de las curvas, daremos algunas nociones del problema.

Los perímetros de las poligonales inscriptas en un arco finito crecen al intercalar nuevos vértices; luego caben dos casos: si superan a todo número, el arco se llama *no rectificable*, o de longitud infinita; si tales perímetros están acotados, tienen según (11) un límite, que se llama *longitud* del arco. Si éste viene dado por funciones con derivada continua, ya hemos demostrado (219) que es rectificable; pero si tal continuidad no alcanza a los extremos, puede resultar no rectificable el arco.

EJEMPLO. — La función continua $x \cdot \operatorname{sen}(\pi/x)$, estudiada en (9), tiene derivada continua, salvo en el origen; si se adoptan como vértices los puntos de contacto con las bisectrices de los ejes, y las intersecciones con el eje x, las longitudes de los lados oblicuos superan a las ordenadas correspondientes, cuyas sumas de valores absolutos:

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

superan a todo número, como se vió en (39); luego el arco $[0,2]$ *no es rectificable*, ni tampoco cualquier otro: $[0,a]$.

La función $y=f(x)$ se llama de *variación acotada* en (a,b) si las sumas $\Sigma\,|\,\Delta y\,|$ para toda división de (a,b) en número finito de partes, son inferiores a un número fijo.

El razonamiento hecho para el ejemplo anterior demuestra en general que si $f(x)$ *es* de variación *no acotada, el arco no es rectificable.*

Si la curva viene dada paramétricamente por las funciones $x(t)$, $y(t)$, como cada cuerda es menor que la suma de los catetos $|\,\Delta x\,|+|\,\Delta y\,|$, que la tienen por hipotenusa, resulta: *si están acotadas las sumas* $\Sigma\,|\,\Delta x\,|$ y $\Sigma|\,\Delta y\,|$, es decir, *si* $x(t)$, $y(t)$, *son de variación acotada, la curva es rectificable.*

En cambio, si alguna de ellas tiene variación *no acotada,* como las cuerdas son mayores que los catetos, la curva *no es rectificable*, como se vió en el ejemplo. Queda así demostrado:

Condición necesaria y suficiente para que un arco sea rectificable, es que las funciones que lo definen sean de variación acotada. (JORDAN).

5. — Series e integrales sobre intervalo infinito.

Aunque el concepto de integral definida nace de un proceso infinitesimal, ofrece parecido al de suma finita en sus propiedades lineales y de monotonía obtenidas en (130). La analogía se hace más patente al combinar ambos algoritmos con el paso al límite para formar *series* en un caso, e *integrales en intervalo infinito*, en el otro. He aquí las definiciones correlativas:

$$\sum_a^\infty u_t=\lim\sum_a^n u_t \qquad \int_a^\infty u(t)\,dt=\lim\int_a^n u(t)\,dt$$

con la diferencia de que n debe tomar valores naturales en el 1.er caso, y toma valores reales cualesquiera en el 2.º.

La integral como la serie, se llama *convergente*, *divergente*, *oscilante*, según que el límite sea finito, infinito o inexistente.

Cuando el integrando es positivo sólo cabe la convergencia y la divergencia, y vale el criterio de comparación, como en las **series (30). Así p. ej.** puesto que la integral de e^{-x} converge, pues su primitiva $-e^{-x} \to 0$, **también** convergo la integral si el exponente de e es $-x^2 < -x$. **Tal integral de** e^{-x^2}, fundamental en Cálculo de probabilidades y teoría de errores, se calculará en (262).

Ejemplo sencillo en que se presentan los dos casos de convergencia y divergencia, es la integral:

$$\int x^m \,.\, dx = \lim \int x^m \,.\, dx$$

Si $m < -1$ es $m + 1$ negativo, y la primitiva $x^{m+1} : (m+1) \to 0$, luego la integral *converge*. Si $m > -1$ *diverge*. Si $m = -1$ la primitiva es el logaritmo que crece infinitamente, luego *diverge* la integral.

Interesante es comparar la serie $\Sigma u(m)$ con $\int u(x)dx$ cuando $u(x)$ es *decreciente*. Si se construyen los rectángulos por defecto y por exceso (130) adoptando como escala de partición los números 0, 1, 2, 3, ..., resulta que las sumas S_i y s_i que acotan la integral sobre $(0\ n)$ son sumas parciales de la serie; si ésta converge, también la integral, por ser sus integrales parciales menores que **las correspondientes** S_i; si **la serie diverge**, es decir, si las s_i crecen infinitamente, diverge la integral. Por tanto: *La serie y la integral de función decreciente tienen igual carácter.* (Criterio de Mac-Laurin).

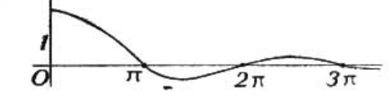
EJEMPLO. — La serie armónica general: Σn^{-h} tiene igual carácter que la integral de x^{-h}, luego resulta:

Si $h \leq 1$ la serie diverge; si $h > 1$, converge.

6. — Convergencia absoluta y condicional.

También para integrando que toma valores positivos y negativos subsiste la analogía con las series. Llamando $f_1(x)$ a la función que coincide con $f(x)$ donde ésta es positiva, y vale 0 en los demás puntos; y análogamente $f_2(x) = -f(x)$ donde $f(x)$ es negativa y nula en el resto del intervalo (a, ∞) es $f = f_1 - f_2$ y repitiendo ***mutatis mutandis*** **los razonamientos** (95) **resulta**:

Si converge la integral de $|f(x)|$, ***también converge la de*** $f(x)$. **Esta** convergencia se llama ***absoluta;*** pero cabe la convergencia ***condicional*** de $f(x)$, que no implica la de $|f(x)|$.



Ejemplo importante de integral condicionalmente convergente:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \tfrac{1}{2}\,\pi$$

Su convergencia se ve inmediatamente (30) observando que las áreas de las ondas de sinusoide van decreciendo al crecer el denominador y tienden a 0.

La divergencia de la serie de valores absolutos resulta por comparación con la serie armónica $\Sigma 1/n$.

Más difícil es la evaluación de la integral arriba indicada (V. ***Elementos de la Teoría de Funciones***).

EJERCICIO. — Demuéstrese la divergencia de las integrales sobre $(0.\infty)$ de las funciones siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} \qquad \frac{\cos^2 x}{x} \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{x}$$

7. — Criterios de Abel y de Dirichlet

Sumación por partes. — Desde Abel se usa frecuentemente en la teoría de series la siguiente transformación, correlativa de la integración por partes:

Llamando $U_m = u_0 + u_1 + \dots + u_{m-1}$, $U_0 = 0$, la suma:

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_{n-1} v_{n-1} \qquad [1]$$

puede escribirse así:

$$S_n = v_0(U_1 - U_0) + v_1(U_2 - U_1) + \dots + v_{n-1}(U_n - U_{n-1}) =$$
$$= U_n v_n + U_1(v_0 - v_1) + U_2(v_1 - v_2) + \dots + U_n(v_{n-1} - v_n);$$

igualdad que puede adoptar forma análoga a la de integración por partes, usando la notación (93). Deduzcamos dos importantes consecuencias.

Si las U_n están acotadas, es decir: $|U_n| < k$, los términos del 2.º miembro (prescindiendo del 1.º), son menores que los términos de la serie:

$$k[(v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + \dots] < k v_0 \qquad [2]$$

luego aquéllos forman serie absolutamente convergente.

En cuanto al término inicial $U_n v_n$ tiende a **0** si $v_n \to 0$, luego $\Sigma u_n v_n$ converge. También si U_n tiene límite, es decir, si la serie Σu_n converge, puesto que v_n tiene límite, por ser decreciente positiva.

Tenemos, pues, dos conclusiones:

La serie $\Sigma u_n v_n$ de factores v_n positivos y decrecientes converge si se cumple una u otra de estas dos condiciones:

Converge la serie Σu_n (Criterio de ABEL).

Las sumas parciales U_n están acotadas y $v_n \to 0$. (Criterio de DIRICHLET).

NOTA. — En el primer caso resulta $|S| < kv_0$; en el segundo caso $|S| < 2kv_0$.

Correlativamente se demuestran ambos criterios para las integrales. Aplicado el de Dirichlet a la integral de $(\operatorname{sen} x)/x$, resulta su convergencia, por estar acotada la integral de $\operatorname{sen} x$, y tender a 0 el factor decreciente $1/x$.

8. — Series funcionales. Convergencia uniforme.

Las series de potencias y las trigonométricas son dos tipos particulares de las *series funcionales* del tipo general:

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \qquad [1]$$

De igual modo que la aproximación de una función continua $f(x)$ a su valor depende de a, es decir, la amplitud del entorno en que el error es $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, varía con a, así también el número de términos de la serie [1], necesarios para que su suma difiera de $f(x)$ menos de ε, depende de x.

La convergencia se dice *uniforme* en (a, b) si para cada $\varepsilon < 0$ existe un número n de términos tal que dicho error, o sea el *resto* de la serie, es

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots| < \varepsilon$$

cualquiera que sea el punto x de (a, b).

Consideremos, p. ej., la serie geométrica $1 + x + x^2 \dots$, cuyo resto es $x^n : (1 - x)$. Si es $x = 1/2$, basta tomar 5 términos para que tal error sea $< 0{,}1$; si es $x = 3/4$ se necesitan 12 términos para lograr esa misma aproximación; y tal número crece indefinidamente al acercarse x a 1. La convergencia no es, por tanto, uniforme en el intervalo (0,1); lo es, sin embargo, en $(0,a)$ si es $a < 1$, pues siendo convergente la serie:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$$

se puede tomar n suficiente para que sea el resto $< \varepsilon$; y como la serie propuesta $1 + x + x^2 + \ldots$ tiene los términos menores, su resto será $< \varepsilon$, desde ese n en adelante, para todo $x < a$; y también para valores negativos, tales que $|x| < a$.

Este mismo razonamiento es aplicable con mayor generalidad, y resulta este criterio llamado *de la serie mayorante*, o de Weierstrass:

I. — *Si los términos u_n son en valor absoluto menores que los términos a_n de una serie numérica convergente, para todo x de un intervalo, la serie $\Sigma u_n(x)$ converge uniformemente en él.*

Así, por ejemplo, la serie trigonométrica:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} + \ldots$$

converge uniformemente en todo el campo real, pues la serie numérica *mayorante* $\Sigma\, 1/n^2$ converge, como se vió en (41), y como resulta asimismo del criterio de Mac-Laurin.

La Nota de (nº 7) permite formular otro criterio, que llamaremos de Dirichlet:

II. — *Converge uniformemente en (a, b) la serie $\Sigma u_n(x) \cdot v_n$ (v_n decrecientes) si las sumas $U_n(x)$ están acotadas uniformemente, es decir: $|U_n(x)| < k$, para todo x de (a,b), y además se verifica: $v_n \to 0$.*

En efecto, el resto, según dicha nota, es $< kv_n$, y desde un n se conserva $< \varepsilon$, para todo x de (a, b).

9. — Propiedades de la convergencia uniforme.

La importancia del concepto de convergencia uniforme reside, sobre todo, en esta propiedad:

T. 1. — *Si los términos de una serie $f(x) = \Sigma u_n(x)$ uniformemente convergente en (a, b) son funciones continuas en el mismo, también lo es la suma de la serie.*

En efecto, descompuesta $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$, llamando $S_n(x)$ a la suma de los n primeros términos y $R_n(x)$ al resto, el incremento de $f(x)$ se descompone así:

$$f(x + h) - f(x) = [S_n(x + h) - S_n(x)] + R_n(x + h) - R_n(x).$$

Siendo x interior al intervalo (a, b) y elegido h de modo que $x + h$ lo sea también serán por la supuesta uniformidad de la convergencia inferiores a ε en valor absoluto los dos restos que figuran en el trinomio para un cierto índice n. Así fijado n, el incremento de la función continua $S_n(x)$ que figura en el paréntesis, puede hacerse $< \varepsilon$ eligiendo $|h| < \delta$; luego para tales incrementos de x el incremento de $f(x)$ resulta $< 3\varepsilon$.

Si x es uno de los extremos del intervalo, resulta continuidad a la derecha de a, y a la izquierda de b.

Otra propiedad importante es la integrabilidad término a término:

T. 2. — *Si la serie de funciones continuas $f(x) = \Sigma u_n(x)$ converge uniformemente en (a, b) la serie de las integrales definidas en (a, b) es igual a la integral de la serie.*

Si designamos por U_n *la* integral de $u_n(x)$ y por F la integral de la función también continua f, resulta, integrando los dos miembros de la igualdad:

$$f(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x) + R_n(x)$$

que la integral $F(x)$ difiere de la suma $U_1(x) + \ldots + U_n(x)$ en la integral del resto; pero siendo éste menor que ε, desde un n en adelante, su integral $U_1(x) + U_2(x) + \ldots$ converge y su suma es $F(x)$.
será menor que $\varepsilon(b-a)$: luego tal diferencia tiende a 0, es decir, la serie

Esta propiedad generaliza la ya demostrada en (101) para las series de potencias, que hemos aplicado fructuosamente en (107) y (109).

Como corolario resulta:

T. 3. — *Es legítimo derivar término a término una serie* $\Sigma U_n(x) = F(x)$ *si converge uniformemente la serie de derivadas* $\Sigma u_n(x) = f(x)$, es decir: $f(x) = F'(x)$.

10. — Relación entre los coeficientes de Fourier de primitiva y derivada.

El concepto de convergencia (9 y 36) por aproximación indefinida, debido a Wallis, y rigorizado por Bolzano y Cauchy, implica serias dificultades para el cálculo con series, que éstos no lograron vencer. La integración término a término la hemos apoyado (n.º 9) en la convergencia *uniforme* en todo el intervalo ;pero tal hipótesis restringe mucho el alcance de la teoría de las series trigonométricas, poco desarrollada todavía por esa causa.

Adoptemos en cambio desarrollos en el sentido de Fourier, es decir, expresemos con el signo $\sim$ la relación entre una función y su S. F., cuyos coeficientes se calculan por las fórmulas de Euler (159) y escribamos:

[1] $$f(x) \sim \Sigma\, a_n \,.\, \cos nx + b_n \,.\, \operatorname{sen} nx$$

Luego veremos que las sumas sucesivas S_n de esta serie se aproximan indefinidamente a $f(x)$, pero midiendo el error de modo distinto al de Wallis, y más bien análogo a la distancia cartesiana ;pero ahora sólo interesa notar cuán sencillamente se opera con estos desarrollos. Calcule el lector los c. F. de la función $F(x)$, integral de $f(r)$ en $(0,r)$; y suponiendo $k_0 = 0$, una sencilla integración por partes le conducirá a estos coeficientes: $A_n = -b_n/n$, $B_n = a_n/n$; pues los términos $F(x)\operatorname{sen} nx$, $F(x)\cos nx$ se anulan para $x = 2\pi$, por ser $F(2\pi) = nk_0 = 0$. Resulta así la nueva serie de Fourier:

[2] $$F(x) \sim C + \sum - \frac{b_n \,.\, \cos nx}{n} + \frac{a_n \,.\, \operatorname{sen} nx}{n}$$

La s. F. de la primitiva de $f(x)$ se forma integrando término a término la s. F. de $f(x)$.

Si $k_0 \neq 0$, subsiste la conclusión, siendo $F(x)$ la integral de $f(x) - k_0$, lo que equivale a agregar el término $k_0 x$ a la expresión anterior.

11. — Unicidad de la función definida por los coeficientes de Fourier.

Los c. F. de las funciones continuas pueden considerarse como coordenadas que determinan cada función. No son ciertamente números que puedan darse arbitrariamente; pero de haber alguna función continua con c. F. prefijados, ésta es única. De otro modo: *Dos funciones continuas con los mismos c. F. son idénticas.*

Puesto que los c. F. de $f_1(x) - f_2(x)$ son las diferencias entre los c. F. correspondientes de ambas funciones, bastará probar:

Si una función continua periódica $f(x)$ tiene nulos todos sus c. F., es idénticamente nula.

Supongamos que en un punto de continuidad no sea nula. Adoptado ese punto como origen, sea $f(0) = 2k > 0$; y por la continuidad, será $f(x) > k$ en un cierto entorno $(-2h, +2h)$ el cual disminuiremos, si es preciso, a fin de que sea $\cos x > \frac{1}{2}$.

Puesto que son nulas las integrales de $f(x) \cos nx$ y de $f(x) \operatorname{sen} nx$, también es nula la integral de $f(x)$ por cualquier polinomio trigonométrico, por ser combinación lineal de tales integrales. Por tanto:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,(1 - \cos h + \cos x)^n\, dx = 0 \qquad [1]$$

pues desarrollando la potencia resulta un polinomio del tipo $a + b \cdot \cos x + c(\cos x)^2 + \ldots.$; y es sabido de Trigonometría que estas potencias se expresan linealmente mediante $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$. ....

La gráfica del trinomio es la cosinusoide trasladada el segmento $1 - \cos h > 0$; luego dicho trinomio es mayor que 1 en $(-h, h)$, igual a 1 en h y $-h$; menor que 1 en valor absoluto en el resto. Más aún: como en el punto $2h$ vale:

$$1 - \cos h + (2\cos^2 h - 1) = \cos h\,(2\cos h - 1) < \cos h < 1$$

si M es una cota superior de $f(x)$ el valor absoluto del integrando en $(2h, \pi)$ y en su simétrico $(-\pi, -2h)$ es menor que $M(\cos h)^n$, número arbitrariamente pequeño al crecer n. En cambio, la integral en $(-2h, 2h)$ es mayor que en $(-h, h)$; y en éste, como el integrando supera a k, dicha integral es mayor que $2hk$ para todo n. Por tanto es imposible la anulación [1].

Suponer $f(x) \neq 0$ implica, como se ve, contradicción con la igualdad [1]; luego debe ser $f(x)$ nula en todo punto.

12. — Tipo I. La serie de coeficientes converge absolutamente.

Si la s. F. de la función continua $f(x)$ resulta *uniformemente convergente en todo el período*, su suma es una función *continua* (T. 1); y como en virtud de (T. 2) son legítimas las operaciones efectuadas en (159) para deducir los c. F., resultan los mismos a_n, b_n que para $f(x)$; por el teorema (n.º 9) de unicidad, ambas funciones son la misma; o sea: Si *la s. F. de la función periódica continua $f(x)$ converge uniformemente, su suma es $f(x)$.*

La convergencia uniforme no es propiedad que salte a la vista; pero se ve inmediatamente en este caso importante: *cuando la serie de coeficientes converge absolutamente.*

En efecto como los senos y cosenos no superan a 1, es aplicable el criterio de Weierstrass (n.º 8) adoptando tal serie como mayorante y resulta *uniformemente convergente la s. F. en todo el campo real;* luego su suma es precimente la función continua $f(x)$.

Quedan así demostrados los desarrollos del Ejemplo 4.º dados en (160).

13. — Tipo II. Los coeficientes tienden decreciendo a 0.

En los ejemplos de s. F. desarrollados en (160), en los tabulados a continuación, y en los que figuran en los manuales para ciencias aplicadas, se observa que los coeficientes son todos de igual signo, o bien alternados.

Obsérvase, además, que tales coeficientes son monótonos en valor absoluto. Veamos los diversos casos que se presentan:

Primer caso. Si los coeficientes a_n son positivos y tienden a 0 decreciendo, es aplicable a la serie $\Sigma a_n \cos nx$ el criterio de Dirichlet; pues recordando (*Análisis algebraico*, pág. 499) la expresión:

$$\tfrac{1}{2}\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \doteq \operatorname{sen}(n + \tfrac{1}{2})x \;:\; 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}x$$

resulta que estas sumas están acotadas si se excluyen entornos arbitrariamente pequeños de los puntos $\pm 2m\pi$.

Por tanto: la serie converge para todo x distinto de estos puntos; y en virtud del citado criterio II, la convergencia es uniforme en $(h, 2\pi - h)$, por pequeño que sea h, luego la suma de la serie es una función continua en todo punto *interior* al intervalo $(0, 2\pi)$; y lo mismo puede decirse de las series $\Sigma b_n \operatorname{sen} nx$ de coeficientes b_n que tiendan a 0 decreciendo; y también si la serie se compone de ambas.

Caso 2.° — Si los coeficientes decrecientes tienen signos alternados, la transformación $x' = x - \pi$ unifica los signos; luego resulta:

Si los coeficientes forman serie alternada, la s. F. tiene suma continua en $(-\pi, +\pi)$.

Tal sucede en Ej. 3.° (160) o en su equivalente:

$$\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots.$$

Caso 3.° — Si, como acontece en los Ej. 1.° y 2.° se presentan solamente múltiplos impares de x, con coeficientes positivos, subsiste la conclusión 1.ª; pues las sumas de senos o cosenos son análogas, y están asímismo acotadas; pero los puntos excluídos son entonces $\pm m\pi$.

Esto acontece en los Ej. 1.° y 2.° de (160), o en su equivalente:

$$\operatorname{sg} x = (4/\pi)\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots.\right)$$

Caso 4.° — Si solamente hay múltiplos impares, con coeficientes alternados, la traslación $x' = x - \frac{1}{2}\pi$ unifica los signos; y reduciéndose al caso 3.°, los puntos de discontinuidad son los múltiplos impares de $\frac{1}{2}\pi$.

Nos falta todavía demostrar las igualdades tabuladas en el cuadro, es decir, que las s. F. de las diversas funciones convergen hacia ellas. Parecería a primera vista que siendo uniforme la convergencia en todo el campo real, salvo entornos arbitrariamente pequeños de tales puntos; y siendo la suma función continua en todo punto, excepto esos puntos aislados, se podrá sustituir el signo $\sim$ por el $=$; pero es preciso recurrir a un artificio.

Obsérvase en todos los ejemplos citados de s. F. que, aun siendo en *algunos* divergente la serie de coeficientes, al dividirlos por n, resulta en *todo* caso una serie absolutamente convergente, es decir, aun siendo la s. F. de $f(x)$ del tipo II, la de $F(x)$ es del tipo I; y por tanto converge absolutamente y uniformemente en el sentido usual, hacia $F(x)$; luego el signo $\sim$ puede sustituirse por $=$.

Para pasar al desarrollo de $f(x)$, utilicemos la continuidad uniforme ya demostrada cuando los coeficientes son monótonos. Según T. 3, es legítima la derivación término a término, en todo punto de continuidad, y resulta, por consiguiente, $f(x) = \Sigma\, a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ en todos ellos.

En general: aunque la serie de primitivas no tenga convergente absolutamente la serie de coeficientes, siempre se logra ésto tomando primitivas otra vez; y repitiendo el razonamiento anterior, resulta:

La s. F. de $f(x)$ tiene la suma $f(x)$ en todo punto de continuidad, si los coeficientes a_n, así como los b_n tienden monótonamente a 0. Lo mismo sucede aunque sus signos *sean alternados; y también si solamente figuran arcos en progresión aritmética, de diferencia $2x$, con coeficientes de uno u otro tipo.*

Ya hemos visto cuáles son los puntos de discontinuidad en cada caso; y es fácil generalizar los resultados al caso en que la progresión es de diferencia mx

14. — Funciones ortogonales y convergencia cuadrática.

Si los senos y cosenos de múltiplos de x los designamos por $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., la propiedad esencial (159) que hemos utilizado es ésta:

$$\int g_m(x)\, g_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n \qquad [1]$$

Toda sucesión de funciones que cumplen tal condición en (a, b) se llama *sistema ortogonal;* los senos y cosenos de múltiplos de x son, pues, ortogonales en $(0,2\pi)$ o en cualquier intervalo de amplitud 2π.

El sistema se dice *normal* si además se verifica:

$$\int g_n(x)^2 \,.\, dx = 1; \ (n = 0, 1, 2, \ldots.) \qquad [2]$$

basta, pues, dividir los senos y cosenos por la constante $\sqrt{\pi}$ para tener un sistema *ortonormal.*

Si $f(x)$ es desarrollable en serie uniformemente convergente en (a, b):

$$f(x) = \Sigma\, a_n \cdot g_n(x) \quad \therefore \quad a_n = \int f(x) g_n(x) dx \qquad [3]$$

pues basta repetir los razonamientos ya hechos (159); y si llamamos c. F. de $f(x)$ a estos números, aunque la serie no resulte uniformemente convergente, veamos cómo se aproximan a $f(x)$ las sumas sucesivas:

$$s_n(x) = a_0 \cdot g_0(x) + a_1 \cdot g_1(x) + \ldots. + a_n \cdot g_n(x) \qquad [4]$$

adoptando como medida del error ésta:

$$\int [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = \int f(x)^2\, dx - 2 \int f(x)\, s_n(x) dx + \int s_n(x)^2\, dx$$

La 1.ª integral es un número positivo, llamado *norma* de $f(x)$. La 2.ª se descompone así:

$$\int f \cdot s_n = a_0 \int f \cdot g_0 + a_1 \int f \cdot g_1 + \ldots. + a_n \int f \cdot g_n =$$
$$= a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2.$$

Para calcular la 3.ª desarrollaremos el cuadrado del polinomio $s_n(x)$; pero los productos de términos distintos dan integral nula, según [1]; los cuadrados dan integral 1, en virtud de [2]; luego resulta:

$$\int [f(x) - s_n(x)]^2\, dx = \int f(x)^2\, dx - (a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2) \qquad [5]$$

de donde salen sencillas pero importantes consecuencias:

1.ª) Las sumas $\Sigma\, a_i^2$ son menores que la integral de $f(x)^2$ (*Desigualdad de Bessel*).

2.ª) La serie $\Sigma\, a_i^2$ es *convergente* y por tanto (35) $a_n \to 0$.

3.ª) Disminuye el error al tomar más términos, es decir, al crecer n.

Se demuestra fácilmente que los coeficientes a_n dan un polinomio s_n más aproximado que los de otros coeficientes cualesquiera.

Finalmente, el sistema ortonormal se llama *completo,* si no hay ninguna función ortogonal a todas; y una vez demostrado que los senos y cosenos de múltiplos de x forman sistema completo, es aplicable la propiedad fundamental de tales sistemas completos: la diferencia [5] expresada por la desigualdad de Parseval, tiende a 0 para $n \to \infty$, es decir: las sumas $s_n(x)$ *convergen en media cuadrática hacia* $f(x)$.

Tomando, pues límites para $n \to \infty$, resulta la *igualdad de Parseval:*

$$\int f(x)^2\, dx = a_0^2 + a_1^2 + \ldots. + a_n^2 + \ldots. \qquad [6]$$

Otro sistema importante es el de los polinomios de Legendre:

$$1,\ x,\ {}^3/_2 x^2 - {}^1/_2 \ ,\ \ {}^5/_2 x^3 - {}^3/_2 x,\ \ldots.$$

ortogonales en $(-1,1)$ y que se normalizan dividiéndolos por sendos coeficientes.

SEGUNDA PARTE

Funciones de varias variables

CAPITULO VII

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALITICA LINEAL

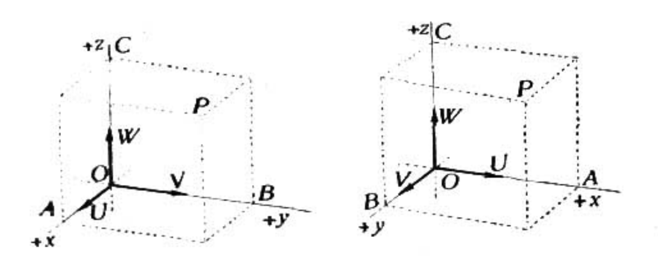
LECCIÓN 42

PROPIEDADES PROYECTIVAS Y AFINES

162. — Triedros coordenados.

La determinación de cada punto en el espacio de tres dimensiones exige dar tres números, llamados *coordenadas*, de igual modo que en el plano son suficientes dos.

Para definir las coordenadas cartesianas, adoptemos un triedro de referencia formado por tres ejes x, y, z, concurrentes en un punto O, llamado *origen*, y fijemos en cada uno un sentido como positivo. Esta fijación puede hacerse de dos modos distintos.



Colocado el observador en el origen O, en el sentido del semieje $+z$, al contemplar el plano xy puede suceder que el sentido $(+x, +y)$, sea el *positivo* o el *negativo*. El *primer sistema* suele ser usado por los autores ingleses y se llama *directo, destrorsum* o *destrógiro*, y el segundo se llama *inverso, sinistrorsum* o *levógiro*, y por ser el más usado en los tratados más accesibles a los alumnos, es el que nosotros utilizaremos.

De otro modo: supongamos el par de ejes x, y del plano, tal como suelen colocarse en Geometría Analítica plana, es decir, visto el plano por una cara (que llamaremos positiva), el sentido x, y

sea contrario al de las saetas de un reloj con la esfera del lado de dicha cara positiva; el semieje $+z$ puede colocarse en O hacia la cara *positiva* del plano (triedro directo), o bien hacia la *negativa* (triedro negativo.).

Como cada eje se compone de dos semiejes, determinan ocho triedros:

$$+x, +y, +z \;;\; +x, -y, +z \;;\; -x, -y, +z \;;\; -x, +y, +z \;;$$
$$+x, +y, -z \;;\; +x, -y, -z \;;\; -x, -y, -z \;;\; -x, +y, -z \;;$$

Los cuatro primeros están sobre el plano xy y los otros cuatro debajo. El triedro formado por los semiejes positivos suele colocarse de frente al observador, es decir, éste se supone colocado dentro del primer triedro $+x$, $+y$, $+z$.

163. — Coordenadas cartesianas.

Elegido un triedro de referencia, sea directo o inverso y un vector unidad en cada eje, si por cada punto P del espacio, se trazan planos paralelos a los coordenados, las abscisas x, y, z de sus trazas sobre los ejes x, y, z, determinan estos planos proyectantes y por tanto el punto P. Estos tres números se llaman coordenadas cartesianas de P.

Definición. — *Coordenadas cartesianas* de un punto son las abscisas x, y, z, de sus tres proyecciones sobre cada eje coordenado x, y, z, paralelamente al plano opuesto. Si los ejes son ortogonales las coordenadas se llaman *rectangulares*, y en caso contrario *oblícuas*.

Para los *problemas métricos* (ángulos, distancias, áreas, volúmenes) conviene usar coordenadas rectangulares; para los *problemas afines* (paralelismo, razones simples) pueden utilizarse coordenadas rectangulares u oblícuas; los *problemas proyectivos* (determinación de rectas y planos, intersecciones, ...) se tratan con igual sencillez en coordenadas proyectivas, pero los estudiaremos en coordenadas cartesianas, oblícuas o rectangulares.

164. — Ecuaciones con una variable.

Todos los puntos del plano xy tienen $z=0$ y recíprocamente. He aquí, pues, una ecuación a la que satisfacen todos los puntos de este plano y sólo ellos. Diremos, brevemente, que es la *ecuación del plano*. Análogamente las ecuaciones de los planos xz, yz son respectivamente:

$$y=0 \quad , \quad x=0.$$

Las ecuaciones del tipo

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

representan, respectivamente, planos paralelos al yz, al zx, al xy, que distan de ellos a, b, c en magnitud y signo.

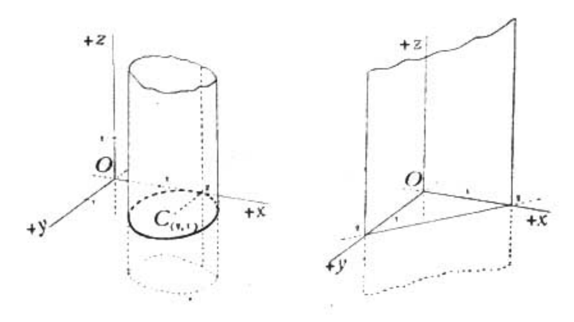
Una ecuación con una sola variable, p. ej. $z^2 = 1$, se descompone en ecuaciones de primer grado que en este ejemplo son $z = 1$ y $z = -1$, cada una de las cuales representa un plano paralelo al xy. En general:

Una ecuación con una sola variable representa planos paralelos al plano coordenado opuesto al eje correspondiente a esa variable: son tantos planos como raíces tenga la ecuación.

165. — Ecuaciones con dos variables.

Diremos que una superficie está representada por una ecuación $f(x, y, z) = 0$, si todos los puntos de la superficie satisfacen a esa ecuación y recíprocamente, toda solución de ésta representa un punto de la superficie. Así obtendremos la ecuación del plano, de la superficie esférica, etc.

Hay un caso importante que conviene destacar. Sea $f(x, y) = 0$ ción representará una curva y los únicos puntos del espacio que sa- una ecuación que no contiene la variable z; en el plano xy esta ecua- tisfacen a esta ecuación son aquellos cuyas coordenadas x, y la satisfacen, cualquiera que sea la z; es decir, aquellos puntos y sólo aquellos que se proyectan paralelamente al eje z según los puntos de esta curva. Por tanto, *una ecuación con dos variables representa la superficie cilíndrica cuya directriz es la curva representada por esta ecuación en el plano correspondiente a estas dos coordenadas y cuyas generatrices son paralelas al otro eje.*



Las superficies cilíndricas más sencillas son los planos. Así, por ejemplo, la ecuación $x + y = 2$ en el plano xy representa una recta que intercepta con los ejes segmentos de longitud 2; pero esa ecuación representa en el espacio el plano paralelo al eje z, trazado por esa recta.

166. — Sistema de dos ecuaciones.

Una sola ecuación no representa una *curva,* sino una *superficie;* las curvas vienen dadas como intersección de dos superficies, es decir, por un sistema de *dos ecuaciones.*

Los puntos del eje z tienen coordenadas $x = 0$, $y = 0$ y recíprocamente, todo punto que cumpla estas dos condiciones pertenece al eje z. Diremos, pues, que el eje z está representado por este *sistema de ecuaciones.* Los sistemas de ecuaciones que representan los ejes son por tanto:

$$\text{eje } x \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{eje } y \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{eje } z \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Toda línea está representada, como hemos dicho, por un sistema de dos ecuaciones; cada una de las cuales representa una superficie y la línea aparece como conjunto de puntos comunes a ambas. En cada caso, se procura la elección de las dos superficies más sencillas que pasen por la curva. Así, p. ej., la circunferencia situada en el plano xy, representada en la figura anterior tiene este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}$$

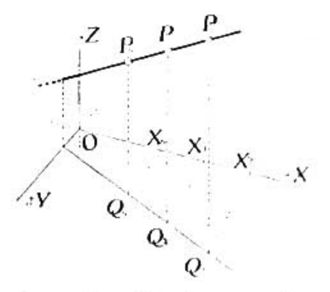
167. — Ecuaciones de la recta.

Dados los puntos $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$, y $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$, a cada punto de la recta $P_0 P_1$ le corresponde un valor λ, que es la razón simple $(P_0 P_1 P)$, es decir:

$$\lambda = \frac{P_0 P}{P_1 P}$$

y es sabido que a cada valor de λ, distinto de 1, le corresponde un punto de la recta, que es distinto del P_1. Si λ tiende a 1, P se aleja infinitamente; si λ crece infinitamente, $P \rightarrow P_1$. La correspondencia se hace biunívoca asignando $\lambda = \infty$ a P_1 y el punto impropio al valor $\lambda = 1$.

Si proyectamos la terna sobre el eje x resultan tres puntos, de abcisas x_0, x_1, x cuya razón de distancias es la misma:



$$\lambda = \frac{x - x_0}{x - x_1}$$

de donde $x = \dfrac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda}$

Proyectando análogamente sobre los ejes y, z, obtenemos las coordenadas de todos los puntos de la recta PP_1, que son:

$$x = \frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda} \qquad y = \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \qquad z = \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda} \qquad [1]$$

Para $\lambda = -1$ resulta: *Las coordenadas del punto medio de un segmento son los promedios de las coordenadas de sus extremos.*

Recíprocamente, cualquiera que sea el valor atribuído a λ en estas expresiones resulta un punto P situado en la recta, pues elegido en ella el que tiene esta razón simple λ, sus coordenadas son los tres números [1]; luego coincide con el punto P. Tenemos, pues, la expresión paramétrica de la recta definida por dos puntos.

Si en vez de adoptar (P_0P_1P) tomamos (PP_1P_0) resulta un sistema de ecuaciones que representa la recta P_0P_1.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad [2]$$

Cada una de las ecuaciones

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\ ; \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\ ; \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

representa un plano que es paralelo a un eje y contiene todos los puntos de la recta, es decir, tenemos los tres planos *proyectantes* de la recta, en la dirección de cada eje.

En particular las ecuaciones de la recta determinada por el origen y el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ son

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

luego resulta: *la condición necesaria y suficiente para que dos puntos estén alineados con el origen es la proporcionalidad de sus respectivas coordenadas.*

168. — Ecuación general del plano.

La ecuación de primer grado:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [3]$$

representa un conjunto de puntos que tienen esta propiedad: si (x_0, y_0, z_0); (x_1, y_1, z_1) son dos puntos de ellos, las coordenadas de la recta que determinan, o sea los valores obtenidos en [1]

$$\frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda} \qquad \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \qquad \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda}$$

la satisfacen. Ahora bien, la ecuación [3] no representa una recta, puesto que x e y pueden tomar valores arbitrarios; y como todo punto del espacio no la satisface, tal conjunto de puntos es un plano. (*).

¿Representa esta ecuación todos los planos posibles?

Dados tres puntos no alineados $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x_2\, y_2\, z_2)$, $(x_3\, y_3\, z_3)$, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [4]$$

es de primer grado y se satisface por las coordenadas de los tres puntos; luego, representa el plano determinado por éstos.

Otro modo de escribir la misma ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [5]$$

que se deduce restando la segunda fila de cada una de las otras.

(*) Basta recordar el postulado fundamental que define la recta E_1, el plano E_2, el espacio E_3.

EJEMPLO: Plano determinado por los puntos (2, — 1, 5), (4, 0, — 3), (1, 2, 1).

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

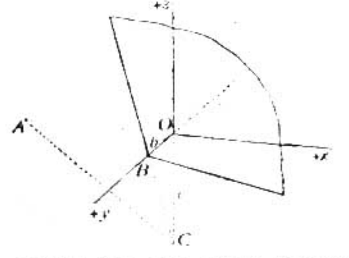
NOTA. — Falta examinar el caso en que la ecuación [4] o su equivalente [5] tenga todos los coeficientes nulos, es decir, sean nulos los tres menores complementarios de los elementos de la primera fila de [5] y por tanto se verifique:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

es decir, en virtud de [2] están alineados los tres puntos.

169. — Ecuación segmentaria del plano.

Si los cuatro coeficientes A, B, C, D son distintos de 0, obtenemos una interpretación geométrica interesante. Haciendo $y = 0$; $z = 0$, el segmento a que el plano intercepta con el eje x o sea la abscisa del punto de intersección con este eje, viene expresada así:



$$a = -\frac{D}{A}$$

Análogamente:

$$b = -\frac{D}{B} \quad , \quad c = -\frac{D}{C}$$

Luego dividiendo por $-D$ la ecuación general

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

resulta ésta, que puede formarse directamente, conocidos a, b, c:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad [6]$$

EJEMPLO: Plano que intercepta sobre los ejes segmentos 2, + 3, — 1. La ecuación de dicho plano es:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1$$

170. — Planos proyectantes de una recta.

Cuando la recta viene dada como intersección de dos planos $P = 0$, $Q = 0$, sus planos proyectantes, paralelamente a los ejes, se obtienen inmediatamente eliminando una variable entre ambas ecua-

ciones, pues la ecuación obtenida se satisface para los puntos de la recta y carece de una variable, luego el plano obtenido pasa por la recta y es paralelo a un eje.

EJEMPLO: Sea la recta de ecuaciones:

$$3x - 2y + z = 1$$
$$x + y - z = 2$$

Sumando, se elimina z y resulta: $4x - y = 3$

Sumando a la 1.ª ecuación el duplo de la 2.ª: $5x - z = 5$

Restando de la 1.ª ecuación el triplo de la 2.ª: $5y - 4z = 5$

Si se desea proyectar la recta $P = 0$, $Q = 0$, desde un punto propio $(x_1\, y_1\, z_1)$, el método más sencillo y rápido es éste: la ecuación $P - \lambda\, Q = 0$ representa un haz de planos que pasa por la recta; para que un plano de ellos pase por el punto $(x_1\, y_1\, z_1)$, éste debe satisfacer a la ecuación y sustituyendo las coordenadas se despeja el valor de λ.

EJEMPLO: Sea la recta de ecuaciones:

$$2x - 3y - z = 2$$
$$x + 5y - 2z = 2$$

El plano que la proyecta desde 0, se obtiene eliminando el término constante, y para ello basta restar, resultando así el plano: $x - 8y + z = 0$.

Para proyectar la misma recta desde el punto $(1, -2, 1)$, restaremos de cada una de ellas, la otra multiplicada por λ

$$(2x - 3y - z - 2) = \lambda(x + 5y - 2z - 2)$$

Y sustituyendo las coordenadas $(1, -2, 1)$ resulta: $\lambda = -5/13$.

Por tanto, la ecuación del plano proyectante es: $31x - 14y - 23z = 36$.

LEY DE DUALIDAD. — Los coeficientes u, v, w de la ecuación del plano:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

se llaman *coordenadas plückerianas* del mismo. Fijados x, y, z, todos los planos (u, v, w) que satisfacen a esta ecuación forman la radiación que tiene ese vértice. Toda propiedad de incidencia de puntos rectas y planos tiene su *correlativa* o *dual* sustituyendo los puntos por planos y viceversa.

EJERCICIOS

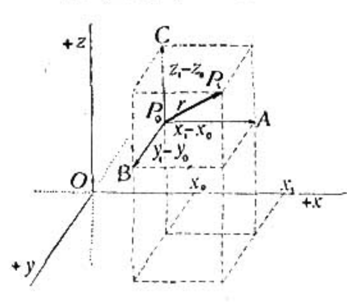
1.— Hallar el plano que proyecta desde el origen a la recta intersección de los planos $2x + 3y + 2 = 1$; $3x - y - 2 = 2$. Id. íd. desde el punto $(1, 0, 2)$.

2.— Trazar por el origen una secante de dos rectas dadas. (Basta obtener los dos planos proyectantes de ambas).

PROPIEDADES METRICAS

171. — Distancia entre dos puntos.

Los planos paralelos a los coordenados trazados por P_0 y P_1 forman un paralelepípedo recto rectángulo; las tres aristas que concurren en P_0 tienen longitudes $x_1 - x_0$; $y_1 - y_0$; $z_1 - z_0$ y la diagonal r por el teorema de Pitágoras, viene expresada así:



La distancia entre dos puntos está dada por la raíz cuadrada las diferencias de coordenadas correspondientes.

$$r^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 \qquad [1]$$

172. — Cosenos y coeficientes directores de una semi-recta.

La semi-recta $P_0 P_1$ forma con cada semieje positivo un ángulo; los cosenos de estos tres ángulos se llaman *cosenos directores* de la semi-recta y también del vector $P_0 P_1$; los representamos por α, β, γ. La semi-recta opuesta y el vector opuesto tienen cosenos directores opuestos: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

Como $P_0 A$ es la proyección de $P_0 P_1$ sobre la paralela al semieje x, y análogamente las otras aristas, resulta:

$$x_1 - x_0 = r\alpha \qquad y_1 - y_0 = r\beta \qquad z_1 - z_0 = r\gamma$$

siendo $r > 0$. Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta [1] resulta:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad [2]$$

Las aristas del paralelepípedo son, como se ve, proporcionales a los cosenos; estos tres números u otros cualesquiera proporcionales a ellos y de igual signo se llaman *coeficientes directores* de la semi-recta $P_0 P_1$; obsérvese que los coeficientes directores son opuestos para las dos semi-rectas opuestas; estos mismos, multiplicados por cualquier número positivo o negativo, se llaman *coeficientes directores de la recta.*

Dados los coeficientes directores a, b, c, es decir:

$$a = k\alpha \qquad b = k\beta \qquad c = k\gamma$$

sumando los cuadrados, resulta: $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Es decir, *los cosenos directores se deducen de los coeficientes directores dividiéndolos por la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados.* Según el signo que adoptemos para k, resultan los cosenos de una u otra semi-recta.

Para todos los problemas de *paralelismo, perpendicularidad,* etc. bastan los *coeficientes* directores; para las medidas de *ángulos* se precisa obtener los *cosenos.*

Los coeficientes directores de la recta dada como intersección de dos planos se calculan cómodamente obteniendo dos puntos de la recta, por ejemplo sus trazas sobre dos planos coordenados; las diferencias de coordenadas son los tres coeficientes directores. Según el orden en que se resten resultan los de una u otra semi-recta

REGLA PRÁCTICA. — Colocado de frente el plano x, z, resulta esta norma para saber la dirección de una semi-recta:

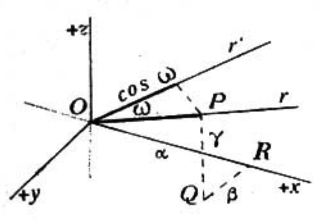
Hacia la derecha si $\alpha > 0$, hacia adelante si $\beta > 0$, hacia arriba si $\gamma > 0$; y al contrario si alguno de estos cosenos es negativo.

EJEMPLO: Calcular los ángulos que forma con los tres ejes, la bisectriz del primer triedro: $+x$, $+y$, $+z$.

Como los ángulos son iguales, los coeficientes directores son 1, 1, 1; luego los cosenos se calculan dividiendo por $\sqrt{3}$ y buscando en la tabla de cosenos el ángulo cuyo coseno es $1/\sqrt{3}$ resulta el ángulo buscado, que vale 54° 44'.

173. — Angulo de dos rectas.

Dadas dos semi-rectas r y r' de origen O, cuyos cosenos directores sean (α, β, γ) $(\alpha', \beta', \gamma')$, la proyección sobre r' del vector de longitud 1 sobre r, o sea $\cos\omega$, es la suma de las proyecciones de sus tres componentes, es decir:



$$\cos\omega = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \qquad [3]$$

Por tanto: ***El coseno del ángulo de dos semi-rectas es la suma de los productos de los cosenos directores de una por los de otra.***

La condición de perpendicularidad de dos rectas es que la suma de los productos de los respectivos coeficientes directores sea nula: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Nótese que para la perpendicularidad basta considerar coeficientes directores, mientras que para calcular el ángulo son precisos los cosenos.

En algunos casos, p. ej. el que veremos en (179), interesa expresar sen ω. Restando las igualdades:

$$1 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$

$$\cos^2\omega = (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2$$

y simplificando el 2.° miembro resultante, se tiene:

$$\operatorname{sen}^2\omega = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 \qquad [3']$$

174. — Angulo de dos planos; paralelismo y perpendicularidad.

La ecuación general del plano es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

siendo (x_0, y_0, z_0) un punto del mismo; pero $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son los coeficientes directores de todas las rectas del plano, luego esta relación expresa que la recta de coeficientes directores (A, B, C) o proporcionales a ellos, es perpendicular a toda recta del plano, es decir, perpendicular al plano. Por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que sus coeficientes directores sean proporcionales a los coeficientes directores del plano.

Para el cálculo de ángulos, todo plano se puede sustituir por una recta normal, es decir, por una recta que tiene como coeficientes directores los del plano. Dos planos son paralelos, si lo son sus normales, luego:

La condición de paralelismo de dos planos es la proporcionalidad de sus coeficientes directores.

Dos planos son perpendiculares si lo son sus normales, luego:

La condición de perpendicularidad de dos planos, es que la suma de los productos de sus coeficientes directores sea nula.

Más general: *El coseno del ángulo de dos planos es la suma de los productos de los cosenos directores de ambos planos.*

NOTA. — Llamando *producto escalar* de dos ternas a la suma de productos de las componentes homólogas, por razones que después se verán, se abrevia el enunciado de ambos teoremas.

175. — Cuadro sinóptico de las relaciones entre rectas y planos.

Resulta así el cuadro sinóptico siguiente, que comprende los seis casos posibles:

Elementos *homogéneos*:

paralelismo: proporcionalidad de coef. directores.
perpendicularidad: prod. escalar de coef. directores nulo.

$$r \parallel r' \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \pi \parallel \pi' \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$$r \perp r' \qquad aa' + bb' + cc' = 0 \qquad \pi \perp \pi' \qquad AA' + BB' + CC' = 0$$

Elementos *heterogéneos*:

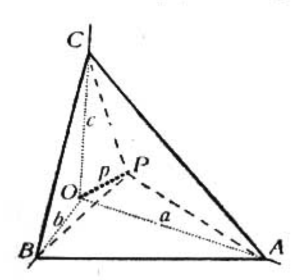
paralelismo: prod. escalar de coeficientes directores nulo.
perpendicularidad: proporcionalidad de coef. directores.

$$r \parallel \pi \qquad Aa + Bb + Cc = 0$$

$$r \perp \pi \qquad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

176. — Ecuación normal y distancia de un punto a un plano.
Si son a, b, c los segmentos que intercepta en los ejes el plano

$$Ax + By + Cz = D \qquad [5]$$



la ecuación se puede escribir así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Llamando p a la distancia absoluta de O al plano, y α, β, γ a los cosenos directores del vector $\acute{O}P$ es

$$p = a\alpha \quad ; \quad p = b\beta \quad ; \quad p = c\gamma$$

Como cosenos directores del plano orientado adoptamos los de su vector normal, es decir, α, β, γ, y no sus opuestos. Sustituyendo resulta:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = p$$

Esta ecuación se llama *normal;* sus coeficientes, en vez de ser los coeficientes directores A, B, C, son los cosenos directores α, β, γ, es decir, se deducen de ellos, dividiéndolos por $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, de modo que el segundo miembro resulte *positivo*. Por tanto:

Para formar la ecuación normal del plano basta dividir la ecuación ordinaria por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes directores, con signo + o —, de modo que re-

sulte positivo el segundo miembro constante. Este expresa la distancia del origen al plano.

EJEMPLO: Sea el plano $2x - 3y + 6z = 5$.

La ecuación no es normal, pues la raíz de la suma de cuadrados de los coeficientes directores es $\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, pero se convierte en normal dividiendo por 7 y resulta:

$$\frac{2x}{7} - \frac{3y}{7} + \frac{6z}{7} = \frac{5}{7}$$

Los cosenos directores son: $2/7$, $-3/7$, $6/7$ y la distancia del origen al plano es $5/7$.

NOTA. — En los haces de planos paralelos conviene adoptar para todos estos los coeficientes α, β, γ de uno (lo que equivale a fijar un sentido en la normal) y entonces toma p valores positivos o negativos según la posición del plano.

La distancia entre dos planos paralelos:

$$Ax + By + Cz = D$$
$$Ax + By + Cz = D'$$

es por consiguiente $D - D'$ si estas ecuaciones están en forma normal. En caso contrario, habrá que dividirlas precisamente por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

La distancia del punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ al plano [5] se obtiene trazando por este punto el plano paralelo:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o sea
$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \qquad [6]$$

y la distancia del punto al plano [5] es la distancia entre los planos [5] y [6] es decir:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad [7]$$

Luego, *la distancia de un punto a un plano es el valor que toma en ese punto el cuatrinomio de la ecuación normal.*

La distancia dada por [7] resulta *positiva* si el punto está a distinto lado que el origen respecto del plano.

EJERCICIOS

1. — Obtener las ecuaciones de los planos bisectores de un diedro.

2. — Calcular la distancia de un punto a una recta.

3. — ¿Qué representan las inecuaciones lineales de variables x, y, z?

Lección 44

ALGEBRA VECTORIAL

177. — Suma y diferencia de vectores.

Importantes magnitudes físicas (V. Notas) han conducido para su estudio y medida a la introducción de ciertos entes abstractos, llamados *vectores* y *tensores*.

Se llama *vector* a un par de puntos dados en un cierto orden; el primero se llama *origen*, el segundo *extremo* y su distancia *módulo* del vector. Designaremos los vectores por mayúsculas y sus módulos por las correspondientes minúsculas; es decir: $|A| = a$.

Dos vectores se dicen *iguales* cuando los dos segmentos son iguales, paralelos y acordes; escribiremos: $A = B$.

Esta definición de igualdad caracteriza a los vectores *libres;* únicos que estudiaremos. Para los vectores *axiales* se exige la coincidencia de sus rectas. (V. Curso cíclico, t. I).

Los cosenos directores de la semirrecta que define el vector se llaman también *cosenos directores* de éste.

Dados dos vectores A, B si se aplica B en el extremo de A (es decir, se transporta un vector igual al B), el vector cuyo origen es origen de A y su extremo es el extremo de B, se llama *suma* $A + B$.

Componente de un vector sobre una recta es el vector proyección sobre ella; si se adoptan tres ejes $x\ y\ z$, de origen O, cada vector A tiene tres vectores componentes A_x, A_y, A_z, cuyas medidas con las unidades adoptadas en los respectivos ejes llamaremos *coordenadas* del vector, y pueden ser números positivos o negativos; designándolas por a_x, a_y, a_z, o brevemente x, y, z

Si se suman progresivamente varios vectores $A + B + \dots + L$ se va formando una quebrada cuya proyección sobre cualquier recta es la suma de las proyecciones de sus lados, o sea: *la componente de la suma sobre cualquier eje es la suma de las componentes de los sumandos; las coordenadas de la suma son las sumas de las respectivas coordenadas de los sumandos.*

Por tanto: la suma de vectores es *conmutativa* y *asociativa.*

La *diferencia* $C - A$ es el vector que sumado con A da C; se obtiene sumando a C el opuesto a A, que llamaremos A', pues resulta:

$$(C + A') + A = C + (A' + A) = C$$

Producto mA de un vector A por un número, o de un número por un vector es el vector de igual dirección cuyo módulo se ha multiplicado por m; si m es negativo, cambia el sentido.

Evidentemente

$$m(A+B) = mA + mB$$

puesto que cada componente de la suma es la suma de las respectivas componentes de A y B; y al multiplicar cada una por m también la suma queda multiplicada.

Los vectores adoptados como unidades en los tres ejes serán designados por U, V, W; por tanto, el vector de coordenadas x, y, z como suma de sus componentes, se expresará: $A = xU + yV + zW$.

178. — Multiplicación escalar de vectores.

Producto escalar (o interno) de dos vectores A, A' es el producto numérico de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Es, pues, un *número,* positivo o negativo, según que el ángulo sea agudo u obtuso, dado por la expresión:

[1] $$A.A' = a.a'.\cos AA' = a.\text{proy } A' = a'.\text{proy } A$$

es decir, es el *producto del módulo de un vector por la medida de la proyección del otro sobre él, con su signo correspondiente.*

Sustituyendo el coseno por su expresión mediante los cosenos directores α, β, γ del A y α' β', γ' del A'

$$A.A' = aa'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = a\alpha.a'\alpha' + a\beta\ .\ a'\beta' + a\gamma\ .\ a'\gamma';$$

y como estos productos son las coordenadas x, y, z de A y x', y', z' de A', tenemos la expresión:

[2] $$A.A' = x.x' + y.y' + z.z'$$

EJEMPLO. — Si un vector representa una fuerza y el otro es el camino recorrido por el punto de aplicación, el producto escalar representa el trabajo positivo o negativo realizado por la fuerza. Si las componentes de ésta son x, y, z y las del camino son x', y', z' el trabajo es: $xx' + yy' + zz'$.

El producto escalar es conmutativo; y sólo se anula si es nulo alguno de los vectores, o cuando éstos son perpendiculares.

También el producto escalar tiene la propiedad distributiva, pues si se sustituye en [2] el vector A' por $B' + C'$, el segundo miembro se descompone en dos sumas que son $A.B' + A.C'$.

Es decir: $A(B' + C') = (B' + C')A = AB' + AC'$.

179. — Multiplicación vectorial o externa.

Producto vectorial (o externo) de A por B es el vector de módulo $a.b.\text{sen}\, AB$ perpendicular al plano AB y que forma con A y B un triedro positivo. Lo representaremos así: $A \times B$.

El módulo del producto vectorial es, por tanto, el área del paralelógramo que forman los dos vectores aplicados en un mismo punto.

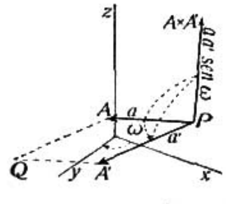
Al permutar A y B cambia de sentido el triedro, luego resulta: $A \times B = - B \times A$.

Si tres vectores ortogonales U, V, W de módulo 1 forman un triedro *positivo*, es, por tanto:

$$[3] \qquad U \times V = W \quad , \quad V \times W = U \quad , \quad W \times U = V$$

pero resultan signos opuestos, si el triedro es negativo.

El producto de cualquier vector por sí mismo es nulo; y lo mismo sucede si son paralelos los dos factores. Recíprocamente, el producto vectorial solamente es nulo si es nulo algún factor, o si ambos están en rectas paralelas o coincidentes.



Dados los vectores A y A', sean x, y, z las coordenadas de A y x', y', z' las coordenadas de A', demostremos que el producto vectorial $A \times A'$ tiene las coordenadas

$$[4] \quad yz' - zy' \;;\; zx' - xz' \;;\; xy' - yx'$$

es decir, tiene la expresión

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} U & V & W \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = aa' \begin{vmatrix} U & V & W \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

1.° Aplicando la fórmula [3'] de (173) se obtiene:

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2 = \text{sen}^2 AA'$$

luego el módulo del vector así formado es aa' sen AA'.

2.° Como x, y, z son los coeficientes directores de A, y son x', y', z' los de A', los coeficientes directores de la dirección perpendicular al plano AA' son precisamente los [4], es decir, el vector expresado por el determinante es perpendicular a A y A'.

3.º Para ver si su sentido respecto de AA' es positivo, basta comprobarlo en el caso más sencillo; si A y A' son los vectores unitarios U y V, el determinante se reduce a

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = W$$

que es, en efecto, el producto $U \times V$, si el triedro de referencia es *positivo;* pero si es negativo el producto es el vector opuesto. En resumen: *El producto $A \times A'$ está expresado por el determinante* [5] *o por las coordenadas* [4] *si el triedro de referencia es positivo; pero si éste es negativo, es preciso multiplicar el determinante y las coordenadas por* -1.

De la expresión [4] resulta la propiedad *distributiva:*

[6] $$A \times (A_1 + A_2) = A \times A_1 + A \times A_2$$

pues si se sustituye $x' = x_1 + x_2$, $y' = y_1 + y_2$, $z' = z_1 + z_2$ en [4] resultan como coordenadas las sumas:

$$\begin{matrix} yz_1 - zy_1 & zx_1 - xz_1 & xy_1 - yx_1 \\ + yz_2 - zy_2 & + zx_2 - xz_2 & + xy_2 - yx_2 \end{matrix}$$

es decir, las coordenadas de $A \times A_1$, más las de $A \times A_2$.

EJEMPLO. — El producto vectorial se ha introducido como una generalización natural del *momento* de un vector A respecto de un punto P, al cual podremos ahora definir como *producto vectorial del vector A por el vector que tiene el origen P y el extremo en la recta de A.*

De las propiedades demostradas resulta: *el momento de una suma de vectores es la suma de sus momentos.*

Notaciones vectoriales. — Todavía se usan diversas notaciones para el producto vectorial, única operación nueva de la Aritmética vectorial, ya que el producto escalar, por ser generalización del producto de números, debe designarse como se hace en Algebra, es decir, con un punto o sin signo ninguno, de igual modo que la adición y la sustracción se siguen representando por $+$ y $-$.

El signo de Burali-Forti es usado por los autores italianos y también por algunos de otros países (Butty, Garnier, Lainé ....). Algunos alemanes siguen usando la notación $(A \,.\, B)$ para el producto escalar y la $[A \,.\, B]$ para el vectorial.

El cómodo signo $\times$ se va imponiendo en los libros modernos franceses (Juvet, Veronnet, ...), alemanes (Kowalewski, Lagally, ...), etc.

EJERCICIOS

1. — La condición necesaria y suficiente para que los vectores A, B, C, sean paralelos a un plano, es: $A(B \times C) = 0$.

2. — Demostrar la relación:

$$A \times (B \times C) = (A.C)B - (A.B)C$$

3. — Demostrar que el producto llamado mixto de tres vectores: $(A \times B)C$ que tienen el mismo origen, representa el volumen del paralelepípedo que determinan.

LECCIÓN 45

ÁLGEBRA TENSORIAL

Funciones físicas de punto y de conjunto.

Las magnitudes físicas son de dos tipos: *funciones de punto* y *funciones de conjunto*. He aquí algunos ejemplos:

La temperatura en un punto, la velocidad de un punto material, la tensión de un sólido en uno de sus puntos, cuando actúan sobre el cuerpo fuerzas exteriores, son ejemplos de magnitudes del primer tipo, esto es, funciones de punto, aunque de clase muy diversa, que pronto distinguiremos. En cambio, las longitudes, áreas, volúmenes, momentos de cualquier orden, de líneas, superficies y cuerpos; y la fuerza viva de un móvil, son funciones de conjunto, pues asignan a cada continuo, sea arco de curva, recinto plano o tridimensional, un *número* o bien un *vector*, o más en general, un *tensor*.

Clasificación de las magnitudes puntuales. — En un punto P pueden considerarse magnitudes físicas de tipo muy diverso. He aquí algunos ejemplos:

1) Masa del punto material aislado, densidad de la materia continua en P, potencial eléctrico en P, temperatura, etc. Tales magnitudes pueden ordenarse en escala de menor a mayor y son susceptibles de medida por un número real, positivo, negativo o nulo. Se llaman *magnitudes escalares*, o brevemente *escalares*.

2) *Magnitudes vectoriales*. Hay magnitudes que en cada dirección por P tienen una intensidad y ésta varía con la dirección, es decir, es función de los cosenos directores α_1, α_2, α_3. En particular las intensidades en las direcciones de los ejes se llaman sus componentes, a_1, a_2, a_3; pero esto no basta para asegurar el carácter vectorial de la magnitud. Así, p. ej., la intensidad luminosa de una lámpara varía con la dirección, pero no es magnitud vectorial. Tampoco basta que en cada punto haya una dirección de intensidad máxima (*), representada por un segmento dirigido, como se repite en los textos. Por ejemplo, cada homotecia asigna a cada punto P un segmento dirigido PQ, pero la homotecia no es magnitud vectorial.

La propiedad que caracteriza a las magnitudes vectoriales es la ley de la proyección ortogonal: la intensidad en la dirección de cosenos directores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, debe ser $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$.

Tal sucede con las fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.

3) *Magnitudes tensoriales*. Hay magnitudes más complejas, que a cada dirección por el punto P le hacen corresponder, no un escalar, sino un vector. Tal sucede con la *tensión* en cada punto de un sólido en equilibrio, bajo la acción de fuerzas exteriores. Si se imagina una pequeña sección plana por P y se supone suprimida la porción de materia contigua a una de las dos superficies producidas en su seno, será preciso aplicar a la otra en P una fuerza F para restablecer el equilibrio. Esta fuerza F es función de la orientación de aquella sección, o sea de la dirección X de su normal, la cual elegimos en el sentido de la porción suprimida de materia. Esta función es lineal, como se demuestra en Estática (véase la Nota) y basta conocer los vectores F correspondientes a tres direcciones ortogonales, para calcular el que corresponde a cualquier otra.

(*) Nótese que no sólo en esa dirección se manifiesta la magnitud. Para descubrir la ley de caída de los graves, Galileo adoptó un plano inclinado en el cual se manifiesta igualmente la gravitación, pero atenuada.

Concepto de vector y de tensor.

Puesto que las componentes del vector PQ respecto de ejes trazados por su origen P son las coordenadas de Q, las fórmulas de transformación de componentes son las mismas de cambio de coordenadas:

$$a'_i = \Sigma\, a_r\, \alpha^i_r \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad [1]$$

llamando α^i_j al coseno director del eje x'_i respecto del x_j.

Estas fórmulas expresan que cada coordenada a'_i, o sea la proyección del vector sobre el eje x'_i, es la suma de proyecciones de las componentes a_r.

Esta fórmula expresa también que la componente en cada dirección x'_i es función *lineal* de esa dirección, es decir, de sus cosenos directores. Resulta así esta definición equivalente:

El vector como función escalar de la dirección. Vector de origen P es una función escalar lineal de las direcciones de origen P, es decir, el *valor* o *componente* que corresponde a cada dirección X de cosenos directores α_r está expresado por la fórmula: $a = \Sigma\, a_r\, \alpha_r$.

Concepto de tensor. El ejemplo de la tensión en cada punto de un cuerpo sólido fué el que dió origen a la teoría general de los tensores, y para fijar las ideas nos referiremos concretamente a él.

Supongamos conocida la tensión unitaria para cada una de las orientaciones de los tres planos coordenados, es decir, los vectores F_1, F_2, F_3, que corresponden a las direcciones de los ejes, y designemos así las componentes cartesianas de esos tres vectores:

$$\begin{array}{llll} F_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ F_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ F_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \qquad [2]$$

Para cada pequeña sección plana por P, o sea, para cualquier versor X $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, la tensión unitaria correspondiente está representada (*) por el vector: $F = F_1\, \alpha_1 + F_2\, \alpha_2 + F_3\, \alpha_3$.

El estado de tensión en el punto P queda, pues, caracterizado por estos tres coeficientes vectoriales F_1, F_2, F_3: o lo que es lo mismo, por el cuadro de números o matriz (a_{ij}). El tensor en P es,

(*) En efecto: si se considera el tetraedro $OABC$ que intercepta en el primer triedro el plano ABC de cosenos directores α_1, α_2, α_3, y es s el área del triángulo ABC, el esfuerzo correspondiente es Fs; como las áreas de las otras caras son los productos de s por los cosenos, los esfuerzos correspondientes son $F_1 s\alpha_1$, $F_2 s\alpha_2$, $F_3 s\alpha_3$. Basta escribir la igualdad de equilibrio y suprimir el factor s.

pues, el ente abstracto definido por los tres coeficientes vectoriales o por la matriz de sus nueve componentes, que caracterizan el estado de tensión en el punto P. Por brevedad suele llamarse *tensor* al símbolo formado por estos nueve números o por los tres vectores.

En muchas otras cuestiones se presentan asimismo magnitudes físicas caracterizadas por una función vectorial lineal; y en recuerdo del primer problema de ese tipo que fué estudiado, han recibido el nombre de *tensores* dobles, o *díadas*, siendo necesario ese calificativo para distinguirlos de los tensores triples, cuádruples, etc. Refiriéndonos al tipo más sencillo y más importante para la Técnica, daremos, pues, la definición siguiente:

DEF. 1. — (El tensor como *función vectorial*). *Tensor doble* o *díada* en el punto P es una *función vectorial lineal* de las direcciones por el punto P, del tipo:

$$F = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 \qquad [3]$$

Aunque esta definición es la más clara y expresiva, suele preferirse la definición equivalente, análoga a la de los vectores, como número complejo de nueve componentes, o sea como matriz; pero como estos nueve números varían al modificar los ejes, es preciso caracterizar su modo de transformación.

Si los cosenos directores del nuevo eje x'_i son $\alpha^i_1, \alpha^i_2, \alpha^i_3$, el vector F correspondiente a esa dirección tiene según [2] las componentes:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}\,\alpha^i_1 + a_{21}\,\alpha^i_2 + a_{31}\,\alpha^i_3 \\ f_2 &= a_{12}\,\alpha^i_1 + a_{22}\,\alpha^i_2 + a_{32}\,\alpha^i_3 \\ f_3 &= a_{13}\,\alpha^i_1 + a_{23}\,\alpha^i_2 + a_{33}\,\alpha^i_3 \end{aligned} \qquad [4]$$

luego su proyección sobre ese eje x_j, o sea la nueva componente a'_{ij} del tensor, vale:

$$a'_{ij} = f_1\,\alpha^j_1 + f_2\,\alpha^j_2 + f_3\,\alpha^j_3 = \Sigma\, a_{rs}\,\alpha^i_r\,\alpha^j_s$$

entendiendo que la sumatoria es doble, extendida a todos los pares de índices $r, s = 1, 2, 3$.

Obtenemos, pues, esta definición equivalente:

DEF. 2. (El tensor como *matriz*). *Tensor doble* o *díada* es un ente abstracto representado por una matriz (a_{ij}) que al girar los ejes se transforma linealmente así:

$$a'_{ij} = \Sigma\, a_{rs}\,\alpha^i_r\,\alpha^j_s \qquad (r, s = 1, 2, 3) \qquad [5]$$

Nótese el significado de esta matriz: las tres filas definen los tres vectores homólogos de los tres versores coordenados, o sea los tres coeficientes vectoriales que definen el tensor; los números de cada columna son los coeficientes de las expresiones [4] de las componentes f_i de F.

Obsérvese también el diverso significado de los índices en la fórmula sumatoria [5]; los i, j son fijos en cada suma y perduran en el resultado, actuando como *parámetros;* en cambio, los índices de sumación r, s, toman los valores 1, 2, 3, y desaparecen en el resultado; por esta razón se llaman índices *mudos*, y pueden cambiarse sus nombres designándolos por otras letras, sin modificar el significado de la fórmula.

Significación de los tensores. De las relaciones lineales [3] y [5] resulta inmediatamente:

Si un tensor tiene todas sus componentes nulas en un sistema coordenado, también son nulas en cualquier otro. Tal tensor de componentes nulas se llama *tensor nulo.*

La anulación de un tensor expresa, pues, una propiedad intrínseca, independiente del sistema de coordenadas, es decir, una propiedad *geométrica* si relaciona elementos geométricos y una *ley natural* si relaciona elementos físicos De aquí la importancia capital de descubrir tensores para expresar con ellos las propiedades geométricas y las leyes físicas. La Geometría diferencial y la Física matemática encuentran en el cálculo tensorial su instrumento más eficaz.

Ejemplo: la curvatura total de una superficie viene expresada por un tensor; la anulación de éste caracteriza las superficies desarrollables sobre el plano. Este tensor de curvatura, aplicado al espacio-tiempo ha permitido a Einstein formular su ley de gravitación.

Tipos especiales de tensores.

El tensor más sencillo no nulo es el *tensor unidad*:

[6] $$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La función vectorial lineal que representa es la $F(X) = X$, es decir, el vector homólogo de cada versor es este mismo; y recíprocamente, esta función idéntica tiene su expresión en la matriz [6]; como esta propiedad es intrínseca, independiente de las coordenadas, las componentes de este tensor en todo sistema de coordenadas son siempre las mismas.

Igual significado intrínseco tiene el tensor $-U$, de diagonal $-1, -1, -1$; la función vectorial correspondiente es $F(X) = -X$. Tal tensor es, por ejemplo, el que representa el estado de tensión en el centro de una esfera comprimida por igual en todas direcciones; mientras que en el caso de tracción uniforme aparece el tensor de esfuerzos U.

Obsérvese que tiene carácter invariante la anulación de todas las componentes no principales cuando las principales son iguales, como acontece en estos dos casos: $1, 1, 1, -1, -1, -1$, y más en general a, a, a; en cambio, si éstas son a, b, c, aunque sean nulas todas las demás, al cambiar de coordenadas varían en general las nueve componentes, como se ve aplicando la fórmula [5].

En el caso del tensor de esfuerzos y en algunos otros, son iguales las componentes $a_{ij} = a_{ji}$, llamadas *conjugadas* en la matriz, ésta y el tensor, se llaman *simétricos.* En otros casos, los elementos

conjugados son opuestos, siendo por tanto nulos los elementos principales a_{11}, a_{22}, a_{33}; tales tensores se llaman ***antisimétricos*** o ***hemisimétricos***.

Estas denominaciones carecerían de valor si no fuera por el hecho sorprendente de que simetría y antisimetría son independientes de los ejes; es decir: si respecto de una terna es $a_{ij} = a_{ji}$, también es $a'_{ij} = a'_{ji}$ respecto de la nueva terna; y análogamente se conserva la antisimetría al cambiar de ejes. Esto es corolario de la propiedad siguiente.

En el caso general de tensor cualquiera, las fórmulas [5] aplicadas a componentes conjugadas, dan componentes conjugadas, es decir, la matriz conjugada de (a_{ij}) se transforma por la misma fórmula [5] y por tanto define un tensor (a_{ji}), el cual se llama *conjugado* del (a_{ij}).

Por tanto, si la matriz conjugada de (a_{ij}) es esta misma, también la transformada lineal es conjugada de sí misma, es decir, simétrica; y análogamente en el otro caso.

Cálculo aritmético con tensores.

De la *Def.* 1 resulta que la suma de tensores es un tensor; y también de la *Def.* 2 resulta que las componentes $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ obtenidas sumando las componentes homólogas de dos tensores A y B, se transforman por la misma fórmula lineal [5], luego esos nueve números c_{ij} componen un tensor. Este se llama *suma* de ambos y se designa así: $A + B = B + A$.

Igualmente forman tensor las componentes ka_{ij}, siendo k un número cualquiera. El nuevo tensor se llama *producto* de k por A o de A por k y se representa así: $kA = Ak$.

Queda definida mediante ambas operaciones la *combinación lineal* de tensores $\Sigma\, k_r A_r$ de coeficientes reales cualesquiera; sus componentes son las combinaciones lineales análogamente formadas mediante los coeficientes k_r con las componentes homólogas.

Ejemplo importante, que habremos de utilizar, es la descomposición siguiente: dado el tensor $A = (a_{ij})$ llamemos s_{ij} y d_{ij} a la suma y a la diferencia de los elementos simétricos, es decir:

$$s_{ij} = a_{ij} + a_{ji} \qquad\qquad d_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$$

y resultan dos nuevos tensores: el $S = (s_{ij})$ que es suma del A y de su conjugado; el $D = (d_{ij})$, que es diferencia de ambos. Resulta así la descomposición siguiente:

$$A = \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D$$

El tensor S es *simétrico* por tener iguales los elementos simétricos respecto de la diagonal. El D tiene nulos los elementos principales y opuestos los conjugados; luego es *antisimétrico*.

Contracción de tensores. — Consecuencia muy importante de la Def. 2 es esta igualdad:

$$a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad [7]$$

En efecto, el coeficiente que resulta para a_{11} al sumar las expresiones de a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} mediante la fórmula de transformación [5] es la suma de los cuadrados de los tres cosenos directores, o sea 1; y análogamente valen 1 los coeficientes de a_{22} y a_{33}; mientras que el coeficiente de a_{rs} (r diferente de s) es: $\Sigma \alpha^i{}_r \alpha^i{}_s = 0$; por la supuesta ortogonalidad de los nuevos ejes coordenados.

La igualdad [7] puede enunciarse así: *La suma de componentes principales de un tensor* (a_{ij}) *es invariante.*

Esta operación que deduce un escalar partiendo de un tensor doble se llama *contracción del tensor*. Generalizada convenientemente a los de rango superior es muy importante en la teoría general.

Mientras esta operación rebaja el rango, y la suma la conserva, veamos ahora cómo se logra, inversamente, construir tensores de rango tan alto como se quiera, partiendo de los vectores.

Producto tensorial de vectores. — Si se multiplican las componentes del vector $A(a_1, a_2, a_3)$ por las componentes del vector $B(b_1, b_2, b_3)$ resultan nueve productos: $c_{ij} = a_i \,.\, b_j$, que componen un tensor; pues en virtud de la fórmula de transformación [5] las nuevas componentes son:

$$c'_{ij} = a'_i \,.\, b'_j = (\Sigma\, a_r\, \alpha^i{}_r)\ (\Sigma\, b_s\, \alpha^j{}_s) = \Sigma\, a_r\, b_s\, \alpha^i{}_r\, \alpha^j{}_s,$$

es decir, obedecen a la ley lineal. Esta regla de multiplicación se llama *tensorial* o de Gibbs, y el resultado obtenido se enuncia así:

El producto tensorial de dos vectores es un tensor doble.

He aquí desarrollados los dos productos de los vectores A y B:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{bmatrix}$$

observándose que son tensores conjugados, y su diferencia es el tensor antisimétrico:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 0 & a_1 b_2 - b_1 a_2 & a_1 b_3 - b_1 a_3 \\ a_2 b_1 - b_2 a_1 & 0 & a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 & a_3 b_2 - b_3 a_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Salta a la vista que las tres componentes situadas a un lado de la diagonal principal son precisamente las que suelen tomarse como componentes del vector llamado *producto vectorial;* debiendo elegirse las de uno u otro lado de la diagonal, según sea el convenio adoptado para el sentido de dicho vector, convenio íntimamente ligado con el signo de la terna de vectores coordenados. Esta distinción entre triedros positivos y negativos es netamente intuitiva y no expresable algebraicamente.

Según la definición de vector, el citado producto vectorial no es un vector propiamente dicho, sino un *semi-tensor;* la figura que se se conserva invariante es el par de vectores opuestos, en uno y otro sentido; pues si sólo se adopta uno de ellos, al tomar como nuevo triedro coordenado uno de sentido opuesto al anterior, dicho vector convencionalmente adoptado para representar el producto, se convierte en su opuesto.

Por el contrario, el producto escalar es invariante respecto de todo cambio de coordenadas ortogonales y aparece como suma de elementos principales del tensor *AB*, es decir, es el tensor (de rango 0) deducido de éste por la operación que hemos llamado *contracción*.

Se llama *valor, intensidad* o *componente* del tensor $F(X)$ en la dirección definida por el versor X a la componente del vector $F = F(X)$ en esa dirección, o sea al producto escalar $F \cdot X$.

Como las componentes de F respecto de los ejes vienen dadas por las formas lineales [4] al multiplicarlas por las componentes x_1, x_2, x_3, de X y sumar, resulta como valor de dicho producto escalar la suma doble:

$$a = F \cdot X = \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (i, j = 1, 2{,}3)$$

Esta forma cuadrática (es decir polinomio homogéneo de segundo grado) tiene importancia capital en el estudio del tensor.

NOTA. — La componente del vector $F(x)$ en la dirección dada por el versor Y es análogamente el producto escalar:

$$F \cdot Y = \Sigma\, a_{ij}\, x_i\, y_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

Esta expresión justifica otro método de exposición de la teoría, que data de Hamilton y Gibbs, seguida por muchos autores modernos, basada en esta definición.

TENSOR DE INERCIA. — Se llama tensor de inercia de un sistema de masas respecto del origen O, al que tiene por componentes principales los momentos de inercia respecto de los ejes y como componentes secundarias los momentos mixtos o centrífugos, con signo opuesto.

Suponiendo una sola masa unitaria en el punto x, y, z; $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, el tensor de inercia tiene la expresión:

$$I = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix}$$

Que esta matriz define, en efecto, un tensor, resulta inmediatamente de la descomposición anterior, puesto que la matriz sustraendo representa el producto tensorial del vector $P(x, y, z)$ por sí mismo, mientras el minuendo es el tensor unitario con el coeficiente numérico r^2; luego I es un tensor doble diferencia de dos tensores: $I = r^2\, U - PP$.

Esta descomposición muestra además el significado geométrico de I, pues llamando q al segmento de proyección de P sobre el eje Q arbitrariamente trazado por O, y d a la distancia de P hasta el eje, el valor de I en esa dirección Q, en virtud de [6] es:

$$a = r^2 - q^2 = d^2$$

Por tanto, la intensidad o valor del tensor I en cada dirección Q es precisamente el momento de inercia de la masa unitaria respecto de ese eje.

Consideremos ahora en lugar de una masa única todo un sistema de masas m_i en los puntos (x_i, y_i, z_i) respectivamente $(i = 1, 2, \ldots\, n)$ el tensor de inercia es la suma de los n tensores correspondientes a las diversas masas y su valor en cada dirección es, por tanto, el momento de inercia respecto de ella.

CAPITULO VIII

SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO

Lección 46

PROPIEDADES GENERALES DE LAS CUÁDRICAS

180. — Superficies cilíndricas y cónicas.

Las superficies más sencillas, no planas, son las definidas por ecuaciones de segundo grado en coordenadas cartesianas y se llaman superficies de *segundo grado*, o de *segundo orden*, o bien *cuádricas.*

La ecuación general de la superficie cilíndrica de segundo grado que tiene las generatrices paralelas al eje z es la ecuación general de segundo grado con las variables x, y, o sea:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

Su estudio se reduce al de las cónicas.

Según (167) todos los grupos de coordenadas λx_0, λy_0, λz_0 forman una recta que pasa por 0, luego la ecuación general de las superficies cónicas de segundo grado con vértice en el origen es la ecuación homogénea

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy = 0$$

cuyo estudio se reduce también al de las curvas de segundo orden, cortando por un plano que no pasa por el origen.

Superficies cilíndricas y cónicas de revolución. — Sabemos que la ecuación de un cilindro, cuando se adopta el eje z paralelo a las generatrices, es de forma $f(x, y) = 0$ y recíprocamente, toda ecuación que carece de una variable representa una superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje correspondiente. Si ésta es circular, la ecuación debe representar en el plano xy una circunferencia, y si adoptamos su centro como origen, la ecuación de la superficie cilíndrica circular de generatrices paralelas al eje z, es en coordenadas rectangulares: $x^2 + y^2 = r^2$.

La ecuación $x^2 + y^2 = r^2 z^2$ por ser homogénea representa una superficie cónica de vértice 0. Cortando por el plano $z = 1$ resulta la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; luego la superficie cónica es circular.

Recíprocamente, dado un cono circular cualquiera de vértice 0, cuya directriz sea la circunferencia de radio r, a distancia h, o sea:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad , \quad z = h$$

la ecuación de la superficie cónica proyectante es:

$$x^2 + y^2 = z^2 \frac{r^2}{h^2}$$

puesto que haciendo $z = h$ resulta la circunferencia propuesta.

181. — Superficie esférica.

Todos los puntos (x, y, z) que distan r del punto 0 (a, b, c) satisfacen a la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \qquad [1]$$

y recíprocamente; luego ésta es la ecuación de la superficie esférica de centro O y radio r.

Desarrollando [1] se obtiene esta otra:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2) - r^2 = 0$$

Dada una ecuación de segundo grado que carece de términos en xy, yz, zx y que tiene iguales los coeficientes de x^2, y^2, z^2, es decir (dividiendo por ese coeficiente)

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \qquad [2]$$

representa una superficie esférica cuyo centro está determinado por las coordenadas:

$$a = -\frac{A}{2} \quad ; \quad b = -\frac{B}{2} \quad ; \quad c = -\frac{C}{2}$$

y el radio por la igualdad $(a^2 + b^2 + c^2) - r^2 = D$
la cual exige que sea $D < a^2 + b^2 + c^2$

Nota. — No es menester recordar en la práctica esta condición; basta escribir la ecuación [2] en la forma [1] y en el segundo miembro, aparece r^2. Si este segundo miembro resulta nulo, suele decirse que la esfera es de radio nulo; y si resulta negativo, que la esfera es *imaginaria*.

Ejemplo 1.° — **Si la ecuación es:** $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z = 0$

Las coordenadas del centro son: $a = -2$; $b = 1$; $c = 3$.

Para formar los cuadrados: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2$.

es preciso sumar $4 + 1 + 9 = 14$ *a los dos miembros y por lo tanto el radio es* $\sqrt{14}$.

EJEMPLO 2.° — Si la ecuación es: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 14 = 0$ resulta $r = 0$; es decir, la superficie se reduce al único punto real: $x = -2$; $y = 1$; $z = 3$.

Si en vez de $+14$ el término constante es cualquier otro número mayor que 14, en el segundo miembro quedará un término negativo y no existe superficie esférica. Suele decirse que la ecuación representa una superficie esférica imaginaria para indicar que todas las soluciones de la ecuación son imaginarias.

182. — Elipsoide.

Generalicemos la ecuación de la superficie esférica con centro en el origen de coordenadas, adoptando en vez del radio tres segmentos cualesquiera: $a, b, c,$ y estudiemos la nueva ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad [3]$$

La superficie que representa se llama *elipsoide*, de semiejes a, b, c. Estos son, en efecto, los segmentos que la superficie intercepta en los semiejes coordenados, pues anulando y, z, o bien z, x, o bien x, y, resulta respectivamente: (*)

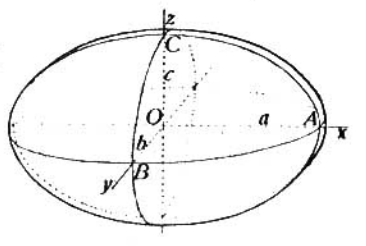
$$x = \pm a \quad , \quad y = \pm b \quad , \quad z = \pm c$$

Forma del elipsoide. — Si fijamos un valor de z, la sección de la superficie por el plano $z = z_0$ es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2 k^2} + \frac{y^2}{b^2 k^2} = 1 \quad , \qquad z = z_0$$

llamando:

$$k^2 = 1 - \frac{z_0^2}{c^2} \leqq 1 \quad ; \qquad z_0 \leqq c$$



Los semiejes de esta elipse son: $ak \leqq a$; $bk \leqq b$ y van disminuyendo al crecer z_0, hasta anularse para $z_0 = c$, conservándose constante la razón $ak : bk = a : b$. Todas las elipses son, pues, *semejantes;* y para $z_0 > c$ no hay intersección.

Casos especiales. — En particular, tiene interés el caso $a = b$, pues las elipses secciones por planos paralelos al xy son circunferencias. El elipsoide se llama entonces *de revolución*, porque se puede engendrar haciendo girar la elipse meridiana de semiejes a y c alrededor del eje z. Si es $c > a$ se llama *elipsoide alargado;* si es $c < a$ se llama *elipsoide achatado*, o simplemente *esferoide*.

(*) No se confundan los *semiejes coordenados*, que son semirrectas, con los *semiejes de las cuádricas*, que son segmentos, o bien las medidas de estos segmentos.

183. — Hiperboloides.

Así como la ecuación de la hipérbola difiere de la ecuación de la elipse en el signo de un término, cambiemos signos de todos los modos posibles en la ecuación [3], comenzando por considerar ésta:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [4]$$

Las secciones por los planos $z=z_0$ son las elipses:

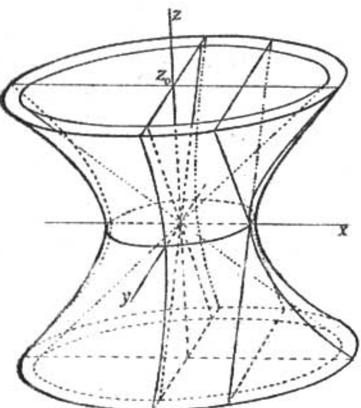
$$\frac{x^2}{a^2k^2}+\frac{y^2}{b^2k^2}=1, \qquad z=z_0$$

siendo:

$$k^2=\frac{z_0{}^2}{c^2}-1 \gtreqless 0 \quad \text{para } z_0 \gtreqless c$$

Aquí, al revés que en el elipsoide debe ser $z_0 \gtreqless c$, para que haya intersección; y ésta es una elipse, de forma invariable cuyos semiejes ak y bk van creciendo infinitamente al crecer $|z_0|$.

Esta superficie tiene, en consecuencia, una *hoja* encima del plano $z=c$, y otra debajo del $z=-c$; se llama, por esto, *hiperboloide de dos hojas*.



Si $a=b$, la superficie es de revolución respecto del eje z.

Cambiando un solo signo en la ecuación [3] resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad [5]$$

Al cortar por el plano $z=z_0$ resulta la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2k^2}+\frac{y^2}{b^2k^2}=1 \qquad z=z_0;$$

siendo:

$$k^2=1+\frac{z_0{}^2}{c^2} \geqq 1$$

En este caso existe elipse sección para todo valor de z_0; y conservándose semejante, al aumentar z_0, va creciendo a uno y otro lado del plano xy, el cual determina la elipse mínima, de semiejes a, b, llamada *elipse de garganta.*

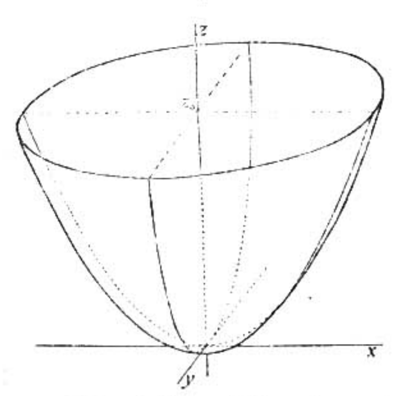
Como no hay interrupción en la superficie, ésta se llama ***hiperboloide*** de una hoja.

Si es $a = b$, el hiperboloide es de revolución, respecto del eje z.

184. — Paraboloides.

PARABOLOIDE ELÍPTICO. — De igual modo que la ecuación reducida de la parábola tiene un término cuadrado y uno de primer grado, consideremos las ecuaciones con un sólo término de primer grado, comenzando por el caso en que los coeficientes de términos cuadrados sean positivos:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z. \qquad [6]$$



Escribimos de este modo los coeficientes, porque así aparecen las secciones por los planos coordenados, llamados *principales*, en esta forma:

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = 2qz.$$
$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz$$

que representan dos parábolas de parámetros p y q, dirigidas ambas hacias las z positivas.

Forma de la superficie. — Las secciones por planos $z = z_0$ son elipses de semiejes a y b tales que:

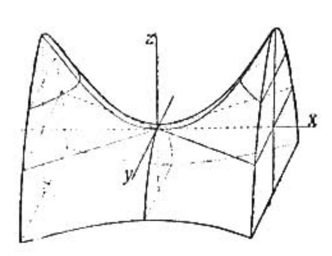
$$a^2 = 2p\, z_0 \quad , \quad b^2 = 2q\, z_0.$$

si es $z_0 > 0$; y estos semiejes van creciendo infinitamente con z_0; es decir, la superficie se extiende infinitamente en el sentido de las z positivas, siendo las secciones horizontales elipses semejantes. En cambio, para $z_0 < 0$ no resulta intersección real.

Esta superficie tiene, por tanto, una sola hoja, situada en la región de las z positivas, la cual es tanto más abierta cuanto mayores sean p y q; si es $p = q$ el paraboloide es de *revolución* y sus secciones normales al eje z son circunferencias; si p y q son desiguales, la superficie no es *redonda* (es decir, no es de revolución) y tendrá forma tanto más aplastada u ovalada cuanto más difieran entre sí p y q.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO. — Se llama así la superficie definida por la ecuación:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad [7]$$



Las dos parábolas secciones principales:

$$y = 0 \quad , \quad x^2 = 2pz;$$

$$x = 0 \quad , \quad y^2 = -2qz;$$

están dirigidas en sentidos contrarios.

Las secciones por los planos $z = z_0$ son todas hipérbolas y por eso se llama *hiperbólico* este paraboloide.

Esta es la única de las cuádricas propiamente tales (esto es, no cónica) que nunca es redonda; por ser todas sus secciones planas hipérbolas o parábolas.

185. — Simetrías de las cuádricas.

Las superficies [3], [4], [5] se llaman *cuádricas con centro,* porque sus ecuaciones no se alteran al cambiar los signos de x, y, z simultáneamente, es decir: si un punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el simétrico $(-x, -y, -z)$ respecto del origen.

Tampoco se altera la ecuación al cambiar el signo de una sola coordenada, es decir: si el punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el $(x, y, -z)$, simétrico respecto del plano xy; y análogamente los simétricos respecto de los otros dos planos coordenados.

Tampoco se altera la ecuación al cambiar los signos de dos coordenadas, es decir: si el punto (x, y, z) está en la superficie, también lo está el $(-x, -y, z)$, simétrico respecto del eje z; y análogamente respecto de los otros ejes.

Resumen: *las tres cuádricas con centro son simétricas respecto de ese punto, respecto de los tres planos coordenados y respecto de los tres ejes coordenados.*

Los paraboloides son simétricos respecto de dos planos coordenados y del eje común a ellos, pero carecen de centro de simetría.

186. — Cuádricas degeneradas.

Toda ecuación que sólo tiene términos cuadrados y término constante:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

representa una de las cuádricas con centro estudiadas en esta lección, pues puede escribirse en la forma [3], [4], [5], si bien pueden aparecer permutados los ejes.

DISCUSIÓN. — *No para que se aprendan las fórmulas generales, sino para que se vea el método que deba seguirse en cada caso numérico*, veamos lo que representa la ecuación, cuando se anula alguno de los coeficientes, distinguiendo tres casos esenciales:

I. — *Término constante nulo.* Es decir: $D = 0$.

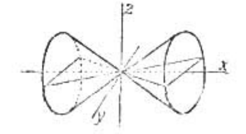
La ecuación homogénea:

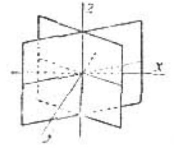
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0 \qquad [8]$$

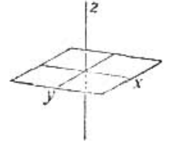
representa, como hemos visto en (180), un *cono*, cuyo vértice es el origen O. Dentro de este tipo de cono, cabe que algún término *cuadrado se anule y el* cono degenera reduciéndose a un par de planos; sea por ejemplo $C = 0$; la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 = 0; \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\frac{A}{B}} \qquad [9]$$

representa dos planos que pasan por el eje z; si A y B tienen igual signo, no existen tales planos, pues solamente los puntos $x = y = 0$ del eje z satisfacen a la ecuación; pero como hay soluciones complejas, se dice que representa *dos planos imaginarios.*







Sean $C = 0$, $B = 0$. La ecuación

$$Ax^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \qquad [10]$$

representa el plano $x = 0$, considerado como doble. Análogamente si $z^2 = 0$. (Fig. 3).

II. — *Ecuación no homogénea.* Suponiendo $D \neq 0$, sea, por ejemplo, $C = 0$; la ecuación:

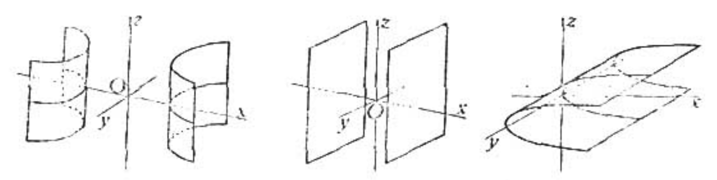
$$Ax^2 + By^2 = D \qquad [11]$$

representa en el plano (x, y), una cónica (real o imaginaria) y todos los puntos que se proyectan en ella en dirección del eje z, también satisfacen a la ecuación, cualquiera que sea su coordenada z, luego: la ecuación [11] representa un cilindro de generatrices paralelas al eje z.

Si es $C = 0$ y $B = 0$, la ecuación:

$$Ax^2 = D \quad ; \quad x = \pm\sqrt{\frac{A}{D}} \qquad [12]$$

representa dos planos paralelos, si D y A tienen el mismo signo; en caso contrario se dice que representa dos planos paralelos imaginarios, por la misma razón antes dada.



III. — *Paraboloides degenerados.* — Dentro del tipo de los paraboloides $Ax^2 + By^2 = z$, si se anula un término cuadrado, la ecuación se reduce al tipo:

$$Ax^2 = z \qquad [13]$$

que representa un cilindro parabólico de generatrices paralelas al eje y.

Si se anulan los dos términos cuadrados, la ecuación se reduce a $z = 0$ que representa el plano xy; para conservar el carácter de cuádrica se dice que representa además el plano del infinito.

Resumen: La ecuación incompleta, dentro de los tipos estudiados en las cinco cuádricas representa una *superficie cónica* (que se puede reducir a dos planos secantes) si es homogénea; y una *superficie cilíndrica* (que se puede reducir a dos planos paralelos) si no es homogénea.

NOTAS

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Después de haber estudiado las ecuaciones más sencillas de segundo grado, consideremos la ecuación más general posible:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

La razón de elegir esta notación para los coeficientes, que parece no seguir el orden alfabético, se ve inmediatamente pasando a coordenadas cartesianas homogéneas (*), es decir, poniendo x/t, y/t, z/t, en vez de x, y, z, y así resulta la ecuación homogénea:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Lxt + 2Myt + 2Nzt = 0$$

DETERMINACIÓN DE LA CUÁDRICA. — Como la ecuación tiene diez coeficientes, dividiendo por uno de ellos no nulo quedan nueve; son, pues, necesarias *nueve* condiciones para determinar una cuádrica.

Dar un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) de la superficie es dar una ecuación:

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + Dt_0^2 +$$

$$2Fy_0z_0 + 2Gz_0x_0 + 2Hx_0y_0 + 2Lx_0t_0 + 2My_0t_0 + 2Nz_0t_0 = 0$$

entre los coeficientes, luego *son necesarios nueve puntos para determinar una cuádrica.*

(*) El lector puede suponer coordenadas cartesianas homogéneas, pero todo lo que sigue vale igualmente para coordenadas proyectivas homogéneas.

Cabe, sin embargo, que por nueve puntos dados pasen dos cuádricas. Basta, en efecto, imaginar dos cuádricas secantes y elegir nueve puntos de su intersección.

Pero si por nueve puntos pasan dos cuádricas $f = 0$, $\varphi = 0$, también pasan las infinitas cuádricas del haz $f - \lambda\varphi = 0$, cualquiera que sea el número λ, pues se satisfacen para las soluciones comunes a ambas, luego resulta:

Por nueve puntos pasa una sola cuádrica o bien infinitas.

Otros modos de determinar una cuádrica son las siguientes:

Por un punto y dos cónicas que tienen dos puntos comunes y están en distintos planos. En efecto, los dos puntos comunes, más otros tres elegidos en cada una, son ocho puntos. Sin embargo, el método más rápido para determinar cuádricas, cuando se dan cónicas, es el de la combinación lineal, que llamaremos "método de las λ".

EJEMPLO 1.° — Consideremos la cuádrica:

$$f = x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0 \qquad [1]$$

y sus dos secciones por los planos $y = 0$, $z = 0$.

Para determinar una cuádrica que pase por estas dos cónicas y además por el punto (1, 1, 2) consideremos la ecuación:

$$f - \lambda yz = 0 \qquad [2]$$

que representa un haz de cuádricas, cada una de las cuales pasa por los puntos comunes a aquella cuádrica y cada uno de los dos planos. Para determinar la que pasa por el punto (1, 1, 2) basta sustituir estas coordenadas [2], y de la ecuación en λ que así resulta, se despeja el valor numérico de este parámetro, que es:

$$\lambda = \frac{f(1,1,2)}{1.2} = \frac{8}{2} = 4$$

Luego, la ecuación de la cuádrica que cumple la condición impuesta es:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz - x + 2y = 0$$

EJEMPLO 2.° — Cuádrica que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y por las secciones determinadas en la misma [1] por los planos $2y + z = 0$, $x - 2y = 0$.

El valor de λ es ahora:

$$\lambda = \frac{f(1,-1,1)}{-1.3} = -\frac{1}{3}$$

y la ecuación que resulta es:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + xz - 3x + 6y = 0$$

PUNTOS SINGULARES. — Un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) se llama *singular*, cuando anula a las cuatro derivadas.

Para que exista punto singular deben ser compatibles las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_{x_0} &= Ax + Hy + Gz + Lt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{y_0} &= Hx + By + Fz + Mt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{z_0} &= Gx + Fy + Cz + Nt = 0 \\ \tfrac{1}{2} f'_{t_0} &= Lx + My + Nz + Dt = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

es decir, deben admitir solución distinta de la $(0, 0, 0, 0)$ y la condición nece-

saria y suficiente para ello es que se anule el determinante de los coeficientes, que llamaremos *discriminante* de la cuádrica.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G & L \\ H & B & F & M \\ G & F & C & N \\ L & M & N & D \end{vmatrix} \qquad [4]$$

Si el discriminante es nulo, las ecuaciones son compatibles y existe un punto singular, el cual está en la superficie en virtud de la identidad de Euler, que se comprueba inmediatamente con el cuadro [3]

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2f \qquad [5]$$

Supongamos que el punto singular sea el origen; entonces debe ser $L = M = N = D = 0$ y la ecuación se reduce a:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz = 0$$

que representa un cono con vértice en el origen.

Análogamente, cualquiera que sea el punto singular, la cuádrica es un cono y éste es su vértice. Adoptado como origen de coordenadas, la ecuación se hace homogénea en x, y, z (180) y su estudio se reduce al de su cónica sección.

PROPIEDADES PROYECTIVAS. — Aunque su estudio se hace mejor usando coordenadas proyectivas, puede estudiarse en cartesianas la polaridad, de la cual sólo podemos dar ligera idea. Se llama *plano polar* de un punto (x_0, y_0, z_0, t_0) al plano en que están situados sus conjugados armónicos respecto de los pares de intersección con la cuádrica de las secantes que pasan por él. Que tal plano existe se demuestra fácilmente resultando como ecuación del mismo en coordenadas homogéneas.

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0 \quad \text{o bien} \quad x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z + t_0f'_t = 0$$

y para pasar a coordenadas absolutas, basta haber $t = 1$.

En particular, si el punto es impropio, su plano polar es el plano llamado *diametral*, que contiene los puntos medios de todas las cuerdas paralelas a aquella dirección.

Se demuestra fácilmente mediante esta ecuación, que *los planos polares de los puntos de una recta pasan por otra recta*, la cual se llama *recta polar* de aquella respecto de la cuádrica. Basta, en efecto, utilizar la expresión (167) de las coordenadas de los puntos de una recta, la cual adopta esta forma más simétrica en coordenadas homogéneas:

$$x = x_0 - \lambda x_1 \quad , \quad y = y_0 - \lambda y_1 \qquad z = z_0 - \lambda z_1 \quad , \quad t = t_0 - \lambda t_1$$

EJERCICIOS

1. — Clasificar diversas cuádricas. Si tiene algún centro, se adopta como origen, estudiando las secciones por los planos coordenados.

2. — Clasificar cuádricas por el método de formación de cuadrados, como en este ejemplo:

$$x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 2x - 4y + 3 = 0$$

sacando x factor común y completando el cuadrado, se transforma así:

$$x^2 - 2x(2y - 1) + 3y^2 - 2yz - 4y + 3 = 0$$

$$(x - 2y + 1)^2 - y^2 - 2yz + 2 = 0$$

y formando cuadrado con los términos en y, z, dan: $-(y + z)^2 + z^2 + 2$.

La cuádrica es, un hiperboloide de dos hojas, pues su ecuación reducida es $X^2 - Y^2 + Z^2 + 2 = 0$, referida al triedro no ortogonal:

$$x - 2y + 1 = 0 \quad , \quad y + z = 0 \quad , \quad z = 0$$

GENERATRICES RECTILÍNEAS Y SECCIONES PLANAS

187. — Generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja.

La ecuación del hiperboloide de una hoja puede escribirse así:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad [1]$$

O bien:

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right)\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right)$$

Escrita en esa forma aparece como producto de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \lambda\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} + \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

cualquiera que sea el parámetro λ. Al variar λ cada una de estas ecuaciones representa un haz de planos y sus intersecciones son rectas situadas en la superficie, puesto que la ecuación [1] se satisface para las soluciones comunes a éstas, ya que es el producto de ambas.

Resulta, pues, un sistema de infinitas rectas situadas en la cuádrica y el conjunto de todas se llama *haz alabeado* de segundo orden.

Análogamente, como [1] es el producto de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \mu\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + 1\right) &= \frac{z}{c} - \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

resulta otro haz alabeado sobre la superficie.

Para $\lambda = 0$ resulta la generatriz $x = a, \quad bz + cy = 0.$

" $\mu = 0$ " " " $x = a, \quad bz - cy = 0.$

y el plano tangente $x = a$ da como sección este par de rectas.

Fijado un punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, las ecuaciones [2] determinan un valor de λ:

$$\lambda = \frac{\frac{x_0}{a} - 1}{\frac{z_0}{c} - \frac{y_0}{b}} = \frac{\frac{z_0}{c} + \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} + 1}$$

el cual determina una generatriz del primer sistema que pasa por él, y análogamente resulta una generatriz del segundo sistema. En consecuencia:

El hiperboloide de una hoja contiene dos haces de generatrices rectilíneas y por cada punto de la superficie pasa una de cada sistema, las cuales determinan el plano tangente en dicho punto.

188. — Generatrices rectilíneas del paraboloide hiperbólico. Análogamente, la ecuación del paraboloide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

puede escribirse así:

$$z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \qquad [4]$$

y es por tanto el producto de estas dos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \lambda z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

que definen un haz alabeado de rectas situadas en la superficie y asímismo es el producto de estas otras dos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \mu \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{z}{\mu} \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

que definen otro haz alabeado, por la misma razón ya explicada en el caso del hiperboloide.

Lo mismo que en el caso anterior, por cada punto del paraboloide pasa una generatriz de cada sistema; pero hay una diferencia notable y es que todas las rectas [5] son paralelas al plano:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \qquad [7]$$

y todas las rectas [6] son paralelas al plano:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad [8]$$

Estos dos planos se llaman *directores* del paraboloide.

Para $\mu \to \infty$ resulta en el haz [6] la recta impropia del plano [7]; y para $\lambda \to \infty$, la del plano [8]. Es, pues, natural, decir que esas rectas impropias son generatrices del paraboloide y que forman su intersección con el plano impropio.

189. — Cuádricas alabeadas.

Se llaman *alabeados* el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico por contener generatrices rectilíneas y no ser desarrollables sobre un plano, como se verá más adelante.

El elipsoide carece de generatrices rectilíneas por ser finito, y también carece de ellas el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide elíptico, por existir planos que no contienen puntos de la superficie ni propios ni impropios (por ejemplo todos los planos $z = k$ siendo $k < 0$ para el paraboloide, o bien $-c < k < c$ para el hiperboloide.

Las aristas de los haces de planos [2] son las rectas de ecuaciones:

$$x/a = 1 \quad , \quad z/c = y/b \quad ; \quad x/a = -1 \quad , \quad z/c = y/b$$

y como estas cuatro ecuaciones son claramente incompatibles, dichas aristas se cruzan. Cada par de planos homólogos se cortan en una recta, secante de ambas aristas; luego cada dos secantes MN, $M'N'$ se cruzan. Análogamente para los haces [3], [5], [6].

Por consiguiente: *Dos generatrices de un mismo haz no se cortan.*

En cambio, como las ecuaciones [2] y [3] no son independientes, pues el producto de las dos primeras es idéntico al producto de las dos segundas (o sea la ecuación [1]), una de ellas es consecuencia de las otras dos y por tanto las coordenadas del punto que satisfaga a tres de ellas satisface también a la cuarta. Es decir: ***Dos generatrices de distinto haz tienen un punto común.***

Dadas tres generatrices de un sistema, las del otro quedan determinadas por la condición de cortar a estas tres.

Sea un punto de la generatriz c, los planos Pa y Pb determinan una recta que pasa por P y cortan a las a y b en puntos propios o impropios.

Por cada punto de cada una de las rectas a, b, c pasa, pues, una sola generatriz del otro sistema.

Recíprocamente, dadas tres rectas cualesquiera que se cruzan dos a dos se obtiene fácilmente la ecuación de la cuádrica que se determina como indica el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. — Sean las generatrices dadas:

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x + y = 2$$
$$y = 0 \quad y = z \quad z = 0$$

Para que la recta

$$\begin{aligned} y &= bz + q \\ x &= az + p \end{aligned} \qquad [1]$$

corte a la primera, es preciso que las ecuaciones $az + p = 0$, $bz + p = 0$ tengan una solución común, o sea:

$$aq = bp \qquad [2]$$

Para que corte a la segunda es preciso que sean compatibles las ecuaciones:

$$az + p - 1 = 0 \quad ; \quad (b - 1)z + q = 0$$

O sea

$$aq = (b - 1)(p - 1)$$

Y teniendo en cuenta la [2]:

$$b + p = 1 \qquad [3]$$

Para que corte a la tercera es preciso que sean compatibles las ecuaciones:

$$(a + b)z + p + q = 2 \quad z = 0 \quad \therefore \quad p + q = 2 \qquad [4]$$

Eliminando a, b, p, q entre las cinco ecuaciones [1], [2], [3] resulta una ecuación en x, y, z que se satisface para las coordenadas de todos los puntos de todas las rectas [1] secantes de las tres dadas, y es por tanto la ecuación del lugar geométrico formado por todas esas secantes.

Dicha eliminación se hace cómodamente despejando a, b, p, q de las cuatro ecuaciones lineales y sustituyendo en la [2], que es de segundo grado. Así resulta la ecuación de la cuádrica:

$$y^2 + xy + xz - yz - 2y = 0$$

Otro método más rápido pero que no pone de manifiesto su estructura reglada es el de coeficientes indeterminados, partiendo de la ecuación general (190) e imponiéndole las condiciones de contener a las tres rectas directrices dadas.

190. — Secciones planas de las cuádricas.

La sección plana de una cuádrica es una cónica propia o degenerada. En efecto, adoptando ese plano como coordenado, es decir $z = 0$, la ecuación general de la cuádrica:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Fyz + 2Gxz +$$
$$+ 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0 \qquad [1]$$

da, como ecuación de la sección por el plano xy la siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Lx + 2My + D = 0 \qquad [2]$$

que representa una cónica.

El plano se llama *secante* si corta a la cuádrica en una cónica propia.

Se llama plano *tangente* si sólo tiene un punto común con la cuádrica o bien un par de rectas. Se llama *exterior* si no tiene ningún punto común con la cuádrica.

Las secciones paralelas de una cuádrica por planos secantes paralelos son curvas semejantes.

En efecto, cortemos la misma cuádrica [1] por otro plano $z = k$ paralelo al plano $z = 0$, resultando una cónica definida por éste y la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + 2Hxy + 2Fyk + 2Gxk + 2Lx + 2My + 2Nk - D = 0$$

que tiene los mismos *términos de segundo grado en xy*, y por consiguiente es semejante a aquélla.

NOTA. — En particular, si el plano paralelo es tangente, la sección se reduce a un sólo punto o a dos *rectas y la semejanza deja de subsistir.*

191. — Determinación analítica de las secciones circulares.

Un método que se presenta de modo natural para determinar las secciones planas que son circunferencias es el siguiente:

Si de la ecuación de la cuádrica $f(x, y, z) = 0$, restamos la ecuación de una superficie esférica elegida de tal manera que la diferencia represente dos planos, la línea de intersección de la cuadrica

con la superficie es la misma que la intersección de ésta con los dos planos, es decir, dos circunferencias.

Sea el elipsoide escaleno:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c$$

y la superficie esférica de radio b:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

La diferencia de ambas ecuaciones:

$$x^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} = z^2 \left\{ \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right\}$$

y como ambos coeficientes son positivos por ser $1/b^2 > 1/a^2$ y $1/c^2 > 1/b^2$, esta ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer grado que representan dos planos: $z = \pm kx$. Por tanto:

Hay dos secciones circulares cuyos planos pasan por el eje intermedio b.

Si elegimos la superficie esférica de radio a o c resulta un coeficiente positivo y otro negativo, es decir, dos planos imaginarios.

Ejemplo. — Sea el elipsoide:

$$4x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 2$$

Como el coeficiente intermedio es el 4, elegiremos la esfera:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 2$$

Y restando resulta:

$$y^2 - 2z^2 = 0$$
$$y = \pm \sqrt{2}\, z$$

Las dos secciones circulares que pasan por el eje x están perfectamente determinadas por estos dos planos y la superficie esférica.

Método gráfico. — Si trazamos secciones por el eje mayor a resultan elipses con este semieje a y el otro es el radio vector que el plano determina en la elipse de semiejes b, c, el cual, por estar comprendido entre b y c, es menor que b y en consecuencia menor que a.

Resulta, pues, una elipse de semieje mayor a.

Análogamente, si trazamos un plano por c determina con la elipse de semiejes a, b un radio vector mayor que b y por tanto mayor que c. Resulta, pues, una elipse de semieje mínimo c.

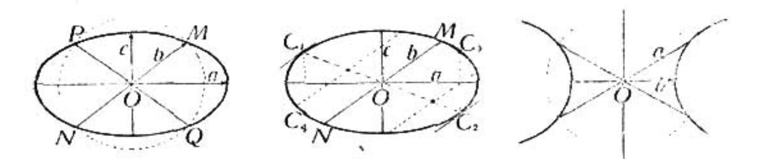
En cambio, si la sección se traza por el eje intermedio b, como el radio vector de la elipse de semiejes a, c, está comprendido entre a y c y por continuidad toma todos los valores intermedios, existe un radio igual a b.

Trazando con centro O la circunferencia de radio b, ésta corta a la elipse en cuatro puntos simétricos dos a dos, que determinan los planos buscados.

Obtenidos los diámetros MN, PQ, sus conjugados se construyen tomando el punto medio de una cuerda paralela a cada uno; y cortan a la elipse en los puntos cíclicos.

EJERCICIOS. — Determínense analíticamente los diámetros conjugados de los dos diámetros obtenidos en el ejemplo anterior.

La tangente a la elipse $3y^3 + 6z^2 = 2$ en el punto (y, z) tiene coeficientes $6y$, $12z$. Establecida proporcionalidad con los coeficientes $1, \pm \sqrt{z}$ resultan los diámetros conjugados, y éstos determinan en la elipse los puntos cíclicos.



192. — Doble sistema de secciones circulares. Puntos cíclicos.

Obtenidas las dos secciones circulares por los planos π y π' que pasan por el eje intermedio del elipsoide, determinadas analítica o gráficamente, todas las secciones producidas por planos paralelos son también circunferencias (190) puesto que las secciones paralelas son semejantes. Resulta, pues, un doble sistema de secciones circulares, *dos a dos simétricas, respecto de los planos principales que pasan* por el eje intermedio; los centros de las secciones paralelas entre sí forman el diámetro conjugado con el diámetro MN de la elipse.

PUNTOS CÍCLICOS. — Los dos extremos C_1 C_2 de cada diámetro conjugado con un sistema de secciones circulares, o sea los puntos en que corta a la cuádrica se llaman *umbílicos* o *cíclicos*.

Los puntos cíclicos de la cuádrica están, pues, definidos por la condición de que los planos secantes paralelos al plano tangente en cada uno de ellos, dan secciones circulares.

En el elipsoide, hay por consiguiente cuatro puntos cíclicos si*tuados en la sección principal de semiejes máximo y mínimo y si*métricos dos a dos respecto de éstos.

193. — Secciones circulares del hiperboloide de una hoja.

El método es igual al seguido en el elipsoide. Si de la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b \;;\; c \text{ es cualquiera,}$$

restamos la ecuación de la superficie esférica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

resulta:

$$y^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} - z^2 \left\{ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right\} = 0$$

que representa un par de planos: $z = \pm k$ y que pasan por el eje x y que son simétricos respecto de los dos planos coordenados xy, xz.

NOTA. — En cambio, por el eje menor b no pasa **ningún** plano que **dé** secciones circulares, pues todas las secciones resultan con el semieje mínimo b. Como el plano tangente corta en dos rectas, y sus paralelos cortan en hipérbolas que tienen los mismos puntos impropios que estas rectas: resulta ***el hiperboloide alabeado carece de puntos cíclicos.***

Ejemplo: $3x^2 + y^2 - 2z^2 = 4$

Como el mayor de los semiejes transversos es el b, elegiremos la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

y restando resulta la ecuación:

$$2x^2 = 3z^2 \quad \therefore \quad \pm \sqrt{2/3}x = z$$

que representa dos planos; éstos, con la superficie esférica, determinan dos secciones circulares.

EJERCICIOS

1. — Determinar las secciones circulares y los puntos cíclicos del hiperboloide de dos hojas, demostrando que existen dos sistemas de secciones circulares, paralelas al mayor de los dos ejes no transversos y cuatro puntos cíclicos.

2. — Determinar las secciones circulares del paraboloide elíptico, demostrando que hay dos sistemas paralelos a la tangente a la parábola principal de mayor parámetro y dos puntos cíclicos en la parábola principal de menor parámetro.

3. — ¿Cuáles son los puntos cíclicos y las secciones circulares en la cuádricas de revolución?

4. — Enumerar las cuádricas que carecen de secciones circulares y las que carecen de puntos cíclicos, pero tienen secciones circulares.

5. — Condición necesaria y suficiente para que las secciones circulares centrales del elipsoide contengan los puntos cíclicos, es que el coeficiente intermedio sea medio armónico de los otros dos.

Obsérvese que esto se verifica en el ejemplo del texto.

CAPITULO IX

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LECCIÓN 48

DERIVADAS PARCIALES Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

194. — Continuidad de las funciones de dos variables.

La definición de continuidad de una función $z = f(x,y)$ de dos variables, es análoga a la de las funciones de una sola variable, y vale para cualquier número de variables.

Se dice que $f(x, y)$ es *continua* en el punto (a, b) cuando se verifica la condición:

$$\text{lím. } f(x, y) = f(a, b), \text{ para } (x, y) \to (a, b)$$

es decir: cualquiera que sea el número positivo ε, se verifica

$$| f(x, y) - f(a, b) | < \varepsilon$$

para todos los puntos (x, y), que cumplen la condición:

$$| x - a | < \delta, \; | y - b | < \delta \quad , \quad \text{o bien } (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$$

siendo δ un número conveniente.

Estos puntos (x, y) forman un cuadrado de semilado δ o un círculo de radio δ; uno y otro se llaman *entornos* del punto (a, b).

Una función se dice continua en toda una región del plano, cuando es continua en cada uno de los puntos de dicha región. Si en el punto (a, b) la función es positiva, como $f(x, y)$ llega a diferir de $f(a, b)$ menos de su valor, también es $f(x, y) > 0$ en un cierto entorno del punto (a, b). Es decir: *Si una función es continua en un punto, y no se anula en él, tiene signo constante en un entorno de ese punto.*

La representación gráfica de una función: $z = f(x, y)$, se hace llevando el valor de z correspondiente a cada par (x, y) como tercera coordenada perpendicular al plano $x\,y$, y se tiene un conjunto

de puntos cuyas alturas difieren tan poco como se quiera (como suele decirse imprecisamente, varían por grados insensibles), y esta figura se llama *superficie*. Ejemplos de estas representaciones gráficas se conocen desde la Geometría Analítica.

Notación general: Se dice que un punto variable $P \to Q$ si las coordenadas de P tienden a las de Q; o sea: la *distancia* $PQ \to 0$. La continuidad en el punto Q se expresará así: $f(P) \to f(Q)$ para $P \to Q$.

195. — Derivadas parciales primeras.

Si consideramos los valores de z para los distintos de x, se obtiene, considerando a y constante, una curva sección situada en un plano paralelo al $z\,x$. La pendiente de esa curva se obtiene derivando $z = f(x, y)$, como si la única variable fuese la x, mientras que la y se conserva constante. Esta *derivada parcial* se representa así: $z'_x = f'_x(x, y)$, o más escuetamente: $z_x = f_x(x, y)$.

Análogamente, si se conserva x constante, haciendo variar y, la derivada se representa así: $z'_y = f'_y(x, y)$, y su valor es la pendiente de las curvas secciones de la superficie, por los planos $x =$ constante.

Se suelen usar también las notaciones: $D_x f(x, y)$, $D_y f(x, y)$; y también estas otras:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

debiendo tenerse en cuenta que no son cocientes de diferenciales, pues los incrementos de z son distintos según que se incremente x o y. Esta notación puede inducir a error, y es menos conveniente.

196. — Teorema del incremento finito.

Vamos a demostrar el teorema análogo al del valor medio de las funciones de una variable, comenzando por calcular el incremento de la función cuando incrementamos las dos variables.

Si tenemos el valor de la función en un punto $x = a$, $y = b$, e incrementamos la x en h, la función se habrá incrementado en $hf'_x(\xi, b)$; y si después se incrementa b en k, sufre un nuevo incremento $kf'_y(a + h, \eta)$; luego resulta el teorema del valor medio:

$$\Delta z = hf'_x(\xi, b) + kf'_y(a + h, \eta)$$

NOTA. — He aquí todo el cálculo, más ampliamente desarrollado. Sea:

$$\Delta z = f(a + h, b + k) - f(a, b) \qquad [1]$$

donde h y k pueden ser números cualesquiera. Sumando y restando el número $f(a + h, b)$ a la expresión [1] se tiene:

$$\Delta z = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b)]$$

Los dos primeros términos forman el incremento de la función $f(a+h, b)$ en que b sufre un incremento k; y los dos últimos términos son el incremento de la $f(a, b)$ en que a está incrementada en h.

Aplicando el teorema del valor medio a los dos primeros términos, resulta:

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = k.f'_y(a+h, b+\theta k) \qquad 0 < \theta < 1$$

Análogamente, aplicando el teorema del valor medio a los dos últimos:

$$f(a+h, b) - f(a, b) = hf'_x(a+\vartheta' h, b) \qquad 0 < \vartheta' < 1$$

Luego sumando resulta el teorema del valor medio.

Obsérvese que de la simple existencia de derivadas parciales en un punto ha resultado el teorema del valor medio; y que éste implica la *continuidad* de $f(x, y)$ si tales derivadas están *acotadas* en un entorno del punto, pues Δz puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando suficientemente pequeños h y k.

Si las variables son x, y, z, e incrementamos la x en h, después la y en k, después la z en l, el incremento que sufre la función $u = f(x, y, z)$ al incrementar cada variable, es igual al incremento de ésta por la derivada parcial respectiva en un punto del intervalo de incrementación, luego el incremento total es:

$$\Delta u = f(a+h,\ b+k,\ c+l) - f(a, b, c) =$$

$$h.f'_x(\xi, b, c) + kf'_y(a+h, \eta, c) + lf'_z(a+h,\ b+k,\ \zeta)$$

Análogamente se procede para cualquier número de variables.

COROLARIO. *Si las derivadas son nulas en un entorno del punto Q, es $f(P)$ constante en tal entorno.* Pues siendo $\Delta u = 0$, resulta: $f(P) = f(Q)$ para todo P del entorno.

197. — Errores en las funciones de varias variables.

El teorema del valor medio tiene aplicaciones análogas a las ya vistas en el caso de una variable.

Calculada una magnitud en función de otras, los errores en las medidas de éstas producen un error de aquélla, el cual es igual a la suma de estos errores multiplicados por las respectivas derivadas. En la medición de los datos habrá, pues, que extremar la exactitud en aquellas variables cuya derivada respectiva es grande; y puede descuidarse la de aquellas que corresponden a derivada pequeña.

El desconocimiento de los puntos intermedios que figuran en el teorema no es obstáculo, puesto que se trata, no de obtener el valor exacto del error, sino una cota del mismo, conocidas las cotas de los errores de los datos.

Error de uvw. — Como la derivada respecto de cada variable es el producto de las otras, resulta:

$$\Delta(uvw) = vw . \Delta u + uw . \Delta v + uv . \Delta u$$

y el error relativo se deduce dividiendo por uvw, y resulta *aproximadamente* la suma de los errores de los factores.

Para acotar rigurosamente el error de uvw debe tenerse en cuenta que vw, uw, uv deben tomarse en puntos intermedios de los intervalos respectivos.

Análogamente se deducen las otras reglas de cálculo de errores en las operaciones aritméticas.

Ejemplo. — Dado la base a y los ángulos contiguos B y C, el lado b se calcula por la fórmula:

$$b = \frac{a . \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{a . \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} (B + C)}$$

Sus derivadas respecto de a, B y C son:

$$\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} (B + C)} \quad , \quad \frac{a . \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}^2 (B + C)} \quad , \quad - \frac{a . \operatorname{sen} B . \cos (B + C)}{\operatorname{sen}^2 (B + C)}$$

Si los datos son:

$$a \sim 10 \text{ m.} \qquad B \sim 29° \qquad C \sim 61°$$

los valores aproximados de las derivadas son:

$$0,5 \quad ; \quad 8 \quad ; \quad 0$$

esto indica que debe extremarse la exactitud en la medida de B, aunque se descuide la de C, que apenas influye. Supongamos que los errores absolutos sean:

$$\Delta a < 0,05 ; \quad \Delta B < 10' < 0,003 ; \quad \Delta C < 10' < 0,003.$$

Aunque no se conocen los valores intermedios B, C, puede asegurarse que están comprendidos entre

$$29° \pm 10' \qquad 61° \pm 10' \quad ;$$

luego: $B + C > 89°$, por tanto, las derivadas son seguramente menores que

$$0,5 \quad ; \quad 10 \quad ; \quad 0,05$$

y el error total menor que

$$0,025 + 0,03 + 0,0002 \sim 0,05$$

donde se observa que el error de C no ha influido, pudiendo haberse apreciado ese ángulo casi a simple vista.

EJERCICIOS

1. — Deducir las fórmulas de error en el cálculo de un triángulo determinado por dos lados y el ángulo que forman.

2. — ¿Cuáles son los ángulos más favorables para la determinación de un triángulo por un lado y los ángulos adyacentes?

3. — Deducir las reglas que dan el error relativo de un cociente y de una raíz.

CALCULO DE DERIVADAS Y DIFERENCIALES

198. — Derivada de una función compuesta.

Una función $f(u, v)$ de dos variables u, v dependientes de una misma variable t, se llama *compuesta* de u y v. Tal es por ejemplo, la función u^v cuando u y v son funciones de t. Más general, $f(u, v, w \ldots.)$ siendo $u, v, w \ldots.$ funciones de t, es una función compuesta de estas variables dependientes de t.

Para calcular la derivada de una función compuesta, $F(t) = f(u, v)$, pasemos del valor t al $t + \Delta t$; si son u, v los valores correspondientes a t, y $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ los correspondientes a $t + \Delta t$, tendremos por el teorema del valor medio:

$$\Delta F(t) = f'_u(u_1, v_1) \,.\, \Delta u + f'_v(u_2, v_2) \,.\, \Delta v$$

o bien, llamando $\delta_1 = f'_u(u_1, v_1) - f'_u(u, v)$, diferencia que es infinitésima, por la supuesta continuidad de f'_u (y análogamente para δ_2) es:

[1] $$\Delta F(t) = f'_u(u, v)\, \Delta u + f'_v(u, v) \Delta v + (\delta_1 \Delta u + \delta_2 \Delta v)$$

y formando el cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta F(t)}{\Delta t} = f'_u(u, v)\, \frac{\Delta u}{\Delta t} + f'_v(u, v) \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} + \delta \;,$$

siendo δ infinitésimo, pues los cocientes de incrementos de u y v por Δt están acotados, por tener límites finitos: u', v'. Para $\Delta t \rightarrow 0$ resulta:

$$F'(t) = f'_u(u, v) \;.\; u' + f'_v(u, v) \;.\; v'.$$

En general, si la función se compone de varias funciones $u, v, w \ldots.$ (por ejemplo tres funciones), resulta, como antes:

$$F'(t) = f'_u(u, v, w) \,.\, u' + f'_v(u, v, w) \,.\, v' + f'_w(u, v, w) \,.\, w'$$

que también podemos escribir así:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dt}$$

La derivada de una función compuesta respecto de la variable t independiente, es la suma de los productos obtenidos multiplicando cada derivada parcial respecto de una de las variables dependientes por la derivada de ésta respecto de t.

Si en la fórmula anterior multiplicamos por dt resulta:

$$dF(t) = f'_u . du + f'_v . dv + f'_w . dw$$

fórmula que vale cualquiera que sea la variable independiente t y de la cual se pasa a la derivada dividiendo por la diferencial dt.

Supongamos ahora que u, v y w sean funciones de x y de y al mismo tiempo. Entonces, tendremos: $F(x, y) = f(u, v, w)$.

Esta función tendrá dos derivadas parciales, ya sea que se considere a x o a y como constante. Es decir, aplicando la regla anterior:

$$F_x' = f'_u . u'_x + f'_v . v'_x + f'_w . w'_x$$

$$F'_y = f'_u . u'_y + f'_v . v'_y + f'_w . w'_y .$$

Si en vez de ser dos las variables independientes fuesen más, las derivadas parciales serían tantas como variables independientes.

EJEMPLO. — Sea $y = u^v$, siendo u, v funciones de x; la derivada de y es:

$$y' = v . u^{v-1} . u' + u^v . lu . v'$$

Si es $y = x^x$ resulta:

$$y' = x . x^{x-1} + x^x . lx = x^x (1 + l . x)$$

que ya se obtuvo mediante logaritmos.

TEOREMA DE EULER. — Una función se llama *homogénea* de grado m si al multiplicar sus variables por t queda multiplicada por t^m; es decir, si tiene por ejemplo dos variables x, y, se verifica la identidad:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

Derivando respecto de t resulta:

$$xf'_x(tx, ty) + yf'_y(tx, ty) = mt^{m-1} f(x, y)$$

y para $t = 1$, obtenemos la *identidad de Euler*, que caracteriza las funciones homogeneas de cualquier número de variables

$$xf'_x + yf'_y + . + wf'_w = mf(x, y, \ldots, w)$$

la cual habíamos obtenido para las funciones algebraicas de segundo grado.

La demostración usual del teorema recíproco que omitimos, es inadmisible.

199. — Concepto general de diferencial.

Dada una función $z = f(x, y)$ con derivadas continuas, si las variables son funciones de t, acabamos de ver que la diferencial de z viene dada por la fórmula:

[2] $$dz = f'_x . dx + f'_y . dy$$

donde $dx = x' . dt$, $dy = y' . dt$. Supongamos ahora que x e y sean variables independientes y adoptemos la misma definición [2], o sea:

Diferencial de una función con todas sus derivadas parciales continuas es la suma de los productos de estas derivadas parciales por los incrementos arbitrarios de las correspondientes variables.

La expresión [2] es, pues, una *definición* si x e y son variables independientes; es un *teorema* si son funciones de t.

Supongamos el caso general de una función de varias variables, las cuales son funciones de otras varias. Sea, por ejemplo, $f(u, v, w)$ siendo u, v, w funciones de x, y; luego $f(u, v, w) = F(x, y)$; su diferencial, según la definición que acabamos de dar, es:

$$dF = F'_x . dx + F'_y . dy$$

puesto que estas derivadas F'_x, F'_y, son continuas si lo son las derivadas respecto de u, v, w, y las de éstas respecto de x, y; ya que entonces vienen dadas F'_x, F'_y por las expresiones obtenidas en (198), las cuales, sustituidas en dF, dan:

$$dF = f'_u(u'_x . dx + u'_y . dy) + f'_v(v'_x . dx + v'_y . dy) + f'_w(w'_x . dx + w'_y . dy)$$

y como los paréntesis son du, dv, dw, resulta:

[3] $$dF = f'_u . du + f'_v . dv + f'_w . dw$$

Conclusión importante: Mientras la derivación exige saber la dependencia o independencia de las variables y en cada caso resulta regla distinta, para la diferenciación hay una regla única:

La diferencial de una función de varias variables (dependientes o independientes) es la suma de los productos de sus derivadas respecto de ellas, por las respectivas diferenciales de éstas.

NOTA. — Si se repasa la demostración (198) se verá que lo esencial es que el paréntesis de [1] sea infinitésimo de orden superior a los incrementos; y esto induce a dar esta noción más general, debida a Thomae:

Sean independientes o no las variables, si el incremento admite la expresión:

$$f(x + h,\ y + k) - f(x, y) = A . h + B . k + \delta . r$$

siendo A, B independientes de h, k, y $\delta \to 0$ cuando la distancia $r = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$, es f derivable y sus derivadas parciales son A, B. La parte principal $f'_x . h + f'_y . k$ se designa por df. Las funciones que cumplen tal condición se llaman diferenciables.

Todas las reglas demostradas con la hipótesis demasiado exigente de la continuidad de las derivadas, valen para las funciones diferenciables en general. (V. *Elementos de la T. de funciones*).

200. — Significado geométrico de la diferencial.

De igual modo que para las curvas el tomar la diferencial por el incremento equivale a sustituir la curva por su tangente, para las superficies equivale a tomar un plano, que se llama tangente.

Consideremos la superficie $z = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ tiene derivadas parciales *continuas* en el punto $z_0 = f(x_0, y_0)$; su

incremento, para todo punto (x, y), o sea la ecuación de la superficie, es:

$$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_1, y_1) + (y - y_0)f'_y(x_2, y_2)$$

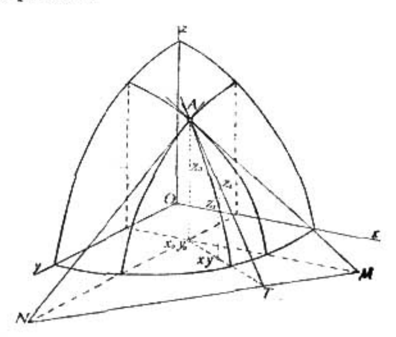
donde (x_1, y_1) (x_2, y_2) son puntos intermedios; en cambio, si ponemos la diferencial, la ecuación:

[4] $$z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$$

que tiene coeficientes constantes, representa un plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). La diferencia de ordenadas entre el plano y la superficie es

$$(x - x_0)\delta + (y - y_0)\delta' = r(\delta . \cos\ \alpha + \delta' . \text{sen}\ \alpha)$$

siendo δ δ' infinitésimos, por ser los incrementos de f'_x f'_y, que por hipótesis, son continuas. Siendo, pues, infinitésima de orden superior respecto de la distancia r desde (x_0, y_0) a (x, y), parece natural llamar *tangente* a ese plano, por analogía con las curvas y porque cortado por planos verticales da las tangentes a las curvas secciones de la superficie.



Para $y = y_0$ resulta una sección plana paralela al plano xz, y la sección del plano tangente es la recta tangente.

Análogamente, para $x = x_0$, resulta una sección plana de la superficie y su tangente en el mismo punto A.

Más general: para $\alpha =$ constante, resulta una sección plana y su tangente; la pendiente de ésta, o sea el límite de $\Delta z/\Delta r$ para $\Delta r \to 0$, se llama *pendiente* en la dirección α, o *derivada* en la dirección α; su valor se representa así:

[4] $$z'_r = f'_x(x_0, y_0) . \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) . \text{sen}\, \alpha$$

Para $\alpha = 0$ es $r = x$, y resulta z'_x ; para $\alpha = 90°$, resulta z'_y.

EJEMPLO 1. — *Paraboloide.* La ecuación del paraboloide es $z = px^2 \pm qy^2$; considerando el signo [+], el paraboloide es elíptico, con el signo [—] hiperbólico.

Las derivadas son: $z'_x = 2pz$, $z'_y = 2py$, luego la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico, en el punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$2pxx_0 + 2qyy_0 - 2px_0^2 - 2qy_0^2 + z_0 = z.$$

Los dos términos: $-2px_0^2 - 2qy_0^2$ suman: $-2z_0$ puesto que el punto (x_0, y_0, z_0) está en la superficie, luego $z + z_0 = 2pxx_0 \pm 2qyy_0$ es la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico o hiperbólico en un punto.

EJEMPLO 2. — ¿Cuál es la pendiente del paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3) en la dirección $x = y$?

$$z'_r = 4.\cos 45^\circ + 2.\operatorname{sen} 45^\circ = 3\sqrt{2}$$

EJEMPLO 3. — La ecuación del plano tangente en el origen es $z = 0$; plano que deja a la superficie en su lado superior si el paraboloide es elíptico, pues en todos los demás puntos de éste es $z > 0$; pero el plano $z = 0$ corta el paraboloide hiperbólico en dos rectas $px^2 = qy^2$.

NOTA. — Hemos demostrado que si las derivadas parciales de $f(x,y)$ son *continuas*, las tangentes a las curvas planas, secciones por los planos paralelos al eje z, están en un plano. Del cap. X resulta más en general: Si $F(x, y, z) = 0$ es una superficie, y son x, y, z funciones de t que representan una curva sobre la superficie y por tanto satisfacen a la ecuación, se verifica:

$$F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0$$

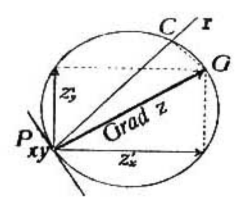
relación que expresa ,como veremos, que la tangente a esa curva está en el plano que pasa por el punto y tiene los coeficientes F'_x, F'_y, F'_z.

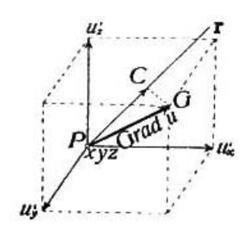
Con la definición de Thomae resulta: *Condición necesaria y suficiente para que una superficie tenga plano tangente, es que la función sea diferenciable.*

201. — Gradiente de una función.

Para construir una gráfica de las pendientes de las diversas curvas trazadas en la superficie $z = f(x, y)$ por un punto $A(a, b, c)$ llevemos en cada recta trazada por el punto (a, b) del plano xy un segmento igual a la derivada de z en esa dirección, en uno u otro sentido según sea su signo. Por tanto, en la dirección x, llevaremos z'_x (hacia uno u otro lado, según su signo); en la dirección y el segmento z_y'; en la dirección de argumento α llevaremos

$$PC = z'_r = z'_x.\cos\alpha + z'_y.\operatorname{sen}\alpha$$





Pero este binomio representa la proyección sobre dicho rayo de la quebrada PMG, o sea de su resultante PG; luego es menor que PG, excepto para la dirección PG, en que z'_r alcanza el valor máximo. Este vector PG de componentes (z'_x, z'_y) que representa la pendiente máxima, se llama *gradiente* de la función z en el punto A, o *pendiente máxima*, o simplemente *pendiente* de la función en A, y suele representarse con la letra *nabla*, que es una Δ invertida.

Resulta, además, que la gráfica lugar de los extremos C es la circunferencia de diámetro PG.

También se representa el gradiente de u por estas notaciones más cómodas:

$$\text{Grad. } u = Du = (u_x, u_y)$$

La función escalar u se llama *potencial* del campo de vectores gradientes. No todo campo de vectores admite un *potencial*, es decir, no siempre existe una función u cuyas derivadas parciales sean las componentes de aquellos vectores, como veremos en (274) obteniendo condiciones necesarias y suficientes.

Análogamente, para las funciones $u = f(x, y, z)$ la derivada en la dirección de cosenos α, β, γ, es

$$u'_r = u'_x \cdot \alpha + u'_y \cdot \beta + u'_z \cdot \gamma$$

pues en esa dirección es:

$$x = a + r\alpha \quad , \quad y = b + r\beta \quad , \quad z = c + r\gamma.$$

Si a partir del punto (a, b, c) se lleva en la direción (α, β, γ) un vector de longitud u'_r, éste resulta ser la proyección del vector (u_x', u'_y, u'_z) llamado *gradiente* de u en el punto (a, b, c) y que representa la pendiente máxima.

La gráfica de las pendientes, o sea el lugar de los extremos de los vectores que se proyectan sobre PG es, por tanto, la superficie esférica de diámetro PG.

202. — Líneas de nivel y superficies de nivel.

En vez de representar la función $z = f(x, y)$ por una superficie, es más cómodo dibujar en el plano xy las líneas de ecuación $f(x, y) = \text{constante}$, anotando en cada una el valor de esa constante. Estas líneas, que se llaman de *nivel*, son las proyecciones de las secciones de la superficie por los planos $z = C$, y dos cualesquiera no se cortan, pues en el punto común, $f(x, y)$ debería tomar C dos valores distintos.

Mediante esta representación, que se llama *plano acotado*, se calcula aproximadamente el valor de la función en cualquier punto, por interpolación.

Como en cada línea de nivel es $\Delta z = 0$, su pendiente en cada punto es nula, y recordando la gráfica del párrafo anterior, resulta:

El gradiente en un punto es normal a la curva de nivel que pasa por ese punto y dirigido en el sentido creciente de la función.

Análogamente: para representar una función $u = f(x, y, z)$ se construyen las *superficies de nivel* $u = C$; el gradiente en cada punto es normal a la superficie de nivel que pasa por él y dirigido en el sentido de las C crecientes.

EJERCICIOS

1. — Determinar los planos tangentes a los paraboloides.

2. — Calcular la máxima pendiente del paraboloide $z = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, 0)$.

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE FUNCIONES IMPLICITAS

203. — Definición y condición de existencia.

Una curva en el plano no siempre está dada por una función explícita: $y = f(x)$, sino que a veces la y es función de la x implícitamente, es decir, nos dan una ecuación: $f(x, y) = 0$, la cual es preciso resolver para encontrar los valores de y que corresponden a cada valor de x.

A veces es posible despejar y, es decir, transformar la función implícita en explícita. Por ej.:

$$y^3 + xy^2 + x - 1 = 0$$

es una ecuación de tercer grado en y que podría resolverse aplicando la fórmula de Cardano estudiada en Algebra; es decir, transformaríamos la ecuación dada $f(x, y) = 0$ en una función explícita irracional: $y = \varphi(x)$.

Pero si en lugar de tener una ecuación de tercer grado, tuviéramos una de quinto grado, no sería posible, en general ,esta transformación, y menos si la ecuación es trascendente.

Además, ni aún en los casos en que es posible despejar y, ofrece ventaja la transformación.

Sin embargo, no por eso renunciaremos a construir la curva solo que para cada punto de la curva será necesario resolver la ecuación numérica por los métodos de aproximación que se estudian en Álgebra.

EJEMPLOS. — Sea la ecuación: $y^5 + x\,y^2 + x - 1 = 0$. Para $x = 1$ se tiene: $y^5 + y^2 = 0 \;\therefore\; y^2(y^3 + 1) = 0$. Los valores de y serán $y = 0$, $y = 0$, $y = -1$, y los otros dos valores serán las dos raíces cúbicas imaginarias de -1. Es decir que para $x = 1$, tenemos tres valores reales de y, dos de ellos confundidos. Si damos a x valores muy próximos a 1, los valores de y son muy próximos a los hallados, y tendremos tres ramas de la curva, que nos representan la función dada. Ha quedado descompuesta la función no uniforme, en tres funciones uniformes.

Dada una ecuación $f(x, y) = 0$, no siempre habrá valores de y que correspondan a los de x; en este caso no hay función, como sucede en el ejemplo:

$$\operatorname{sen}\,(x + y) - x^2 = 5.$$

No habrá ningún par de valores de x e y que cumplan la condición anterior, puesto que un seno a lo sumo vale 1, que nunca es igual a $5 + x^2$.

Sea la ecuación: $x^2 + y^2 = 0$.

¿Se puede decir en este caso que y es función de x?; los únicos valores posibles son $x = 0$ e $y = 0$; por consiguiente no hay curva.

Estos ejemplos nos indican que en cada caso, antes de calcular las derivadas ,será necesario ver si hay curva, es decir, si y es función de x. Se demuestra (véase cualquier tratado moderno de Análisis, p. ej., nuestros *Elementos*) que si las derivadas parciales de la función: f'_x, f'_y, son continuas y se verifica que: $f'_y \neq 0$ para un cierto punto, hay por lo menos un arco de curva que pasa por ese punto, y entonces es posible calcular la derivada en él.

Ejemplos. — Para la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ las derivadas parciales son:

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y$$

para el punto $x = 0$, $y = 0$ es $f'_y = 0$, luego no debe extrañarnos que no haya curva.

Si tenemos: $x^2 + y^2 = 1$ para $x = 0$, es $y = \pm 1$; las derivadas parciales son:

$$f'_x = 2x; \quad f'_y = 2y,$$

entonces para el punto $(0, +1)$ o $(0, -1)$, es $f'_y = 2$, o bien $f'_y = -2$, luego por el criterio enunciado, podemos asegurar que por cada uno de esos puntos pasa un arco de curva, los cuales se expresan inmediatamente en forma explícita, como es bien sabido.

204. — Derivadas de funciones implícitas de una variable.

Sea una función derivable $y(x)$, definida por la ecuación $f(x, y) = 0$. En un punto (a, b) tendremos: $f(a, b) = 0$.

La función dada es una función de dos variables, de las cuales la x es la independiente, puesto que la y depende del valor de la x. La derivada, que se calcula por la regla de la función compuesta, es nula para todo valor de x por ser $f(x, y) = 0$; luego:

$$f'_x . 1 + f'_y . y' = 0$$

de donde se despeja:

[1] $$y' = - f'_x / f'_y$$

suponiendo que existe derivada f'_y continua, no nula en el punto considerado. Esta hipótesis basta para asegurar la existencia de la función y su derivada. (V. *Elementos de T. Funciones*).

Sustituyendo las coordenadas (x, y) de cada punto de la curva, se obtiene la pendiente de la tangente en él.

NOTA. — Claramente se ve que las expresiones f'_x y f'_y, o sea:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

no son cocientes; pues, si lo fueran, la expresión [1] se reduciría a $-\partial y/\partial x$, lo que es absurdo. Las fracciones figuradas no son más que símbolos para indicar f'_x o bien f'_y, como hemos explicado en otro lugar.

EJEMPLO. — Sea la ecuación de una elipse:

$$3x^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{6x}{2y} = -\frac{3x}{y}$$

205. — Función implícita de varias variables independientes.

Sea la ecuación: $F(x, y, z) = 0$; por ejemplo:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 0,$$

En este caso, z no es función de x e y porque los únicos valores que satisfacen a la ecuación dada son: $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, y no existe la superficie porque la suma de 3 cuadrados será siempre positiva, cualquiera que sea el valor que se dé a x y a y.

En ecuaciones más complicadas que la del ejemplo, será más difícil darse cuenta si z es función de x y de y. Se demuestra de modo análogo al caso de dos variables (v. *Elementos de T. F.*), que una vez obtenido un punto (x_0, y_0, z_0), la condición suficiente para la existencia de superficie en un cierto entorno de este punto, es que las tres derivadas existan y sean continuas y además que $f'_z \neq 0$ en dicho punto.

Si en lugar de la ecuación anterior tenemos:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2z^2 = 1$$

que representa un elipsoide de revolución, resulta para $x = 1$, e $y = 2$:

$$z = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{2}\,; \; f'_z = 4z = \pm 2\sqrt{2} \neq 0$$

luego por cada uno de esos puntos pasa un trozo de superficie: $z = f(x, y)$. Vamos a calcular las dos derivadas parciales de esta función. La derivada parcial con respecto a x resulta tomando $y =$ constante en la ecuación $F(x, y, z) = 0$; estamos en el caso de

funciones implícitas de una variable y suponiendo $F'_z \neq 0$, resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad . \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Por tanto: la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = 0$ resulta sustituyendo estas expresiones en la ecuación:

[2] $$z - z_0 = (x - x_0)z'_x + (y - y_0)z'_y$$

sale así la ecuación siguiente, que es válida aun en el caso $F'_z = 0$, si no son nulas las tres derivadas, pues basta elegir convenientemente las variables *independientes:*

[3] $$(x - x_0)F'_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0, z_0) + \\ + (z - z_0)F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

EJEMPLO. — El plano tangente al elipsoide anterior en el punto $(1\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}\sqrt{6})$ *tiene* la *ecuación*

$$(x - 1\tfrac{1}{4}) + \sqrt{6}\,(z - \tfrac{1}{4}\sqrt{6}) = 0$$

En el punto (2, 2, 0) se anula F'_z, pero tomando x, z *o* bien y, z como variables independientes, subsiste la ecuación [3] que en este caso es:

$$2(x - z) + 0 \,.\, (y - z) + 0 \,.\, z = 0$$

es decir: $x = z$, como se debía esperar.

206. — Planos tangentes a las cuádricas con centro.

Sea el hiperboloide de una hoja:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

Las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0, z_0) son:

$$\frac{2x_0}{a^2} \quad . \quad \frac{2y_0}{b^2} \quad . \quad \frac{2z_0}{c^2}$$

El plano tangente *tiene, pues, la ecuación:*

$$\frac{(x - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_0}{b^2} - \frac{(z - z_0)z_0}{c^2} = 0$$

y como el punto (x_0, y_0, z_0) satisface a la ecuación de la superfície, la ecuación del plano se reduce a ésta:

$$\frac{x \,.\, x_0}{a^2} + \frac{y \,.\, y_0}{b^2} - \frac{z \,.\, z_0}{c^2} = 1.$$

Si en lugar del hiperboloide de una hoja tenemos el de dos hojas, o bien un elipsoide, basta cambiar signos.

Si la cuádrica es un paraboloide $z = px^2 + qy^2$ resulta la ecuación del plano tangente:

$$z + z_0 = 2p \,.\, xx_0 + 2q \,.\, yy_0$$

207. — Funciones definidas por sistemas de ecuaciones.

Con frecuencia vienen definidas las funciones implícitas, no por una ecuación, sino por un sistema de ecuaciones. Así, por ejemplo, una curva del espacio de tres dimensiones viene definida como intersección de dos superficies:

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Sólo una de las variables es independiente, pues las otras dos quedan determinadas por el par de ecuaciones.

Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la curva, es decir, un punto común a las dos superficies. ¿Existe la curva? es decir, ¿hay un cierto entorno del valor x_0, tal que a cada valor de x corresponden valores de y, z?

Suponiendo que existen las derivadas parciales continuas de las funciones $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, se demuestra (V. *Elementos de T. F.*). que es condición *suficiente* para la existencia de un arco de curva que pase por el punto (x_0, y_0, z_0) que sea:

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Todo determinante de este tipo, formado con las n derivadas parciales de cada una de las n funciones respecto de n variables, se llama determinante *funcional* o *jacobiano* de las funciones respectó de las n variables, y se suele representar por la misma notación de las derivadas parciales. Así por ejemplo, el determinante anterior se representaría brevemente así:

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y, z)}$$

Para calcular las derivadas de las funciones y, z de la variable independiente x, definidas por el anterior sistema de ecuaciones, derivaremos ambas respecto de x y tenemos:

$$f'_x + f'_y \cdot y' + f'_z \cdot z' = 0$$
$$\varphi'_x + \varphi'_y \cdot y' + \varphi'_z \cdot z' = 0$$

de donde podemos despejar y'. z', ya que el determinante de sus coeficientes no es sino el jacobiano, el cual, por hipótesis, no es 0.

Tenemos, por consiguiente:

$$y' = \begin{vmatrix} -f'_x & f'_z \\ -\varphi'_x & \varphi'_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$$

$$z' = \begin{vmatrix} f'_y & -f'_x \\ \varphi'_y & -\varphi'_x \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix}$$

o sea, con la notación simbólica de los jacobianos:

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(z, x)} : \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y, z)}$$

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x . y)} : \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y, z)}$$

resultados que podemos escribir así:

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial(f, \varphi)}{\partial(y, z)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial(f, \varphi)}{\partial(z, x)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)}}$$

es decir, las diferenciales de las variables x, y, z, ligadas por el par de ecuaciones dadas, son proporcionales a los tres determinantes funcionales respecto de los tres pares de variables x, y, z en orden circular.

Este resultado lo hemos de aplicar muy pronto para la determinación de la tangente a la curva dada.

Ejemplo.—El paraboloide $z = 2x^2 - y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$ tienen común el origen de coordenadas y el jacobiano en él respecto de y, z es:

$$\begin{vmatrix} -2y & -1 \\ 2y-2 & 2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

luego existe intersección de las dos superficies.

EJERCICIOS

1. — Obtener las ecuaciones de los planos tangentes a la cuádrica

$$x^2 - 2xy + z^2 - 3x + z = 0$$

en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, -1, -1)$.

2. — ¿Corta dicha cuádrica a la esfera de centro $(1, 0, 1)$ que pasa por el origen?

Deducir las expresiones dx, dy, dz para la curva de intersección en el origen.

FORMULA DE TAYLOR PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

208. — Derivadas sucesivas.

Puesto que las derivadas primeras $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ de una función $f(x, y)$ son a su vez funciones de dos variables, pueden derivarse respecto de x o respecto de y, y así obtenemos cuatro derivadas *segundas*, que se indican de dos modos:

$$f''_{xx}(x, y) \quad , \quad f''_{xy}(x, y) \quad , \quad f''_{yx}(x, y) \quad . \quad f''_{yy}(x, y)$$

o bien, con la notación de Jacobi:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \, \partial y} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \, \partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

Estas derivadas segundas pueden derivarse respecto de x o y, resultando las derivadas terceras, que se representan así:

$$f'''_{x^3} \; ; \; f'''_{x^2y} \; ; \; f'''_{xy^2} \; ; \; f'''_{y^3}$$

o bien con la notación de Jacobi, mediante las ∂.

Obsérvese que hemos hecho dos abreviaciones de escritura: poniendo índices a modo de exponentes a la variable respecto de la cual se deriva dos o más veces, para evitar poner xx, yy, etc.; la otra abreviación ha consistido en suprimir las variables (x, y); esto puede hacerse cuando no haya peligro de confusión, pero cuando haya que escribir no las funciones derivadas, sino los valores que toman en el punto (a, b), entonces no deberán omitirse.

Ejemplo. — La función $z = px^2 + qy^2$ representa un paraboloide elíptico; sus derivadas son:

$$f''_{xx} = 2p; \quad f''_{yy} = 2q; \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0;$$

209. — Propiedad conmutativa de la derivación.

Obsérvese en los ejemplos anteriores que resulta $f''_{xy} = f''_{yx}$; y puede demostrarse que esto acontece siempre, suponiendo continuas estas derivadas.

En virtud de esta propiedad el número de derivadas terceras se reduce a cuatro; si la función tiene tres variables independientes, hay seis derivadas segundas, diez terceras, etc.

La hipótesis de la continuidad de las dos derivadas mixtas es cómoda para la demostración, pero excesiva. En realidad, basta la existencia de f_{xy} en un entorno de P y su continuidad en P, para asegurar la existencia de f_{yx} en P, igual a ella (Teorema de Schwarz).

También resulta esta igualdad suponiendo la existencia de las cuatro derivadas 2.as en P y la diferenciabilidad de las derivadas 1.as en P, según la definición (199) de Thomae (Teorema de Heffter - Young).

La demostración de ambos puede verse en *Elementos* de *T. F.*, § 41; pero como estas condiciones son todavía excesivas, y las demostraciones delicadas, daremos solamente la muy sencilla y más que suficiente del teorema arriba enunciado de Bonnet, que supone continuas en P las dos derivadas mixtas.

Demostración. — Hemos visto que la diferencia de valores de $f(x, y)$ en dos vértices consecutivos del rectángulo formado por los puntos fijos

$$(a, b), \quad (a+h, b), \quad (a, b+k), \quad (a+h, b+k),$$

es una expresión de primer grado respecto de h y k; vamos a ver ahora que la suma de valores en dos vértices opuestos, menos la suma de valores en los otros dos, es de segundo orden. Esta suma puede escribirse de dos modos:

$$[f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] - [f(a+h, b) - f(a, b)] =$$
$$= [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] - [f(a, b+k) - f(a, b)].$$

Escrita del primer modo se ve que no es sino el incremento de la función $f(a+h, y) - f(a, y)$, al incrementar $y = b$ en k, luego su valor es:

$$k[f'_y(a+h, \eta) - f'_y(a, \eta)] = k.h.f''_{xy}(\xi, \eta)$$

puesto que el incremento de $f'_y(a, \eta)$ al pasar de a al valor $a+h$, resulta aplicando de nuevo el teorema del valor medio de las funciones de una variable.

Análogamente, escrita la expresión del segundo modo ,se ve que basta permutar x e y, a y b, h y k; tenemos, pues, dos fórmulas para la misma expresión y por tanto, suprimiendo el factor común hk, resulta:

$$f''_{yx}(\xi' \eta') = f''_{xy}(\xi, \eta)$$

Hasta aquí hemos supuesto fijos h y k, siendo también constantes los números ξ, η; pero si hacemos tender h y k hacia 0 y suponemos que las derivadas $f''_{xy}(x, y)$, $f''_{yx}(x, y)$ son funciones *continuas*, esto es, que sus límites para $(h, k) \to 0$ coinciden con sus valores para $h = k = 0$, tomando límites de la igualdad [1], basta sustituir $h = k = 0$ y resulta la igualdad:

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$$

210. — Fórmula de Taylor para dos variables.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$, para un cierto valor a de x, hemos enseñado a calcular el valor de la función en un punto $a+h$, mediante la fórmula de Taylor.

Consideremos el mismo problema para las funciones de dos variables; sea $f(x, y)$ la función cuyo valor se conoce para el punto (a, b) y se trata de calcular el valor que toma en el punto $(a+h, b+k)$.

Para pasar del punto $A(a, b)$ al $Q(a+h, b+k)$ podríamos primero incrementar a a en h y luego a b en k; pero vamos a pa-

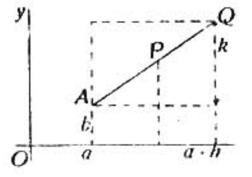
sar directamente de A a Q siguiendo la recta AQ, es decir, incrementando ambos valores al mismo tiempo.

Un punto P sobre la recta AQ está fijado por la relación:

$AP/AQ = t$ siendo $0 < t < 1$;

luego los valores de x e y dependen de una variable t:

$$x = a + ht; \quad y = b + kt.$$



(Para $t = 0$ se tiene el punto A, y para $t = 1$ el punto Q).

Resulta, pues, $f(x, y) = f(a + ht,\ b + kt) = \varphi(t)$

y aplicando la fórmula de Mac-Laurin a la función $\varphi(t)$, se tiene:

[2] $$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) +$$
$$+ \frac{t^2 . \varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1} . \varphi^{n-1}(0)}{(n-1)!} + \frac{t^n . \varphi^n(\xi)}{n!}$$

Vamos a calcular los valores de las derivadas: $\varphi'(0)$; $\varphi''(0)$;... aplicando la regla de derivación de las funciones compuestas, puesto que f es función de x, y, las cuales son funciones de t, resulta:

$$\varphi'(t) = f'_x(x, y) . h + f'_y(x, y) . k$$

de donde:

$$\varphi'(0) = f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k.$$

Análogamente:

$$\varphi''(t) = f''_{xx}(x, y) . h^2 + 2f''_{xy}(x, y) . hk + f''_{yy}(x, y) . k^2$$
$$\varphi''(0) = f''_{x^2}(a, b) . h^2 + 2f''_{xy}(a, b) . hk + f''_{y^2}(a, b) . k^2.$$
$$\varphi'''(0) = f'''_{x^3}(a, b)h^3 + 3f'''_{x^2y}(a, b)h^2 . k + 3f'''_{xy^2}(a, b) . hk^2 +$$
$$+ f'''_{y^3}(a, b)k^3.$$

La formación de estas derivadas sucesivas tiene analogía con el desarrollo del binomio de Newton; los coeficientes son los mismos y los exponentes están representados por los índices de diferenciación. Se escriben abreviadamente así:

$$\varphi''(0) = [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)}.$$
$$\varphi'''(0) = [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(3)}.$$

Sustituyendo estos valores de las derivadas en la fórmula [2] se tiene:

$$\varphi(t) = f(a + ht,\ b + kt) = f(x, y) = f(a, b) +$$
$$+ t[f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k] +$$
$$+ t^2[f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)} : 2! + \dots +$$
$$+ t^n[f'_x(\xi, \eta) . h + f'_y(\xi, \eta) k]^{(n)} : n!$$

Si queremos el valor de la función $f(x, y)$ en el punto Q, es $t = 1$, luego:

$$f(a + h,\ b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [f'_x(a, b) . h + f'_y(a, b) . k]^{(2)} + \dots +$$
$$+ [f'_x(\xi, \eta) h + f'_y(\xi, \eta) . k]^{(n)} : n!$$

que es el desarrollo de Taylor para dos variables.

NOTA. — La ley que se ha observado en la formación de las derivadas sucesivas es general para todo valor de n.

En efecto, para derivar una expresión respecto de la variable independiente t hay que hacer estas operaciones: derivar respecto de x y multiplicar por h (es decir, según la notación simbólica de las potencias, multiplicar la expresión por $h . f'_x$); después derivar respecto de y y multiplicar por k (es decir, multiplicar simbólicamente por kf'_x) y sumar estos dos resultados. Esto equivale, en definitiva, a multiplicar la expresión dada por el binomio $hf'_x + kf'_y$, luego las expresiones que se obtienen son siempre potencias sucesivas de este binomio.

Obsérvese que esta multiplicación simbólica, o sea, la suma de las derivadas parciales por los respectivos incrementos, es precisamente la diferenciación, y designando por df, d^2f, ..., las diferenciales sucesivas, la fórmula de Taylor se escribe así:

$$\Delta f = df + \frac{d^2f}{2!} + \frac{d^3f}{3!} + \dots + \frac{(d^n f)}{n!}$$

indicando el paréntesis que la diferencial se toma en un punto intermedio.

211. — Fórmula de Taylor para más variables.

El mismo razonamiento vale para cualquier número de variables. Si, por ejemplo, son tres, la fórmula es:

$$f(a + h,\ b + k,\ c + l) = f(a, b, c) + (f'_x . h + f'_y . k + f'_z . l) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [f'_x . h + f'_y . k + . f'_y . l]^{(2)} + \dots + [f'_x . h + f'_y . k + f'_z . l]^{(n)} : n!$$

entendiendo que las derivadas deben tomarse en el punto (a, b), excepto las del último término, donde se toman en un punto intermedio.

Una vez más se ve la ventaja de la notación diferencial, al expresar la fórmula de Taylor, cualquiera que sea el número de variables, pues la fórmula anterior tiene validez general.

212. — Aplicaciones en Geometría Analítica.

Cambio de coordenadas. — La fórmula de Taylor tiene multitud de aplicaciones en Geometría Analítica. Tal es, por ejemplo, el cambio de coordenadas. Dada la ecuación: $f(x, y) = 0$ si se cambian los ejes por otros paralelos, *las coordenadas antiguas y nuevas están ligadas por la relación:*

$$x = a + x'; \quad y = b + y'$$

La ecuación se transforma en esta otra:

$$f(a, b) + x' . f'_x(a, b) + y' . f'_y(a, b) + \dots = 0$$

Análogamente ,la ecuación: $f(x, y, z)$ referida a los nuevos ejes x', y', z' relacionados por las fórmulas: $x = a + x'$, $y = b + y'$, $z = c + z'$ es:

$$f(a, b, c) + x' . f'_x(a, b, c) + y' . f'_y(a, b, c) + z' . f'_z(a, b, c) + \dots = 0.$$

Centro de las cuádricas. — En particular, si se trata de una cuádrica y elegimos el punto (a, b, c) de modo que cumpla las condiciones:

$$f'_x(a, b, c) = 0; \quad f'_y(a, b, c) = 0; \quad f'_z(a, b, c) = 0 \qquad [3]$$

la ecuación referida a este nuevo origen carece de términos de primer grado. *Por tanto, si un punto* (x', y', z') *está en la superficie, también el simétrico* $(-x', -y', -z')$; es decir: el punto (a, b, c) es *centro de simetría* de la superficie.

Regla práctica: para determinar el centro de una cuádrica, se resuelve el sistema que resulta de anular las tres derivadas primeras.

Obsérvese que los términos de segundo grado no se alteran con la sustitución, luego para referir la cuádrica a su centro (a, b, c) basta suprimir los términos de primer grado y poner como término constante $f(a, b, c)$.

EJEMPLO. — *Sea la superficie:*

$$2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - 2y = 4$$

Para determinar el centro pondremos:

$$4x - 3y - z = 0; \quad -3x + 2y - 2 = 0; \quad -x + 2z = 0$$

de donde se despeja:

$$x = -3 \ , \ y = -7/2 \ , \ z = -3/2.$$

La ecuación referida a este centro es:

$$2x^2 - 3xy + y^2 - xz + z^2 - 1/2 = 0.$$

EJERCICIOS

1. — Referir la cuádrica del ejemplo anterior a los ejes trazados paralelamente por el nuevo origen $(-1, 2, 3)$.

2. — Acotar el error producido en la función $f(x, y)$ por los errores Δx, Δy cuando $f'_x = f'_y = 0$.

3. — Escríbase la fórmula de Taylor para el origen y un punto (x, y); en tal caso se llama *fórmula de Mac-Laurin.*

CLASIFICACION DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE. MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS.

213. — Relación entre la superficie y el plano tangente.

Para estudiar la forma de una superficie: $z = f(x, y)$ en el entorno de un punto (a, b, c) conviene desarrollar la función por la fórmula de Taylor, limitando el desarrollo en un término más o menos avanzado, según el grado de aproximación que se desee en dicho estudio.

Limitándola en los términos de segundo grado, se tiene:

$$f(x, y) = f(a + h, b + k) = f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hkf''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta)].$$

La ecuación del plano tangente en el punto (a, b, c) es:

$$z - c = (x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b)$$

o sea, puesto que: $c = f(a, b)$, $x - a = h$, $y - b = k$:

$$z = f(a, b) + hf'_x(a, b) + kf'_y(a, b).$$

Restando ambas ecuaciones tenemos como expresión del incremento de la ordenada de la superficie respecto de la ordenada del plano tangente:

$$[1] \quad z_1 - z_2 = \tfrac{1}{2} [h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hkf''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta)]$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 [\cos^2 w . f''_{xx}(\xi, \eta) + 2 \operatorname{sen} w . \cos w . f''_{xy}(\xi, \eta) +$$
$$+ \operatorname{sen}^2 w . f''_{yy}(\xi, \eta)] = \tfrac{1}{2} r^2 T$$

introduciendo coordenadas polares: $h = r \cos w$, $k = r \operatorname{sen} w$.

Según sea la variación de signo de este trinomio, así será la posición de la superficie en el entorno del punto (a, b, c) respecto de su plano tangente en él. El signo del trinomio entre paréntesis es en un entorno del punto (a, b) el mismo del trinomio:

$$[2] \qquad T_0 = A \cos^2 w + 2B . \operatorname{sen} w . \cos w + C \operatorname{sen}^2 w$$

llamando A, B, C a las derivadas segundas en el punto (a, b):

$$A = f''_{x^2}(a, b) \quad B = f''_{xy}(a, b) \quad C = f''_{y^2}(a, b).$$

y excluyendo un entorno angular arbitrariamente pequeño de cada dirección *w* ***en que se anula*** *T_0*; el cual, con el artificio usado en Algebra elemental de multiplicar por A (si no es nulo) para formar un cuadrado, puede escribirse así:

$$[3] \qquad T_0 = [(A \cos w + B \operatorname{sen} w)^2 + (AC - B^2) \operatorname{sen}^2 w] : A$$

utilizando el mismo artificio estudiado en Algebra para resolver las ecuaciones de segundo grado, esto es, multiplicar por A, para formar el cuadrado de un binomio.

Demostración. — T_0 es función continua de w, no nula por haber excluido el valor o los dos valores en que se anule, con sendos entornos; luego su valor absoluto tiene un mínimo $m > 0$.

Suponiendo continuas las derivadas, en un círculo de radio r difieren de los números A, B, C, menos de ¼ m; y como los senos y cosenos no superan a 1, el trinomio T difiere del T_0 en menos de m; luego tiene el mismo signo de T_0.

214. — Discusión.

Consideremos todos los casos posibles respecto del binomio $H = AC - B^2$, que se llama *hessiano* de la función.

Primer caso: $H = AC - B^2 > 0$. Entonces es necesariamente: $A > 0$, $C > 0$ o bien $A < 0$, $C < 0$ y la expresión [3] no se anula para ningún valor de w, pues si se anula el seno no se anula el coseno y viceversa, siendo siempre positiva.

Es decir: $z_1 - z_2$ tiene siempre el mismo signo. Hay una región de la superficie alrededor del punto (a, b) la cual queda situada a un mismo lado del plano tangente, y éste no atraviesa a la superficie.

El punto de la superficie se llama entonces *elíptico*.

Segundo caso: $H = AC - B^2 < 0$. Si es $A \neq 0$ vale la transformación [3] y resulta: para $w = 0$ la expresión queda reducida a un cuadrado, por tanto, tiene un valor *positivo*. En cambio para

$$[4] \qquad \operatorname{tg} w = - A/B, \text{ es decir, } A \cos w + B \operatorname{sen} \ w = 0,$$

resulta un número negativo $(AC - B^2) \operatorname{sen}^2 w$, es decir: al girar la recta AQ en torno del punto A, hay direcciones en que $z_1 - z_2$ es *positivo* y otras en que es *negativo*. La superficie queda, pues, atravesada por el plano tangente.

El punto (a, b, c) se llama *hiperbólico*, expresando este calificativo, no sólo que el plano tangente *atraviesa* a la superficie, sino que hay dos sectores finitos de ella a distinto lado del plano. V. Nota).

Si dentro de este caso fuese $A = 0$, procederíamos análogamente multiplicando y dividiendo por C.

Si fuese $A = 0$, $C = 0$ la expresión se reduciría al término: $2B \operatorname{sen} w . \cos w$, que también cambia de signo al recorrer w los cuatro cuadrantes.

La conclusión anterior subsiste, es decir: el punto es hiperbólico.

Tercer caso: $H = AC - B^2 = 0$. La expresión se reduce a un cuadrado que es positivo para todo valor w, excepto para el rayo [4]. donde se anula, luego la superficie está de un lado del plano tangente, excepto en un ángulo arbitrariamente pequeño entorno de dicho rayo, donde nada puede asegurarse. Si $A = 0$ y por consiguiente $B = 0$ el trinomio se reduce a $C \operatorname{sen}^2 w$ y la conclusión subsiste; pero si $A = B = C = 0$, hay que recurrir a las derivadas superiores. (V. Notas).

El punto se llama *parabólico* si $H = 0$, pero A, B, C no son todas nulas; el tipo más sencillo se presenta en las superficies cónicas y cilíndricas.

215. — Máximos y mínimos relativos.

Se dice que una función de cualquier número de variables tiene en un punto un máximo (mínimo) relativo cuando el valor que toma en dicho punto es mayor (menor) que todos los que toma en un entorno del mismo punto.

Si es una función: $f(x, y)$ decimos que en el punto (a, b)
toma valor máximo si se verifica $f(a + h,\ b + k) < f(a, b)$
" " mínimo " " " $f(a + h,\ b + k) > f(a, b)$

para todos los puntos que distan del (a, b) menos de un cierto número r, es decir, para todos los puntos que cumplen la condición: $h^2 + k^2 < r^2$.

Análogamente para las funciones de tres variables, el valor $f(a, b, c)$ ha de superar a todos los que toma en una cierta esfera de centro (a, b, c) y radio r.

Desde luego, es condición *necesaria*, para que en un punto haya máximo o un mínimo relativo, que se anulen todas las derivadas primeras. Así, para dos variables, debe ser:

$$f'_x(a, b) = 0,\ f'_y(a, b) = 0. \qquad [5]$$

En efecto, fijado: $y = b$ tenemos una función de una variable x; y para que el valor $f(a, b)$ sea máximo o mínimo ha de anularse f'_x; análogamente, fijado $x =$ constante, resulta que debe anu-

larse f'_y. El plano tangente a la superficie en el punto (a, b) se reduce a $z = c$, es decir, paralelo al plano xy.

La función tendrá máximo o mínimo según que la superficie quede por debajo o por encima del plano tangente; no habrá máximo ni mínimo si la superficie atraviesa el plano tangente.

1.º *Caso elíptico:* $H = AC - B^2 > 0$. La superficie queda, como hemos visto, a un mismo lado del plano tangente y queda por debajo o por encima según que sea $A < 0$ o bien $A > 0$; es decir; hay máximo si es $H > 0$, $A < 0$, y mínimo si es $H > 0$ y $A < 0$.

2.º *Caso hiperbólico:* $H = AC - B^2 < 0$. La superficie queda atravesada por el plano tangente y en el punto (a, b) no tiene ni máximo ni mínimo. El punto se llama de *ensilladura*.

3.º *Caso parabólico:* $H = AC - B^2 = 0$. No es suficiente la consideración de las derivadas segundas para dilucidar si hay máximo o mínimo, en el *sentido estricto*, que hemos definido. (V. *Notas*).

Resumen: Dada la función $f(x, y)$, calcularemos todos los puntos (a, b), que satisfacen a las dos ecuaciones $f'_x(a, b) = 0$, $f'_y(a, b) = 0$, es decir: resolveremos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y analizaremos cada punto por separado sustituyendo (a, b) en el hessiano

$$H = f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy}$$

Resulta así este cuadro sinóptico:

Caso elíptico:	$H > 0$	$f''_{x^2}(a, b) > 0$ mínimo. $f''_{x^2}(a, b) < 0$ máximo.
Caso hiperbólico:	$H < 0$	No hay máximo ni mínimo.
Caso parabólico:	$H = 0$	Caso dudoso.

La discusión en el caso de más variables no cabe en este curso.

NOTA. — A pesar del carácter de este libro, donde no cabe aquilatar todas las cuestiones, conviene puntualizar las conclusiones (214) y (215), aclarando su alcance respecto de las primeras ediciones de esta obra.

Si fijamos ω y prescindimos de las direcciones en que se anula el trinomio [2] en cualquier otra dirección el trinomio [2] no es nulo y por tanto el [1] tiene signo constante en un trozo de radio $0 < r < \rho$. En el 1.er caso $H > 0$, resulta, pues, que la superficie está de un solo lado del plano tangente en cada una de las direcciones, para un cierto segmento de radio vector; en el 2.º caso $H < 0$ sucede esto para las direcciones interiores a cada uno de los dos ángulos completos que forman las dos rectas en que se anula [2]; y en el 3.er caso también está la superficie de un solo lado en todas las direc-

ciones, excepto una. Sin embargo, de estas conclusiones (v. edición de 1929) que se refieren a un modo especial de aproximación al punto (a, b) radialmente, no podría concluirse nada respecto de la aproximación por caminos curvos.

He aquí un ejemplo sencillo:

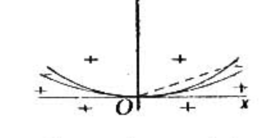
$$z = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

o bien desarrollando:

$$z = y^2 - 3x^2y + 2x^4$$

Las parábolas dibujadas en la figura:

$$y = x^2 \qquad y = 2x^2$$



dividen al plano en tres regiones y dentro de cada una tiene z signo constante, que está indicado en la misma figura. A lo largo de cada parábola, z se anula. Cualquiera que sea la dirección elegida, hay un segmento de origen 0 sobre el cual toma z valores *positivos*, es decir, en cada dirección está la superficie encima del plano tangente $z = 0$, y sin embargo no existe ningún entorno circular del punto O, en el cual esté la superficie encima de dicho plano; pues esos infinitos radios, todos mayores que O, no forman ningún entorno superficial.

Examine análogamente el lector la función $z = y^2 - x^2y$, y vea que se verifica la propiedad de estar encima del plano tangente en todas las rectas trazadas por 0, excepto el eje x; y la propiedad (214) se verifica en todo ángulo que no contenga esta recta singular.

Todo lo dicho vale asimismo para los máximos y mínimos. En el caso 3.º puede decirse que si no se anulan las tres derivadas hay máximo o mínimo en sentido *amplio*, entendiendo que en todo entorno angular de la recta singular la función puede tomar valores menores y mayores que en el punto (a, b). Se trata, pues, de un máximo o mínimo relativo en dicho punto respecto de los valores alcanzados en una región angular que se puede aproximar al ángulo de una vuelta tanto como se quiera.

Nótese de paso, que la conclusión puramente negativa a que llegan los autores más acreditados (tales De la Vallée - Poussin, Pincherle, etc.) de que nada puede asegurarse en este caso dudoso, la hemos sustituido por una conclusión afirmativa, tan clara como en los dos anteriores, aunque menos sencilla. El único caso dudoso es aquel en que las tres derivadas segundas se anulan.

El caso de tres variables se reduce análogamente, a la discusión de los signos de una forma cuadrática con tres variables, tal como se hace en la teoría de las cónicas; y la teoría de las cuádricas es aplicable al caso de cuatro variables.

En cambio, cuando se anulan todas las derivadas segundas de la función, en el punto considerado, se precisan recursos más superiores.

(*) Este ejemplo aclara el diverso significado de las condiciones obtenidas en la 2.ª edición, que se referían a la aproximación radial y las aquí demostradas (con razonamiento casi tan simple como aquél) que se refieren a entornos superficiales. Por este mayor alcance resulta menos simple el enunciado del caso 3.º. Obsérvese el ejemplo que acabamos de estudiar y se verá que corresponde a este caso, por ser las derivadas segundas $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$, por tanto $H = 0$. Es cierto que la superficie está encima del plano tangente en cada dirección, como allí se enunciaba, y hasta en este caso especial se verifica esta propiedad por añadidura en la dirección singular $y = 0$, pero respecto de entornos superficiales sólo puede asegurarse que la superficie está situada encima del plano en cualquier ángulo que no contenga el eje x.

216. — Caso de variables ligadas - Método de Lagrange.

Caso de una sola ecuación de ligadura.

Sea una función de variables ligadas, es decir:

[1] $$u = f(x, y, z)$$

[2] $$\varphi(x, y, z) = 0.$$

La función u no tiene tres variables independientes, sino sólo dos: por ej. x, y. La condición de máximo o mínimo es que se anulen las derivadas parciales respecto de x, y, o sea que se anule la diferencial total du. Para calcular ésta, diferenciaremos la [1] y la [2] y se tiene:

[3] $$f'_x . dx + f'_y . dy + f'_z . dz = 0$$

[4] $$\varphi'_x . dx + \varphi'_y . dy + \varphi'_z . dz = 0$$

Multiplicando la [4] por λ, que es un coeficiente indeterminado, y sumándole la [3], queda:

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x)dx + (f'_y + \lambda\varphi'_y)dy + (f'_z + \lambda\varphi'_z)dz = 0.$$

Podemos dar a λ un valor tal que se anule el tercer término:

$$\lambda = - f'_z/\varphi'_z$$

quedando la expresión reducida a los dos primeros términos, que deben anularse, cualquiera sea el valor de dx, dy por la condición de máximo o mínimo.

Luego se tienen las siguientes ecuaciones:

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0; \quad f'_y + \lambda\varphi'_y = 0; \quad f'_z + \lambda\varphi'_z = 0 \qquad [a]$$

y como cuarta ecuación se tiene: $\varphi(x, y, z) = 0$ que liga entre sí las variables. Con estas cuatro ecuaciones se pueden calcular los valores de: λ, x, y, z.

Para distinguir si resulta máximo o mínimo será necesaria una discusión especial en cada caso.

Las tres ecuaciones anteriores [a] equivalen a igualar a cero las derivadas parciales de una función: $\Psi(x, y, z) = 0$ obtenida sumando a la función dada $f(x, y, z)$ la otra función $\varphi(x, y, z)$, multiplicada por un coeficiente indeterminado λ.

Ejemplo. — Entre todos los paralelepípedos de volumen dado encontrar el de área mínima.

Sea $C = xyz$ el volumen del paralelepípedo.

Sea $u = 2xy + 2yz + 2xz$ el área del mismo.

Aplicando lo dicho anteriormente:

$$\Psi(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - C),$$

Las condiciones que deben cumplirse son:

$$2y + 2z + \lambda yz = 0; \quad 2x + 2z + \lambda xz = 0; \quad 2x + 2y + \lambda xy = 0.$$

La cuarta ecuación es: $C = xyz$.

Despejando λ de las tres primeras, resultan los valores que deben ser iguales:

$$\frac{y+z}{yz} = \frac{x+z}{xz} = \frac{x+y}{xy}.$$

De las dos primeras: $(y+z)x=(x+z)y \therefore xy+xz=xy+yz$, luego: $x=y$. Análogamente de la primera y tercera: $(y+z)x=(z+y)z \therefore xy+ xz+yz$. De donde $x=z$. Y en resumen: $x=y=z$, lo que quiere decir, que el paralelepípedo que cumple la condición enunciada en el problema es el cubo.

Como es $u>0$, y en el contorno, o sea en los ejes x, y es ∞, el mínimo absoluto es interior y por tanto relativo; luego la solución única obtenida da, en efecto, ese mínimo.

Caso de dos ecuaciones de ligadura.

Si en vez de ser dos las funciones que ligan las variables, fueran tres, es decir:

$$[1] \quad u=f(x,y,z); \qquad [2] \quad \varphi(x,y,z)=0; \qquad [3] \quad \psi(x,y,z)=0$$

en realidad lo que se tiene es una función $u=F(x)$ con una sola variable independiente. La condición para que haya máximo o mínimo es: $F'(x)=0$, o sea: $du=0$.

Diferenciando las tres ecuaciones, los puntos buscados deben satisfacer a éstas:

$$du=f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz=0 \qquad [4]$$

$$\varphi'_x\,dx+\varphi'_y\,dy+\varphi'_z\,dz=0 \qquad [5]$$

$$\varphi'_x\,dx+\varphi'_y\,dy+\varphi'_z\,dz=0 \qquad [6]$$

pudiendo despejarse dy, dz de las dos últimas para sustituirlas en la 1.ª; o bien se eliminan escribiendo el determinante (que es el jacobiano de las tres funciones) igualado a cero; ecuación que con [2] y [3] determina los posibles puntos, llamados *extremantes*.

Es obvio que la eliminación puede hacerse por cualquier método; y si se adopta el de coeficientes indeterminados, el sistema anterior queda sustituido por este otro:

$$f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0$$
$$f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0$$
$$f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0$$

Entre estas tres ecuaciones más las dos ecuaciones $\varphi=0$, $\psi=0$ se eliminan λ, μ, y, z, despejándose la solución x.

A esto se reduce el método llamado de Lagrange, que puede enunciarse así: Multiplicando la [2] por λ y la [3] por μ, dos coeficientes indeterminados, y sumándolas con la [1] se tiene:

$$\Psi=f+\lambda\varphi+\mu\psi$$

y tratando esta función como en el caso de variables libres, al anular sus tres derivadas se obtiene el sistema anterior.

EJEMPLO. — Distancia de O a la curva: $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$.

La función f es en este caso $x^2+y^2+z^2$;

la ecuación [1] es: $u=x^2+y^2+z^2$

» » [4] » $x\,.\,dx+y\,.\,dy+z\,.\,dz=0$

La recta cuyos coeficientes directores vienen dados por [5] y [6] está en los planos tangentes a las superficies $\varphi = 0$, $\psi = 0$ en el punto buscado P, y es por tanto la tangente a la curva intersección; resta que es perpendicular a la OP, en virtud de [4], luego resulta: *los segmentos mínimos y máximos entre un punto y una curva son normales a ésta.*

En el caso de la recta: $x = az + p$, $y = bz + q$ los coeficientes de las ecuaciones [5] y [6] son

$$\begin{array}{lccc} & 0 & 1 & -b \\ & 1 & 0 & -a \\ \text{Solución:} & a & b & 1 \end{array}$$

y sustituida en la [4], resulta: $ax + by + z = 0$, plano normal a cuya intersección con ella da el punto buscado.

Con el método de Lagrange, el cálculo sería éste:

$$2x + \lambda = 0 \quad , \quad 2y + \mu = 0 \quad , \quad 2z - \lambda a - \mu b = 0$$

y al eliminar λ, μ, resulta la misma ecuación del plano normal.

Método general.

Cualquiera que sea el número n de variables de la función propuesta y el número m de ecuaciones de ligadura (menor que n) condición *necesaria, pero no suficiente,* a que deben satisfacer los puntos extremantes, es la anular a la diferencial total. Esta viene expresada mediante las diferenciales de las n variables aparentes, pero en verdad sólo hay $n - m$ independientes; tales diferenciales están vinculadas por las m ecuaciones que se forman diferenciando las de ligadura.

La eliminación puede hacerse por cualquier método, y el de Lagrange puede no tener ventaja sobre otros artificios.

La discusión de los puntos obtenidos se hace formando la diferencial 2.ª, 3.ª, ..., y puede conducir a difíciles problemas algebraicos. En cada caso, la índole del problema puede evitar ese cálculo, como se vió en el ejemplo.

217. — Intersección de la superficie con el plano tangente.

En los puntos de intersección debe ser $z_1 = z_2$, luego la ecuación, sobre el plano xy, de dicha intersección es:

$$h^2 f''_{xx}(\xi, \eta) + 2hk f''_{xy}(\xi, \eta) + k^2 f''_{yy}(\xi, \eta) = 0$$

donde interviene el punto desconocido (ξ, η). Dividiendo por h^2 resulta una ecuación en k/h cuyos coeficientes dependen también de h y k; pero al tender h y k a 0 estos coeficientes son A, B y C; por lo tanto, los valores k/h, es decir, los coeficientes angulares de los rayos que proyectan desde O los puntos de intersección buscados, tienden hacia los valores límites, dados por la ecuación límite

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C = 0$$

que representa, por tanto, *las tangentes en el punto a la curva de intersección del plano tangente con la superficie.*

Las bisectrices del ángulo de estas dos rectas se llaman *direcciones principales* de la superficie en el punto (a, b, c).

En particular, si la superficie es una cuádrica, la intersección se compone de dos rectas reales si la superficie es un hiperboloide de una hoja o un paraboloide hiperbólico. Para este último caso se ve inmediatamente, pues siendo la ecuación del paraboloide: $z = px^2 - qy^2$, el desarrollo de Taylor termina en los términos de segundo grado, y no habiendo término complementario, la intersección del plano tangente en (a, b) con la superficie viene dada por la ecuación:

$$2h^2p - 2k^2q = 0; \qquad h^2p - k^2q = 0$$

que representa dos rectas.

Aplicando la discusión, resulta: El *elipsoide*, el ***hiperboloide de dos hojas*** y el *paraboloide elíptico tienen todos sus puntos elípticos;* el ***hiperboloide de una hoja*** y el *paraboloide hiperbólico tienen sus puntos hiperbólicos.*

Finalmente, si se considera un cilindro y colocamos, por ejemplo, sus generatrices paralelamente al eje x su ecuación es: $z = f(y)$ por tanto: $f'_x = 0$, $f''_{x^2} = 0$, $f''_{xy} = 0$ y siendo nulos A y B es $H = 0$ es decir: Todos los puntos de un *cilindro* cualquiera son *parabólicos.*

La intersección con el plano tangente se reduce a la generatriz, considerada como doble.

Lo mismo acontece con los conos y con todas las superficies desarrollables.

En los puntos parabólicos, las dos rectas tangentes dadas por la ecuación: $h^2A + 2hkB + k^2C = 0$, se reducen a una sola doble; la dirección de esta tangente única y la perpendicular a ella son las dos direcciones principales de la superficie.

En el caso del cilindro, o en general en las superficies desarrollables, como la intersección se reduce a una recta, la tangente es ella misma.

EJERCICIOS

1. — Calcular los extremos de la función $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^6$.
(Corresponde al caso dudoso y no hay máximo ni mínimo, a pesar de que en cada dirección por el punto $(0, 0)$ la función tiene valor mínimo en él).

2. — **Determinar los triángulos tales que el producto de los senos de sus ángulos sea máximo.**
(Anulando las derivadas respecto de los dos ángulos que se tomen como variables independientes, resulta que el triángulo debe ser equilátero. Como la función es continua y positiva, admite un máximo absoluto y éste corresponde, por tanto, a los ángulos de 60°).

3. — **Determinar en el plano de un triángulo dado el punto tal que la suma de cuadrados de distancias a los tres vértices sea mínima.**
(Como coordenadas para el punto buscado resultan los promedios de las coordenadas de los vértices. Demuéstrese que tal punto es el baricentro y que éste es la solución buscada).

4. — **Determinar en el plano de un triángulo dado el punto cuya suma de distancias a los tres vértices sea mínima.**
Al anular las dos derivadas resulta la condición de que sean iguales los ángulos bajo los cuales se ven los tres lados. Constrúyase, probando que es la solución pedida, si los tres ángulos del triángulo son menores que 120°. Estúdiese el caso en que un ángulo es igual o mayor que 120°.

5. — **Calcular la distancia mínima desde el origen de coordenadas al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.**

6. — **Calcular la distancia mínima entre dos rectas que se cruzan.**

CAPITULO X

TEORIA DE LAS CURVAS Y SUPERFICIES

LECCIÓN 53

TANGENTE Y PLANO OSCULADOR DE LAS CURVAS ALABEADAS

218. — Concepto de curva.

Suele definirse intuitivamente una curva como "camino descrito por un punto que se mueve según cierta ley". Esta definición carece de la claridad y precisión necesarias a todo concepto matemático. Ahora bien: definir un movimiento es dar en cada momento t la posición del punto (x, y, z), es decir: x, y, z, son funciones de t, definidas en un cierto intervalo (t_0, t_1) entre el momento inicial y final; pero, además, estas funciones han de ser continuas, para que a momentos muy próximos entre sí, correspondan posiciones del punto tan próximas como se desee. En definitiva, obtenemos la definición siguiente rigurosa:

Curva en el espacio de tres dimensiones es el lugar de los puntos (x, y, z) definidos por tres funciones:

$$x = x(t)\,; \quad y = y(t)\,; \quad z = z(t) \qquad [1]$$

continuas en un intervalo (t_0, t_1) finito o infinito.

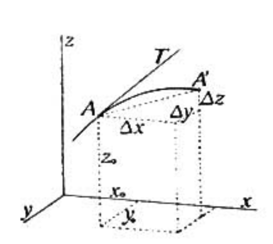
Las curvas que no son planas, se llaman *alabeadas*.

219. — Tangentes a las curvas alabeadas.

Las curvas que se presentan en las aplicaciones tienen tangente en cada punto; es decir: la recta AA' que une el punto $A(x_0\, y_0\, z_0)$ de la curva con otro $A'(x', y', z')$ que tiende hacia A (es decir que sus coordenadas tienen como límites las coordenadas de A) tiene cosenos directores variables que tienden hacia los de una recta que pasa por A, la cual se llama *tangente* a la curva en el punto A.

Los cosenos directores de la recta AA' son proporcionales a los incrementos de coordenadas Δx, Δy, Δz y también proporcionales a los números

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\,;\quad \frac{\Delta y}{\Delta t}\,;\quad \frac{\Delta z}{\Delta t}\,;$$



y como al tender Δt a cero, estos cocientes tienen como límites las derivadas x', y', z', o sea:

$$\frac{dx}{dt}\,,\quad \frac{dy}{dt}\,,\quad \frac{dz}{dt}\,,$$

resulta que la dirección de la recta AA' tiene como límite la dirección definida por estos tres números, que son sus coeficientes directores.

La recta que pasa por A y tiene esta dirección límite, tiene por ecuaciones:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

que representan la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0).

Si una de estas derivadas es nula en el punto A, por ejemplo: $z'(t_0) = 0$, es nulo el 3.^{er} coeficiente director; la tangente es paralela al plano coordenado xy; una ecuación de la recta es: $z = z_0$; y la otra es la igualdad del 1.° y 2.° miembro.

Si son nulas dos derivadas. por ej.: $y'(t) = 0$; $z'(t) = 0$ las ecuaciones de la tangente son: $y = y_0$; $z = z_0$ y por lo tanto es paralela a un eje, que en este caso es el x.

Con el convenio de anular el numerador cuando se anula el denominador, pueden adoptarse las ecuaciones anteriores como válidas en estos casos.

NOTA. — Si para t_0 son nulas las tres derivadas x', y', z', pero no x'', y'', z'', es $\Delta x = \frac{1}{2} x''(\xi)(\Delta t)^2$, y análogamente Δy Δz; luego los coeficientes directores de la secante son los valores de x'', y'', z'' para ciertos valores intermedios de t; y supuestas continuas, tienden hacia $x''(t_0)$, $y''(t_0)$, $z''(t_0)$, que son, por tanto, los coeficientes directores de la tangente.

En general, si es n el orden mínimo para el cual no se anulan las tres derivadas, las ecuaciones de la tangente son:

$$\frac{x - x_0}{x^n(t_0)} = \frac{y - y_0}{y^n(t_0)} = \frac{z - z_0}{z^n(t_0)}$$

Las ecuaciones de la tangente suelen escribirse de modos varios; si ponemos en vez de las derivadas los cocientes diferenciales y multiplicamos por dt, resulta:

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

Si la curva viene dada como intersección de dos cilindros:

$$y = \Phi(x) \qquad z = \Psi(x),$$

es decir, si nos dan las proyecciones de la curva sobre dos planos coordenados, diferenciando resulta:

$$dy = \Phi'(x)\,dx; \qquad dz = \Psi'(x)\,dx$$

y las ecuaciones se transforman así:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\Phi'(x)} = \frac{z - z_0}{\Psi'(x)}$$

Si la curva viene dada como intersección de dos superficies en forma implícita:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad G(x, y, z) = 0$$

diferenciaremos ambas ecuaciones y se despejan valores proporcionales a dx, dy, dz.

Ese cálculo ha sido ya efectuado en (207), resultando que dx, dy, dz son proporcionales a los tres jacobianos. Por tanto, si los tres no son nulos en el punto (x_0, y_0, z_0) las ecuaciones de la tangente, con el convenio ya dicho para el caso de anulación de alguno de ellos, son:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

220. — Hélice cilíndrica.

La hélice puede engendrarse por el movimiento de un punto de una circunferencia que gira alrededor de su centro, al mismo tiempo que éste recorre una perpendicular al plano de la circunferencia, siendo los dos movimientos uniformes.

El movimiento de traslación uniforme se expresa $z = kt + h$.

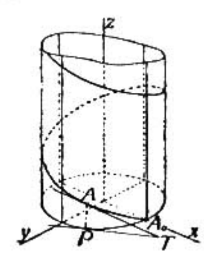
Si la hélice comienza en un punto A_0 situado en el plano xy (cuando $t = 0$, $z = 0$), la ecuación anterior se reduce a: $z = kt$.

El movimiento de rotación es uniforme también y podemos suponer su velocidad 1; si llamamos φ al ángulo de giro en un cierto tiempo t, se tiene: $\varphi = t$, sin término independiente, porque el movimiento empieza en A_0 situado sobre el eje x.

Llamando r al radio del cilindro sostén de la hélice, obtenemos las ecuaciones de la hélice:

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t, \quad z = kt. \qquad [2]$$

Sobre un mismo cilindro podremos obtener infinitas hélices, según el valor de k. El paso de cada una es $2k\pi$.



Si el triedro es directo o positivo (162), los tornillos usuales, llamados directos o positivos, tienen $k > 0$; en cambio, referidos a triedro negativo, como son los dibujados en este texto, tienen $k < 0$. Así, p. ej., la hélice de la adjunta figura tiene $k > 0$, y es negativa.

Importa advertir que todas las demostraciones son independientes del signo del triedro; y en los dibujos conviene usar unos y otros indistintamente.

Las ecuaciones de la tangente en el punto $(x_0\, y_0\, z_0)$ son:

$$\frac{x - x_0}{-r \operatorname{sen} t} = \frac{y - y_0}{r \cos t} = \frac{z - z_0}{k}$$

y sus cosenos directores son, por tanto:

$$\frac{-r \operatorname{sen} t}{\sqrt{k^2 + r^2}}; \qquad \frac{r \cos t}{\sqrt{k^2 + r^2}}; \qquad \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}}$$

El ángulo que forma la tangente a la hélice en el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del eje de las z tiene coseno constante; quiere decir que la tangente a la hélice en un punto cualquiera forma un ángulo constante con la generatriz del cilindro que pasa por ese punto. De aquí que su desarrollada sobre un plano sea una recta.

221. — Planos osculadores a las curvas alabeadas.

Si se considera un punto $A(x_0, y_0, z_0)$ fijo de una curva y el plano tangente en A que pasa por un punto A_1 próximo a él, que tiende al A, la posición límite de este plano tangente es un plano que se llama *osculador* en el punto A a la curva.

De otro modo: Si se considera el plano ABC siendo B, C puntos de la curva a distinto lado de A y que tienden hacia A, el límite del plano ABC es también el mismo plano osculador.

De otro modo: Si por la tangente en A se traza el plano paralelo a la tangente en B, también tiene como límite el plano osculador.

En efecto, partiendo de cualquiera de las tres definiciones (véanse las notas) se llega a esta ecuación del plano osculador:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

O bien, omitiendo indicación del parámetro:

$$[y'.z'' - y''z'](x - x_0) + [x''.z' - x'.z''](y - y_0) +$$
$$+ [x'.y'' - x''.y'](z - z_0) = 0.$$

Aplicación a la hélice cilíndrica:

$$x = r\cos t; \qquad y = r \operatorname{sen} t \qquad z = kt$$
$$x'(t) = -r \operatorname{sen} t; \quad y'(t) = r\cos t \quad z'(t) = k$$
$$x''(t) = -r\cos t; \quad y''(t) = -r \operatorname{sen} t; \quad z''(t) = 0.$$

El plano osculador tiene, por tanto, la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -r \operatorname{sen} t_0 & r\cos t_0 & k \\ -r\cos t_0 & -r \operatorname{sen} t_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que puede escribirse así:

$$(x - x_0)k \operatorname{sen} t_0 - (y - y_0)k\cos t_0 + (z - z_0)r = 0.$$

222. — Triedro principal o intrínseco.

Consideremos el plano osculador en un punto de una curva; la tangente a la curva en ese punto está contenida en dicho plano osculador. Todas las normales a la curva en el punto considerado son perpendiculares a la tangente y están situadas en un plano que es el plano normal a la curva en ese punto. La normal contenida en el plano osculador se llama *normal principal;* la normal perpendicular al plano osculador se llama *binormal.*

El triedro que tiene por aristas la tangente, normal y binormal se llama *triedro principal* o *intrínseco.*

Los cosenos directores (α, β, γ) de la tangente son proporcionales a las derivadas: $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ o bien a las diferencia-

les: dx, dy, dz. Adoptaremos como sentido positivo en la tangente el de la t creciente, es decir, α, β, γ tienen los signos de x', y', z'.

Los coeficientes del plano normal son proporcionales a estos mismos números, según se ha visto en Geometría Analítica, luego la ecuación de dicho plano normal es:

$$(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0$$

o bien:

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz = 0$$

bien entendido que las derivadas y diferenciales han de tomarse en el punto $A(x_0\, y_0\, z_0)$.

Los cosenos directores de la binormal son proporcionales a los coeficientes del plano osculador, puesto que le es perpendicular; luego los cosenos directores (λ, μ, ν) de la binormal son:

$$y'z'' - y''z' = \lambda k, \quad z'x'' - z''x' = \mu k, \quad x'y'' - x''y' = \nu k,$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

Los cosenos directores de la normal, que llamaremos l, m, n, se determinan teniendo en cuenta que la normal es perpendicular a la tangente de cosenos α, β, γ y a la binormal: λ, μ, ν, pero es preferible utilizar las fórmulas de Frenet, que veremos en la próxima lección.

NOTAS

La ecuación del plano que contiene la tangente en el punto t_0 y es paralelo a la tangente en el t_1, es:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_1) & y'(t_1) & z'(t_1) \end{vmatrix} = 0$$

pues el vector de componentes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, proporcionales a las derivadas en t_0, está en el plano, por anularse el determinante; y también el vector paralelo a la segunda tangente. Restando de la tercera fila la segunda y sacando el factor $t_1 - t_0$ quedan, por el teorema del valor medio, las derivadas segundas en puntos intermedios entre t_0 y t_1; en el límite resultan las derivadas $x''(t_0)$, $y''(t_0)$, $z''(t_0)$.

EJERCICIOS

1. — Determinar el triedro intrínseco en la hélice.

2. — Demostrar que la normal principal a la hélice en un punto es el radio del cilindro, que corresponde a ese punto.

RECTIFICACION Y CURVATURA DE LAS CURVAS ALABEADAS

223. — Rectificación de curvas alabeadas.

Para las curvas alabeadas la fórmula que se obtiene es completamente análoga a la deducida en (137).

Sea una curva alabeada ,dada en forma paramétrica:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad z = z(t)$$

demostraremos en nota al final de la lección, que la longitud s del arco de curva viene expresada por la integral:

$$s = \int \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Aparece ahora claro por qué se llama *diferencial de arco* al infinitésimo:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

pues, en efecto, la diferencial de s es esta expresión que figura bajo el signo integral.

Si se divide por la longitud de la cuerda $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ y se pasa al límite (dividiendo numerador y denominador por Δt) resulta el límite 1. Es decir: *La diferencial del arco es infinitésimo equivalente a la cuerda correspondiente.*

EJEMPLO. — Calcular la longitud de una espira de hélice cilíndrica de ecuaciones: $x = r \cos t,\ y = r \operatorname{sen} t,\ y = kt.$

Se tiene $ds^2 = (r^2 \cos^2 t + r^2 \operatorname{sen}^2 t + k^2)(dt)^2 = (r^2 + k^2)(dt)^2$ e integrando entre 0 y 2π, resulta:

$$s = 2\pi \sqrt{r^2 + k^2}$$

En general: la longitud del arco de amplitud a es $a\sqrt{r^2 + k^2}$, es decir, proporcional a dicha amplitud, resultado acorde con el desarrollo rectilíneo de la hélice.

224. — Curvatura de flexión.

Se llama *curvatura media* de un arco AA' al cociente del *ángulo de contingencia* formado por las tangentes en sus extremos, por la longitud del arco. Se llama *curvatura* de *flexión* o *primera curvatura* en el punto A al límite de la curvatura media del arco AA' cuando A' tiende hacia A. El recíproco de este cociente se llama *radio de flexión* en el punto A.

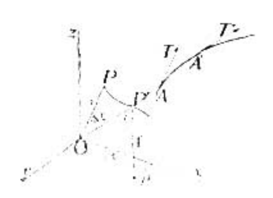
Si por un origen O trazamos vectores de módulo 1, paralelos a las tangentes a la curva, es decir, de componentes α, β, γ, o sea:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

se obtiene sobre la esfera una curva llamada *indicatriz de flexión*. Llamaremos $d\sigma$ a la diferencial de su arco que viene dada por la expresión:

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$$

El arco de circunferencia máxima PP'' mide el ángulo $\Delta\tau$ de las tangentes en A y A' y es un infinitésimo equivalente a la cuerda PP'', la cual es equivalente a la diferencial del arco $d\sigma$ de indicatriz (223); luego, según la definición de curvatura resulta:



$$[1] \qquad r_1 = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}$$

225. — Curvatura de torsión.

Se estudia, análogamente, mediante la *indicatriz* de torsión, obtenida llevando a partir de O vectores de módulo 1 paralelos a las binormales, o sea perpendiculares a los planos osculadores. Sus componentes, o sea las coordenadas de los puntos de la indicatriz, son los cosenos λ, μ, ν de la binormal, y llamando $d\sigma_2$ al elemento de arco de indicatriz se verifica:

$$d\,\sigma_2^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

Se llama *radio de curvatura de torsión*, o simplemente radio *de torsión* al límite del cociente del arco AA' por el ángulo de los planos osculadores $\Delta\tau_2$. La magnitud recíproca se llama *curvatura de torsión*, *o segunda curvatura*.

Como $\Delta\tau_2$ viene medido por el arco BB' de circunferencia, que es equivalente a la cuerda BB'; y ésta a $d\sigma_2$, resulta:

$$[2] \qquad r_2 = \frac{ds}{d\sigma_2} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}}$$

226. — Curvatura de la hélice.

Las ecuaciones paramétricas de la hélice cilíndrica son $x = r \cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, $z = kt$. Los cosenos: α, β, γ de la tangente son:

$$\frac{-r \operatorname{sen} t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}}.$$

Las diferenciales de estos cosenos son: $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$

$$\frac{-r \cos t \, . \, dt}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad \frac{-r \operatorname{sen} t \, . \, dt}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad d\gamma = 0$$

El radio de curvatura de flexión R es, por tanto:

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}} = \frac{\sqrt{r^2 + k^2}}{\sqrt{\dfrac{r^2}{r^2 + k^2}}} = \frac{r^2 + k^2}{r}$$

El radio de curvatura de flexión r_1 es, por tanto:

$$r_2 = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2}}$$

en donde λ, μ, ν son números proporcionales a los coeficientes del plano osculador, que para la hélice es: $(x - x_0)k \operatorname{sen} t - (y - y_0)k \cos t + (z - z_0)r = 0$.

$$\lambda = \frac{k \operatorname{sen} t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad \mu = \frac{-k \cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \; ; \quad \nu = \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2}}$$

$$\sqrt{d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2} \qquad \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} \, dt.$$

Luego:

$$r_2 = \frac{r^2 + k^2}{k}$$

Ambos radios de curvatura son constantes.

227. — Fórmulas directas para los radios de curvatura.

Las fórmulas dadas para el cálculo de los radios de curvatura tienen el inconveniente de exigir la derivación de los cosenos directores, que por contener raíces cuadradas suelen dar origen a largos cálculos. Veamos cómo se simplifican las fórmulas utilizando los coeficientes A, B, C del plano osculador. Designando por letras acentuadas las derivadas respecto de t, se tiene

$$r_1^2 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{x'}{s'}; \qquad \alpha' = \frac{x'' s' - x' s''}{s'^2}; \; \ldots\ldots$$

y análogamente se calculan β' y γ'. Teniendo en cuenta que

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad , \quad s' s'' = x' x'' + y' y'' + z' z''$$

Sumando los cuadrados de las fracciones que expresan α', β', γ' resulta con fácil simplificación:

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) =$$

$$= (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x' x'' + y' y'' + z' z'')^2$$

y utilizando la identidad de Lagrange (173) o bien por directa comprobación, puede escribirse así:

$$= (y' z'' - y'' z')^2 + (z' x'' - z'' x')^2 + (x' y'' - x'' y')^2$$

y llamando A, B, C a los coeficientes del plano osculador, resulta esta sencilla expresión:

$$r_1^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Con transformaciones análogas se llega asimismo a la fórmula cómoda y muy sencilla

$$r_2 = (A^2 + B^2 + C^2) : D$$

donde

$$D = Ax''' + By''' + Cz'''$$

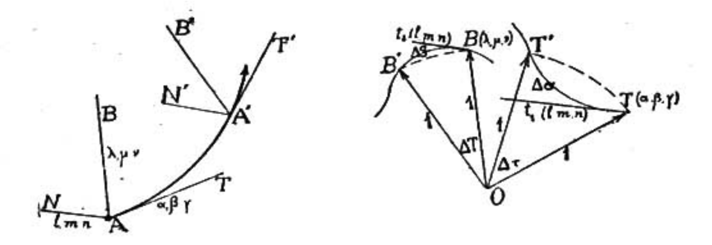
que también puede escribirse en forma de determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

228. — Fórmulas de Frenet o Serret.

El cálculo de los cosenos λ, μ, ν de la binormal se puede hacer como se indicó en (222), y diferenciando se obtiene rápidamente r_2, pero es preferible utilizar las fórmulas siguientes, de Frenet:

Para deducirlas estudiemos más detenidamente las indicatrices. Como el plano osculador puede determinarse como límite del



plano trazado por AT paralelo a $A'T'$, si se traza por O el plano paralelo resulta el TOT'; y su límite es el plano tangente en OT' al cono de la indicatriz; por tanto, la recta t tangente en T a esta in-

dicatriz, es paralela a la normal AN; luego los cosenos l, m, n de ésta son:

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad \frac{d\beta}{d\sigma}, \quad \frac{d\gamma}{d\sigma}$$

o bien, recordando [1] para eliminar $d\sigma$, resulta este primer grupo:

Grupo I.

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r_1}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{r_1}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{r_1}$$

Los cosenos l, m, n son, pues, proporcionales a las derivadas α' β' γ' respecto de s; propiedad que traduce la relación geométrica que hemos visto; y que permite calcular l, m, n dividiendo dichas derivadas por el factor de proporcionalidad, que es, justamente, la curvatura de flexión.

Puesto que las generatrices OB del 2.° cono son perpendiculares a los planos tangentes al 1.er cono (paralelos a los osculadores), recíprocamente, el plano tangente en OB al cono 2.° es perpendicular a la generatriz OT del 1.°; luego es paralelo al plano BN, normal en A a la curva. Por tanto, la tangente en B a la 2.ª indicatriz, por estar en ese plano tangente y ser perpendicular a OB, es paralela a AN, y sus cosenos son:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma_2}, \quad \frac{d\mu}{d\sigma_2}, \quad \frac{d\nu}{d\sigma_2}$$

y eliminando $d\sigma_2$ mediante [2] resulta el segundo grupo:

Grupo II.

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{r_2}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{r_2}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{r_2}$$

Como α, λ, l son los cosenos directores del eje x respecto del triedro intrínseco, se verifica:

$$\alpha^2 + \lambda^2 + l^2 = 1$$

$$\alpha\alpha' + \lambda\lambda' + ll' = 0$$

y sustituyendo α', λ' por sus valores I y II, y suprimiendo el factor l, queda la primera fórmula siguiente, y análogamente las otras:

Grupo III.

$$\frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{r_1} - \frac{\lambda}{r_2}; \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{\beta}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}; \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\gamma}{r_1} - \frac{\nu}{r_2}$$

Cuadrando y sumando, resulta esta relación entre las derivadas respecto de s, que permite calcular r_2, ya conocido r_1.
Fórmula IV.

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$$

que permite calcular T, ya conocido R.

229. — Círculo osculador y esfera osculatriz.

Entre las circunferencias tangentes a una curva en un punto A y situadas en el plano osculador, la que tiene por radio el de curvatura de flexión, se llama *círculo osculador* de la curva en el punto A y su centro se llama *centro de curvatura.*

Esta circunferencia, igual que en las curvas planas, resulta asimismo como límite de la circunferencia determinada por tres puntos de la curva que tienden a confundirse en A, y tiene contacto al menos de segundo orden, es decir, cortando por planos no paralelos a la tangente, la distancia entre los puntos de ambas curvas es infinitésimo de tercer orden por lo menos. La demostración puede verse en cualquier Geometría diferencial.

Se llama esfera *osculatriz,* al límite de la superficie esférica determinada por cuatro puntos de la curva, que tienden a confundirse en A. Por tanto, contiene al círculo osculador, que es su sección por el plano osculador.

La recta perpendicular al plano osculador en el centro de curvatura de A, se llama *recta polar* o *eje de curvatura* o eje del plano osculador ,correspondiente al punto A y en ella está asimismo el centro de la esfera osculatriz.

Si t_1, t_2, t_3, t_4 son los valores de t que determinan cuatro puntos de una curva, veamos la posición límite de la esfera que pasa por ellos, cuando tienden a confundirse en uno. Para ello formemos la *potencia* de un punto variable de la curva, o sea la función:

$$F(t) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2$$

siendo (a, b, c) las coordenadas del centro y r el radio. Como se verifica:

$$F(t_1) = F(t_2) = F(t_3) = F(t_4) = 0$$

la derivada $F'(t)$ se anula en tres puntos intermedios, la $F''(t)$ se anula en dos; la $F'''(t)$ en uno.

Si los cuatro puntos tienden a confundirse en uno, queda de-

terminada una esfera, que se llama *osculatriz* en éste, cuyo centro y radio están dados por las ecuaciones:

$$F(t) = 0 \quad , F'(t) = 0 \quad , \quad F''(t) = 0 \quad , \quad F'''(t) = 0$$

que, desarrolladas, son:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

$$(x - a)x' + (y - b)y' + (z - c)z' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + (x - a)x'' + (y - b)y'' + (z - c)z'' = 0$$

$$3(x'x'' + y'y'' + z'z'') + (x - a)x''' + (y - b)y''' + (z - c)z''' = 0$$

De las tres ecuaciones lineales se despejan $x - a$, $y - b$, $z - c$, y sustituídas en la primera, se obtiene r.

Si se adopta s como parámetro para expresar la curva, las derivadas x', y', z' son precisamente los cosenos α, β, γ; sus derivadas x'', y'', z'' vienen dadas por el grupo I de Frenet.

NOTA. — *Rectificación de curvas alabeadas.* La diferencia de módulos de dos vectores de origen 0 puede acotarse así:

[1] $$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2} \leq | a - a' | + | b - b' | + | c - c' |$$

en efecto: la diferencia no supera al tercer lado del triángulo, y este lado, como resultante de la poligonal formada por las diferencias de coordenadas, es menor que la suma de éstas. Tal acotación nos permitirá demostrar muy elementalmente la fórmula (223) calculando la diferencia entre la cuerda c y la diferencial ds

[2] $$\delta = c - ds = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} - \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

es decir, la diferencia de módulos de dos vectores, cuyas diferencias de coordenadas son en este caso, por el teorema del incremento finito:

$$\Delta x - dx = x'(\xi)dt - x'(t)dt = [x'(\xi) - x'(t)]\, dt$$

y análogamente las otras dos. Pero siendo continua la derivada $x'(t)$ (y análogamente las otras) este incremento entre paréntesis es menor que ε para todos los intervalos dt suficientemente pequeños, luego aplicando la acotación [1] a la diferencia [2] cada uno de los tres sumandos es menor que ε y por tanto resulta

$$| \delta | < 3\varepsilon\, dt \quad , \quad \Sigma c = \Sigma ds + \Sigma \delta \quad , \quad | \Sigma\delta | < 3\varepsilon(t_1 - t_0)$$

y como este número es arbitrariamente pequeño, las sumas Σc, Σds tienen igual límite, es decir, la longitud del arco viene expresada por la integral (223).

Obsérvese que se ha utilizado el teorema de Heine, de la continuidad uniforme.

EJERCICIOS

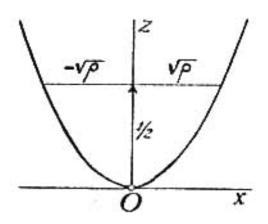
1. — Aplicar las fórmulas de Frenet a la hélice.
2. — Determinar la esfera osculatriz en cualquier punto de la hélice.

LECCIÓN 55

CURVATURA DE SUPERFICIES

230. — La indicatriz en un punto. Indicatriz de los paraboloides. Estudiar la curvatura de una superficie en un punto es conocer la curvatura de sus diversas curvas, que pasan por él. Prescindiendo de las alabeadas (cuya curvatura se demuestra ser igual a la de la sección plana producida por su plano osculador) el estudio de las secciones oblicuas se reduce muy sencillamente, como veremos en (233) al de las secciones normales. Para comparar la curvatura de las producidas por el haz de planos normales en O, ideó Dupin la gráfica siguiente.

DEFINICIÓN. — Dada una superficie cualquiera, si consideramos todas las secciones normales en un punto O de la misma, es decir, las curvas determinadas por los planos que pasan por la normal en O, y para cada curva llevamos sobre la tangente, a uno y otro lado, un segmento $r = \pm\sqrt{\rho}$ igual a la raíz cuadrada del radio de curvatura de dicha curva en el punto O, tenemos infinitos vectores cuyos extremos forman una curva llamada *indicatriz* de la superficie en el punto O.



Recordemos una sencilla propiedad de la parábola $x^2 = 2pz$.

Haciendo $z = \frac{1}{2}$ resulta $x = \sqrt{p}$ y como $p = \rho$ es el radio de curvatura en el vértice, tenemos un medio gráfico muy sencillo para construir $\sqrt{\rho}$.

Si la ecuación es $2z = Ax^2$, el coeficiente $A = {}^1/_p$ es la curvatura en el vértice.

Paraboloide elíptico. — Consideremos el paraboloide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

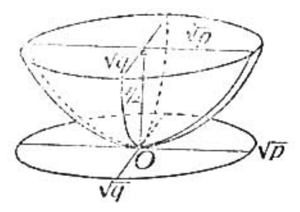
o bien $2z = Ax^2 + Cy^2$ y vamos a estudiar la curvatura de las diversas secciones producidas por los planos que pasan por el eje z.

Cada sección es una parábola que tiene O como vértice; el segmento $\pm\sqrt{\rho}$ se obtiene cortando dicha parábola por la secante trazada paralelamente a la tangente a distancia $\frac{1}{2}$ de ésta.

La indicatriz se obtiene, por tanto, cortando el paraboloide por el plano que dista $\frac{1}{2}$ del tangente, y trasladando dicha elipse sobre el plano xy; luego su ecuación es:

$Ax^2 + Cy^2 = 1$ o bien:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$$



Los radios principales son:

$$r_1 = p \quad , \quad r_2 = q$$

Paraboloide hiperbólico: $A > 0$, $C < 0$. — Considerando todas las secciones normales que pasan por el eje z, cada una corta en una parábola cuyo radio de curvatura se obtiene como antes se indicó.

Sobre la tangente en O a cada parábola llevamos en ambos sentidos el segmento $\sqrt{\rho}$. El lugar geométrico de los extremos de tales segmentos es la indicatriz de la superficie en el punto O.

Puesto que el número $\sqrt{\rho}$ correspondiente a cada parábola no es sino la ordenada de la parábola que dista $\frac{1}{2}$ del origen, si cortamos la superficie por el plano horizontal $z = \frac{1}{2}$, éste determinará sobre las parábolas dirigidas hacia arriba una hipérbola; y análogamente el plano $z = -\frac{1}{2}$ corta a las parábolas de curvatura negativa según otra hipérbola.

Trasladando paralelamente hasta el plano xy dichas dos secciones tenemos la indicatriz de la superficie. Esta indicatriz se compone, pues, de dos hipérbolas que tienen como asíntotas las dos generatrices de la superficie y situadas una en cada uno de los dos ángulos completos que dichas rectas forman.

Los semi-ejes de dichas hipérbolas corresponden a los radios de las dos secciones *principales* de la superficie. Estos radios se llaman radios principales de curvatura y sus valores son: $r_1 = p$, $r_2 = q$, si la ecuación del paraboloide es

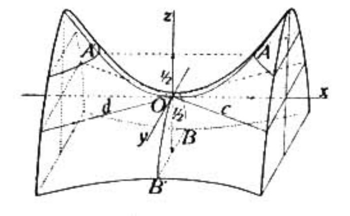
$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

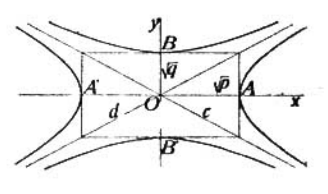
Las ecuaciones de estas hipérbolas resultan haciendo $z = \frac{1}{2}$, y $z = -\frac{1}{2}$ en la ecuación del paraboloide y son:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1; \qquad \frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 1$$

sus asíntotas son las rectas:

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}$$





EJEMPLOS. — Sean los paraboloides

$$z = 4x^2 + y^2 \quad ; \quad z = x^2 - 3y^2$$

Las indicatrices en el origen se obtienen inmediatamente haciendo $z = ½$ en la primera ecuación, y resulta la elipse

$$8x^2 + 2y^2 = 1$$

o bien $z = \pm ½$ en la segunda y resulta el par de hipérbolas conjugadas:

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad , \quad 3y^2 - x^2 = 1$$

Recordando que las curvaturas principales son las derivadas segundas, éstas son para el paraboloide elíptico $A = 8$, $C = 2$; para el hiperbólico, $A = 2$, $C = 6$.

Los radios principales son los recíprocos de estos números.

231. — Paraboloide osculador.

El plano tangente a una superficie en un punto es una primera aproximación de esta superficie en el entorno de ese punto.

Pasemos ahora a obtener una segunda aproximación, tomando un término más avanzado en el desarrollo de Taylor.

Limitando éste en los términos de segundo grado, prescindiendo del término complementario, resulta una superficie:

$$z = f(a,b) + h\,f'_x(a,b) + k\,f'_y(a,b) +$$
$$+ ½\,h^2 . f''_{xx}(a,b) + h\,k\,f''_{xy}(a,b) + ½\,k^2 . f''_{yy}(a,b)$$

que representa una cuádrica, puesto que es de segundo grado en las coordenadas h, k. La diferencia entre las coordenadas z de la superficie y de esta cuádrica es del tercer orden, y por eso se llama *paraboloide osculador* en el punto A.

Cortando por cualquier plano vertical resultan dos curvas cuya diferencia de ordenadas es de tercer orden, es decir: las curvas tienen un contacto de segundo orden, y, por tanto, la misma curvatura. Por esto, para estudiar la curvatura de la superficie en un punto, basta considerar su paraboloide osculador.

Para mayor comodidad en el estudio de la superficie en un punto suele tomarse como plano xy el tangente en ese punto; entonces las derivadas en $(0,0)$ son: $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. La ecuación de la cuádrica osculatriz, llamando A, B, C a las derivadas, es:

$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

que representa un paraboloide. Sus dos generatrices rectilíneas en el punto O vienen dadas por la ecuación:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

Las bisectrices del ángulo de estas generatrices son las direcciones principales del paraboloide, es decir, las secciones del plano tangente con los dos planos principales, que también se llaman *direcciones principales de la superficie.*

Si las adoptamos como ejes x e y, debe reducirse B a 0, para que los valores de y correspondientes a cada valor de x sean iguales y de signo contrario, y la ecuación de la superficie adopta la forma:

$$2z = Ax^2 + Cy^2 + Dx^3 + Ex^4 + \dots$$

y el paraboloide osculador: $2z = Ax^2 + Cy^2$.

232. — Indicatriz de una superficie cualquiera.

Primer caso; punto elíptico: $H = AC > 0$. Entonces tienen A y C el mismo signo; el paraboloide es elíptico. Todas las secciones normales de la superficie tienen la curvatura en el mismo sentido. La ecuación de la indicatriz según hemos demostrado en (230) resulta haciendo $z = 1/2$ y es: $Ax^2 + Cy^2 = 1$, siendo $A = f''_{xx}$, $C = f''_{yy}$. Sus recíprocos son los radios principales: $r_1 = 1/A$, $r_2 = 1/C$.

En un punto elíptico todas las secciones principales tienen la curvatura dirigida en el mismo sentido; y comprendida entre los valores $f''_{xx}(0,0)$ y $f''_{yy}(0,0)$. La indicatriz es una elipse.

En particular, cuando es $r_1 = r_2$ todos los radios son iguales; la indicatriz es una circunferencia. El punto se llama *umbílico* o también *cíclico.*

Segundo caso; punto hiperbólico: $H = AC < 0$. Puesto que A y C tienen signos opuestos, el paraboloide es hiperbólico; las dos

generatrices son simétricas. Para todas las secciones trazadas en uno de los ángulos de dichas rectas la curvatura está dirigida en un sentido y para el otro ángulo en sentido opuesto.

La indicatriz se compone de dos hipérbolas con las mismas asíntotas. Las direcciones de éstas se llaman *direcciones asintóticas* de P.

Los radios oscilan en los intervalos (r_1, ∞) (r_2, ∞) siendo r_1 y r_2 los recíprocos de las curvaturas principales A y C.

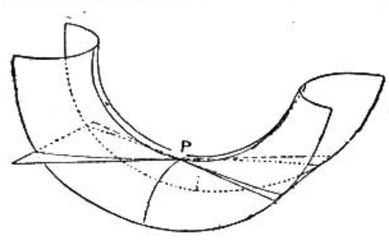
Ecuación de la indicatriz.

Punto elíptico

$$\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} = 1$$

Punto hiperbólico:

$$\frac{x^2}{r_1} - \frac{y^2}{r_2} = 1$$



Fórmula de Euler. — Para la dirección ω es $x = r \cdot \cos\omega$, $y = r \cdot \operatorname{sen}\omega$, luego resulta:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\omega}{r_1} \pm \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{r_2}$$

Tercer caso; punto parabólico: $H = AC = 0$. Entonces debe ser $A = 0$ o bien $C = 0$. Suponiendo por ejemplo $A = 0$, la cuádrica se reduce a $2z = Cy^2$ que representa un cilindro parabólico tangente al plano xy a lo largo del eje x.

La indicatriz se reduce entonces a dos rectas paralelas simétricas respecto de la generatriz.

Como el parámetro de la parábola $Cy^2 = 2z$, sección principal por el plano zy, es $1/C$, el radio de curvatura principal es $r_1 = 1/C$, luego las dos rectas que forman la indicatriz distan $1/\sqrt{C}$ del eje x.

233. — Teorema de Meusnier.

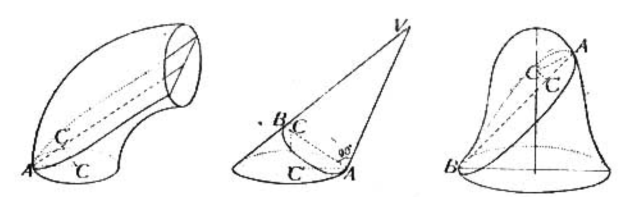
Así como en cada punto de una superficie hay un paraboloide osculador que tiene la misma curvatura en cada sección normal, así hay para cada recta tangente a la superficie una esfera osculatriz tal que las secciones producidas en ella por los planos que pasan por dicha tangente son los círculos osculadores de las secciones producidas en la superficie.

Para estudiar la curvatura de las secciones trazadas por una tangente, se puede sustituir la superficie por su esfera osculatriz.

En ésta se verifica que el centro de cualquier sección oblicua es la proyección sobre su plano del centro de la sección normal; aplicado esto a la superficie dada, resulta el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en las Notas.

El centro de curvatura en el punto P de una sección oblicua es la proyección sobre su plano, del centro de curvatura de la sección normal que tiene la misma tangente.

Así, por ejemplo, en una superficie de revolución, como el centro de curvatura de cada paralelo es la intersección de su plano con el eje, en este eje está el centro de curvatura de la sección normal trazada por una tangente cualquiera de dicho paralelo.



Las figuras indican el doble uso del teorema. En la 1.ª, que tiene secciones normales circulares, se ha determinado el centro C' de una sección oblicua perpendicular al plano de simetría; en la 2.ª, que es un cono oblicuo, de base circular, se ha determinado el centro C de aquella sección normal en el punto A, que además es perpendicular al plano de simetría; en la 3.ª, que es una superficie de revolución, se ha determinado el centro C' de una sección oblicua cualquiera en el punto A de intersección con el meridiano cuyo plano es perpendicular a ella.

234. — Líneas de curvatura, geodésicas y asintóticas.

Las ecuaciones de la normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ son:

$$x - x_0 = -p_0(z - z_0)$$
$$y - y_0 = -q_0(z - z_0)$$

siendo p_0 y q_0 las derivadas de z respecto de x y de y en el punto A; si el punto A describe una curva sobre la superficie, es decir, $y = \alpha(x)$, son funciones de x las coordenadas x_0, y_0, z_0 y también p_0, q_0; ambas ecuaciones definen la superficie reglada (llamada *normalía*) que forman las normales a la superficie en los puntos de esa curva $y = \alpha(x)$. Cuando las normales en los puntos de una curva forman superficie desarrollable, dicha curva se llama *línea de curvatura* de la superficie dada. Pronto se verá la ecuación que caracteriza a las superficies desarrollables.

EJEMPLOS. — *Todas las líneas trazadas en un plano son de curvatura*, puesto que las normales forman un cilindro. También son de curvatura todas las líneas trazadas sobre una esfera, puesto que las normales forman un cono. En las superficies de revolución son líneas de curvatura los meridianos, pues las normales forman un plano; y también los paralelos, puesto que las normales forman un cono.

Problema análogo al de las líneas de curvatura, pero muy distinto, es el de encontrar sobre una superficie curvas tales que las normales a la superficie sean normales principales de la curva; estas curvas son las de longitud mínima entre todas las que se *pueden trazar sobre la superficie y se llaman geodésicas; su* determinación es objeto del Cálculo de variaciones.

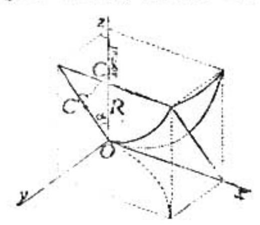
En la superficie esférica las líneas geodésicas son los arcos de circunferencia máxima; en los cilindros y en general en las superficies desarrollables, son las que tienen como transformadas líneas rectas.

Se llaman *curvas asintóticas* de una superficie aquellas en que la dirección de la tangente en todo punto es asintótica. Toda recta de una superficie es, pues, línea asintótica.

NOTAS

Demostración del teorema de Meusnier

Para estudiar la curvatura de las curvas trazadas sobre una superficie $z = f(xy)$ por uno de sus puntos, adoptemos éste como origen y su plano tangente como xy, sustituyendo la superficie por su paraboloide osculador:



$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

El plano que pasa por el eje x, y forma el ángulo α con el xz, tiene la ecuación $z = \lambda y$, siendo $\lambda = \operatorname{ctg} \alpha$; corta a la superficie en una curva cuya proyección sobre el plano xy

$$2\lambda y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2;$$

la curvatura de ésta en O es y'' (por ser $y' = 0$) y como para $x = 0$ es evidente $y'' = A : \lambda$, ésta es la curvatura de dicha proyección; y la curvatura de la curva proyectada se deduce dividiendo por sen α, y resulta: $A : \cos \alpha$. El radio de curvatura de dicha curva sección es, por tanto, $\cos \alpha : A = R . \cos \alpha$, llamando $R = 1 : A$ al radio de la sección normal, que corresponde al valor $\alpha = 0$.

El teorema de Meusnier queda así demostrado.

Otra definición de la indicatriz. — Si en la ecuación de la superficie

$$2z = Ax^2 + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + \dots .$$

hacemos $z = h$, obtenemos como sección de la superficie la curva

$$2h = Ax^2 + Cy^2 + \dots . \quad \text{o aproximadamente:} \quad 2h = Ax^2 + Cy^2$$

despreciando los términos siguientes, que son infinitésimos superiores en el entorno del origen. Comparada esta curva con la indicatriz $1 = Ax^2 + Cy^2$ son curvas semejantes; por tanto:

Las secciones de la superficie por planos paralelos al tangente en un punto son curvas sensiblemente semejantes a la indicatriz en ese punto.

Curvatura total en un punto de una superficie. — Se llama así al producto de las dos curvaturas principales. Este número tiene un significado análogo al de la curvatura plana; en efecto, dada una región σ de superficie, entorno de un punto P, si por un punto 0 se trazan rayos paralelos a las normales en el contorno de σ, forman un cono cuya amplitud (medida sobre la esfera de radio 1) es una cierta área τ; el límite del cociente τ/σ, al tender σ a cero, es precisamente la curvatura total en el punto P.

Como se ve, esta amplitud τ del ángulo cónico de las normales viene a sustituir al ángulo de contingencia τ de las curvas planas, formado por las tangentes normales en los extremos del mismo.

Es condición necesaria para que dos superficies sean aplicables una sobre otra sin distensión, que tengan la misma curvatura total en cada punto.

Si la superficie es desarrollable, es decir, aplicable sobre un plano, su curvatura total es la misma del plano, esto es, nula; resultado que se ve directamente porque para ellas el área τ es nula, porque la indicatriz de curvatura total se reduce a una curva, cualquiera que sea la porción elegida σ.

Curvatura media de una superficie en un punto. — Es el promedio de las curvaturas principales en dicho punto, es decir:

$$c = \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2)$$

Son interesantes las superficies que tienen nula su curvatura media en cada punto, es decir: $r_1 = - r_2$; son las *superficies de área mínima*, esto es, las de menor área que cualquier otra superficie limitada por el mismo contorno. Se construyen sumergiendo éste, construido de alambre, en un líquido gelatinoso, que forma una película de área mínima en el contorno dado.

Si se desea obtener superficies de revolución que tengan esta propiedad, el radio de curvatura de la meridiana en cada punto debe ser igual y opuesto al otro radio principal que es el segmento de normal limitada por el eje; la curva que tiene esta propiedad es la catenaria; al girar alrededor de su recta base engendra una superficie de área mínima, que es la única de revolución que tiene esta propiedad.

EJERCICIOS

1. — Demostrar que el centro de curvatura de la sección de una superficie de revolución en los puntos de contacto con los paralelos que le son tangentes, es la intersección del plano secante con el eje de la superficie.

2. — Construir la indicatriz en un punto cualquiera del toro. Obsérvese para ello que en toda superficie de revolución, una sección principal es la meridiana, por razón de simetría y la otra le es perpendicular.

3. — Demostrar que la suma de curvaturas de cada dos secciones normales a la superficie en 0, perpendiculares entre sí, es constante, igual por tanto, a la suma de curvaturas principales.

CORRESPONDENCIAS Y REPRESENTACION DE SUPERFICIES

235. — Representación paramétrica de superficies.

De igual modo que una curva se expresa paramétricamente como transformada de un segmento, cada superficie se define como imagen de una región de plano.

Si una superficie se da en forma paramétrica:

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

el elemento de arco ds de una línea trazada sobre la superficie, viene expresado por la fórmula:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y sustituyendo las diferenciales:

$$dx = x'_u . du + x'_v . dv$$

$$dy = y'_u . du + y'_v . dv$$

$$dz = z'_u . du + z'_v . dv$$

resulta una expresión del tipo:

$$ds^2 = E . du^2 + 2F . du . dv + G . dv^2$$

cuyos coeficientes (que suelen llamarse de Gauss) son funciones de u, v:

$$E = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u$$

$$F = x'_u . x'_v + y'_u . y'_v + z'_u . z'_v$$

$$G = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v$$

A lo largo de una curva $v =$ const la tangente en cada punto tiene como coeficientes directores las tres derivadas de x, y, z, respecto de u; y la tangente en cualquier punto a una curva $u =$ const. tiene como coeficientes directores las derivadas respecto de v.

Si en un punto de la superficie se anula la función F, como ésta es la suma de productos de los coeficientes directores de las dos curvas $u =$ const., $v =$ const. que pasan por ese punto, ambas son ortogonales. Si es $F = 0$ idénticamente, las familias de curvas $u =$ const. $v =$ const. son *ortogonales*, es decir, las de cada sistema cortan a las del otro perpendicularmente.

Ejemplo. — La ecuación de una superficie de revolución de eje z está determinada por la meridiana $z = f(x)$; y como al girar en torno del eje, la x se convierte en r, las coordenadas de un punto cualquiera son:

$$x = r.\cos\alpha \quad , \quad y = r.\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad z = f(r)$$

Los dos parámetros son aquí r y α; las curvas $r = c$ son los paralelos; las $\alpha = c$ son los meridianos.

Los coeficientes de Gauss son:

$$E = 1 + f'^2; \qquad F = 0; \qquad G = r^2.$$

La anulación idéntica de F indica la ortogonalidad de meridianos y paralelos.

Ejemplo. — Para la esfera son más convenientes las coordenadas esféricas: longitud λ y latitud φ.

Las ecuaciones paramétricas de la esfera de radio R son:

$$x = R.\cos\varphi.\cos\lambda \qquad y = R.\cos\varphi.\operatorname{sen}\lambda \qquad z = R.\operatorname{sen}\varphi.$$

y los coeficientes de Gauss son:

$$E = R^2 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = R^2.\cos^2\varphi$$

Nota. — Por el significado gravitacional que en la teoría de la Relatividad adquieren los coeficientes de la forma diferencial que expresa ds^2, se acostumbra a designar los coeficientes de Gauss: E, F y G por g_{11}, g_{12}, g_{22}.

236. — Plano tangente.

El plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) determinado por los valores $u = u_0$, $v = v_0$, tiene por ecuación

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_{u0} & y'_{u0} & z'_{u0} \\ x'_{v0} & y'_{v0} & z'_{v0} \end{vmatrix} = 0$$

En efecto, este plano pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ puesto que el determinante se anula al sustituir $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Además, todos los puntos de la tangente en A a la curva $v = v_0$ están en ese plano, puesto que las diferencias de coordenadas $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, son proporcionales a las derivadas: x'_u, y'_u, z'_u.

También se anula el determinante en todos los puntos de la tangente a la curva $u = u_0$; luego ese plano es el tangente en A.

237. — Representación plana de superficies.

Una *correspondencia* o *representación* entre una superficie:

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

y un plano (X, Y), viene definida por una correspondencia biunívoca entre los pares (X, Y) y (u, v); cada ley de correspondencia da un sistema de representación.

EJEMPLO. — Establezcamos entre las coordenadas geográficas φ, λ, de la superficie esférica y las coordenadas X, Y del plano la correspondencia

$$X = a\lambda \quad , \quad Y = a \operatorname{sen} \varphi$$

Esta proyección se llama cilíndrica y equivale a proyectar sobre el cilindro circunscrito al Ecuador, mediante los planos de los meridianos y de los paralelos.

Si la correspondencia entre los puntos (u, v) de la superficie y los (X, Y) del plano cumple la condición:

$$E.du^2 + 2F.du.dv + G.dv^2 = \mu(dX^2 + dY^2)$$

siendo μ una función de las coordenadas, resulta que los elementos de arco que pasan por un punto son proporcionales a sus homólogos; esa razón es la *dilatación lineal* que es constante en cada punto, pero varía con éste.

Un triángulo ABC y su homólogo $A'B'C'$ tienen, pues, lados que tienden a ser proporcionales al tender a confundirse los tres vértices, en un solo punto; y sus ángulos homólogos tienden, por tanto a ser iguales. Es decir: el ángulo de dos curvas cualesquiera trazadas sobre la superficie es igual al de sus curvas homólogas. Esto se expresa diciendo que la transformación o la *correspondencia* es *conforme*.

EJEMPLO. — No es conforme la proyección cilíndrica definida en el ejemplo anterior, pues si se forma el elemento de arco en el plano ,no es proporcional al de la esfera cuya expresión, según se vió, es:

$$ds^2 = R^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi . d\lambda^2)$$

Conservando la función $X = a\lambda$, es decir, representando los meridianos por rectas paralelas equidistantes, ¿cómo deben representarse los paralelos por rectas paralelas de modo que la correspondencia sea conforme?

Es decir, veamos qué función $Y = a.f(\varphi)$ conviene elegir para representar los paralelos, o sea, cómo deben espaciarse para que en cada punto la dilatación sea la misma en ambas direcciones perpendiculares. La dilatación a lo largo del paralelo es $a : R \cos \varphi$, lo cual resulta de las fórmulas anteriores, o bien directamente, por ser $R \cos \varphi$ el radio del paralelo; será, pues, necesario, que se verifique también a lo largo del meridiano:

$$a.f'(\varphi) : R = a : R \cos \varphi$$

o sea $f'(\varphi) = 1 : \cos \varphi$.

La función buscada es, pues, la primitiva de la sec φ, que se calcula fácilmente como ejercicio de integración y vale:

$$f(\varphi) = l \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

He aquí, en definitiva, las ecuaciones que definen la proyección de Mercator, usada exclusivamente en las cartas marinas:

$$X = a\lambda \quad ; \quad Y = a\, l \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

donde a es la anchura del mapa, o sea el segmento que representa al ecuador; en cambio la altura es infinita, como se ve haciendo $\varphi \to \tfrac{1}{2}\pi$.

238. — Superficies aplicables.

Si el factor μ de la representación conforme se reduce a 1, es decir, si el elemento de arco en la superficie y en el plano son iguales, aquélla se dice *aplicable* sobre el plano; se demuestra en Geometría diferencial que las superficies aplicables sobre el plano son las desarrollables.

Más general: dos superficies que, mediante elección conveniente de los parámetros (u, v) tienen iguales los coeficientes de Gauss, E, F, G, tienen iguales los elementos correspondientes de arco y se dicen *aplicables* una sobre otra.

En efecto, en ambas es igual la expresión de ds, es decir, los arcos homólogos tienen igual longitud: Si suponemos las superficies formadas de corpúsculos iguales, en arcos homólogos habrá igual número de ellos y dispuestos en el mismo orden, luego de una disposición se pasa a la otra sin alterar las longitudes; tal transformación se llama una *deformación*.

EJEMPLO. — Sea el cilindro de generatrices paralelas al eje z:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z.$$

Adoptando como parámetros t y z, resulta:

$$E = x'^2 + y'^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1.$$

Si en el plano XZ introducimos las coordenadas curvilíneas

$$X = f(t) \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = Z,$$

resulta:

$$E = f'(t)^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = 1$$

luego ambas son aplicables entre sí, a condición de que se adopte

$$f'(t)^2 = x'^2 + y'^2.$$

Esto equivale a desarrollar el cilindro conservando las generatrices paralelas al eje Z, llevando como abscisas $X = f(t)$ las longitudes de los arcos de las secciones rectas, a partir de una generatriz inicial.

Si el cilindro es oblícuo:

$$x = p.z + x(t)$$
$$y = q.z + y(t)$$

se puede tomar $X = f(t)$, pero $Z = \varphi(t, z)$ y resulta:

$$E = f'^2 = x'^2 + y'^2$$
$$F = \varphi' . \varphi'_z = px' + qy'$$
$$G = \varphi_z'^2 = p^2 + q^2 + 1$$

de donde se despejan φ'_t, φ'_z, f', y de ellas se deducen por integración las funciones φ, f.

Si p y q son funciones de t, es decir, para una superficie reglada cualquiera, habrá que tomar $X = f(t, z)$, $Z = \varphi(t, z)$.

NOTA. — Gauss demostró que la igualdad de coeficientes E, F, G lleva consigo la igualdad de ciertos elementos no lineales de las superficies; por ejemplo, la *curvatura total* (pág. 272) se expresa mediante E, F, G, luego: dos superficies aplicables tienen igual curvatura total en cada par de puntos homólogos.

SUPERFICIES REGLADAS

239. — Superficies regladas en general.

La definición (235) de las superficies como transformadas continuas del plano es análoga a la dada para las curvas; pero, la generación por movimiento de un punto no es aplicable a las superficies. Veamos un tipo especial en que cabe una generación análoga.

Se llama *superficie reglada* a la engendrada por una recta que se mueve. El concepto de movimiento equivale a variación en función continua de un parámetro t. Sean, pues, las ecuaciones de la recta generatriz:

$$x = pz + a \qquad\qquad y = qz + b$$

donde p, q, a, b, son funciones continuas de t. Si se desea la ecuación ordinaria, hay que eliminar t entre ambas; pero es preferible la expresión paramétrica, bastando agregar como tercera ecuación $z = z$, y así se tienen las coordenadas (x, y, z) del punto de la superficie como funciones de los dos parámetros z, t.

La ecuación del plano tangente se obtiene como se explicó en la lección anterior

$$\begin{vmatrix} x - pz_0 - a & y - qz_0 - b & z - z_0 \\ p & q & 1 \\ p'z_0 + a' & q'z_0 + b' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

donde las letras acentuadas indican derivadas respecto de t. Esta ecuación se simplifica sumando a la primera fila la segunda multiplicada por z_0

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z \\ p & q & 1 \\ p'z_0 + a' & q'z_0 + b' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

o sea, descomponiendo el determinante en suma de dos:

$$Pz_0 + Q = 0 \qquad [1]$$

donde:

$$P = \begin{vmatrix} x-a & y-b & z \\ p & q & 1 \\ p' & q' & 0 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} x-a & y-b & z \\ p & q & 1 \\ a' & b' & 0 \end{vmatrix}$$

o sea, desarrollados:

$$P = p'(y - b - qz) - q'(x - a - pz)$$
$$Q = a'(y - b - qz) - b'(x - a - pz)$$

Para cada generatriz es t constante; y al variar z_0, es decir, al moverse el punto a lo largo de la generatriz, el plano [1] forma un haz, cuya arista es la recta $P = 0$, $Q = 0$, que no es sino la misma generatriz.

Sólo hay un caso en que el plano no gira; cuando sea idénticamente $P = 0$, o más en general $P = \lambda Q$ (siendo λ constante); la superficie se llama *desarrollable* y el plano tangente en cada punto de una generatriz es el mismo, que se llama tangente *a lo largo de la generatriz.*

EJEMPLO. — Sean a, b, p, q funciones lineales de t; eliminando t resulta una ecuación de segundo grado, que representa una cuádrica.

Sea, por ejemplo:

$$x = tz + 2t + 1 \quad , \quad y = (t - 1)z - 3t$$

y la cuádrica que definen tiene la ecuación:

$$\frac{x-1}{y+z} = \frac{z+2}{z-3}$$

o sea, reducida a forma entera:

$$(x-1)(z-3) = (y+z)(z+2)$$

240. — Superficies desarrollables.

Una superficie reglada se llama *desarrollable*, cuando el plano tangente en cada punto lo es en todos los puntos de la generatriz; o sea, cuando el plano [1] no depende de z_0. Fijado t, es decir, elegida una generatriz hay tres casos singulares:

1.° Si $P \equiv 0$, debe ser $p' = 0$, $q' = 0$, *o sea: p y q son constantes*; todas las generatrices son paralelas y la superficie es *cilíndrica.*

2.° Si $Q=0$, debe ser $a'=0$, $b'=0$, es decir: a y b constantes; todas las generatrices pasan por el punto $(a, b, 0)$ luego la superficie es *cónica*.

3.° Si $P=\lambda Q$, es decir, si $p'b'=q'a'$

Este caso comprende a los anteriores como casos particulares, y ésta es la condición que caracteriza las superficies desarrollables.

Una curva sobre la superficie está determinada por una ecuación de condición $z=$ función de t; entonces son x, y, z funciones de t y queda determinada la curva. Entre ellas hay una que es tangente a todas las generatrices; para ello basta que sea:

$$\frac{x'}{p}=\frac{y'}{q}=\frac{z'}{1}$$

o sea:

$$\frac{p'z+pz'+a'}{p}=\frac{q'z+qz'+b'}{q}=\frac{z'}{1}$$

que, simplificadas, se reducen a:

$$p'z+a'=0 \qquad q'z+b'=0$$

o sea:

$$z=-a'/p'=-b'/q' \tag{2}$$

que dan la misma función de t, por la condición supuesta:

$$p'b'=q'a'$$

La función [2] representa, pues, la curva tangente a todas las generatrices, la cual se llama *arista de retroceso* de la superficie.

Recíprocamente: las rectas tangentes a una curva alabeada cualquiera cumplen estas condiciones sucesivas y por tanto la $p'b'=q'a'$, luego forman una superficie desarrollable.

241. — Línea de estricción; plano central; parámetro.

Consideremos una generatriz, por ejemplo, la que corresponde a $t=0$, y adoptada como eje z, deben anularse para $t=0$ las funciones a, b, p, q. Si damos a t otro valor, tenemos otra generatriz y la mínima distancia se obtendrá trazando un plano horizontal $z=z_0$, tal que los coeficientes directores de la secante común, o sean

$$pz_0+a \quad , \quad qz_0+b \quad , \quad 0$$

y los coeficientes directores de la generatriz ,o sean p, q, 1, cumplan la condición de perpendicularidad:

de donde resulta la ordenada z_0 del pie de la mínima distancia, o sea:

$$-\frac{ap+bq}{p^2+q^2}.$$

Si dividimos por t cada letra y hacemos $t \to 0$, resulta el valor límite:

$$z_1 = -\frac{a'p'+b'q'}{p'^2+q'^2}$$

Este punto límite del pie de la mínima distancia a otra generatriz (o dicho brevemente: pie de la mínima distancia a la generatriz infinitamente próxima) se llama *punto central* de la generatriz. El lugar de los puntos centrales de todas las generatrices, se llama *línea de estricción* de la superficie.

Obsérvese que si la superficie es desarrollable, este valor z_1 coincide con el [2], es decir: *En las superficies desarrollables la línea de estricción es la arista de retroceso.*

El plano tangente en el punto central de una generatriz se llama *plano central.*

Adoptemos el punto central del eje z como origen, y el plano central como xz. Como la ordenada del punto central debe ser nula, se verifica:

$$a'p' + b'q' = 0$$

y como la ecuación del plano tangente se reduce a $y = 0$, debe ser $b' = 0$; pero $a' \neq 0$, si la superficie no es desarrollable, luego también $p' = 0$, para $t = 0$, es decir, en todos los puntos de la generatriz.

La ecuación del plano tangente en el punto z_0 se reduce, pues, a ésta:

$$q'z_0x = a'y$$

luego: *La pendiente $y:x$ del plano tangente sobre el plano central es proporcional a la distancia z_0 del punto de contacto al punto central O.* (Teorema de CHASLES).

El número $k = a'/q'$ se llama *parámetro de distribución* de la generatriz, y la relación anterior se puede escribir: $z_0 = k \cdot \text{pend.}$

Si k es nulo o infinito, es decir, nulos a' o q', la superficie es desarrollable, y cesa la propiedad, puesto que el plano tangente es el mismo a lo largo de toda la generatriz.

EJERCICIO. — Expresar el hiperboloide alabeado redondo en la forma (239) y calcular el punto central y el parámetro de distribución.

ENVOLVENTES DE CURVAS Y SUPERFICIES

242. — Envolventes de un haz de curvas planas.

Envolvente de un haz de curvas planas es una curva formada por los puntos de contacto con todas ellas.

Sea $F(x, y, c) = 0$ la ecuación del haz; derivando respecto del parámetro c resulta:

$$F(x, y, c) = 0 \quad , \quad F'_c(x, y, c) = 0$$

$$\text{y eliminando } c \text{ sale} \quad \Psi(x, y) = 0 \qquad [1]$$

que es la envolvente buscada, como vamos a demostrar. En efecto, la eliminación puede ponerse de manifiesto expresando c como función $c(x, y)$ sacada de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera. Es decir:

$$F[x, y, c(x, y)] = 0 \qquad [2]$$

Sea x_0, y_0 un punto de esta curva, es decir:

$$F[x_0, y_0, c(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{y pongamos} \quad c_0 = c(x_0, y_0)$$

la curva $F(x, y, c_0) = 0$ del haz, pasa, pues, por dicho punto (x_0, y_0); las pendientes y' de las tangentes en ese punto a esta curva y a la envolvente [2], se obtienen derivando en dicho punto y resulta:

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0$$

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_c(c'_x + c'_y \cdot y') = 0$$

y como $F'_c = 0$, ambas tangentes son la misma; luego en efecto, la curva [1] o lo que es lo mismo [2] es la envolvente buscada.

EJEMPLO 1. — Sea la familia de curvas, ya considerada:

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

Derivando respecto del parámetro a, sale:

$$-2(x - a) = 0 \quad \text{y eliminando } a\text{, sale} \quad y^2 = 1; \quad y = \pm 1$$

Estas dos rectas componen la envolvente y, por tanto, $y = \pm 1$ es la integral singular de la ecuación diferencial del haz.

NOTA. — Cuando son dos los parámetros ,ligados por una ecuación, conviene diferenciar ambas ecuaciones, como se indica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. — Para obtener la integral singular de la ecuación de Clairaut estudiada en (297), o sea la envolvente de las rectas:

$$x/a + y/b = 1 \qquad \text{siendo} \qquad a^2 + b^2 = k^2$$

diferenciando ambas respecto de a, b, e igualando los cocientes db/da, resulta:

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{x}{a^3} = \frac{y}{b^3} \qquad \frac{x/a}{a^2} = \frac{y/b}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

de donde: $a^3 = x.k^2$, $b^3 = x.k^2$

y eliminando a, b, resulta la ecuación que representa una *astroide*.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (astroide)$$

243. — Envolventes de superficies.

Consideremos una superficie móvil; o más general, una familia de superficies con un solo parámetro t. He aquí dos superficies que tienden a confundirse para $h \to 0$:

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad f(x, y, z, t + h) = 0$$

para los puntos de intersección se verifican ambas, y por tanto, se verifica también, por el teorema de Rolle

$$f'_t(x, y, z, \xi) = 0 \qquad (\xi \text{ entre } t \text{ y } t + h)$$

Si $h \to 0$, también $\xi \to t$, luego la curva límite de la intersección satisface a la ecuación

$$f'_t(x, y, z, t) = 0$$

y el lugar de estas curvas, llamadas características, se llama *envolvente* de las superficies; su ecuación se obtiene *eliminando el parámetro t entre la ecuación de la superficie y de su derivada respecto del parámetro.*

Sea el plano móvil

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde A, B, C, D son funciones de t; la envolvente se obtiene eliminando t entre esta ecuación y la

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

pudiendo demostrarse que esta superficie es desarrollable.

Si además se agrega la ecuación

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

las tres definen una curva, que es la arista de retroceso.

Consideremos ahora una familia de superficies doblemente infinita, es decir, con dos parámetros

$$f(x, y, z, u, v) = 0$$

Con razonamiento análogo resulta: *la ecuación de la envolvente se deduce eliminando los parámetros u, v, entre ella y sus derivadas* f'_u, f'_v.

En este caso no hay curvas características, sino *puntos característicos*, es decir, puntos límites de las intersecciones de tres superficies próximas, y la envolvente es el lugar de esos puntos, teniendo común con cada superficie generatriz, no una curva, sino un punto, en general.

EJEMPLOS. — Planos $Ax + By + Cz = 1$
cuyos coeficientes cumplen la condición

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 : r^2$$

Los parámetros independientes son dos, y en vez de derivar, conviene diferenciar:

$$x.dA + y.dB + z.dC = 0$$
$$A.dA + B.dB + C.dC = 0$$

Si B es constante, resulta: $Cx = Az$
" A " " " $Cy = Bz$.

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{r^2}{1}$$

Despejando A, B, C de las tres ecuaciones lineales y sustituyendo en la cuadrática, resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

pues los planos dados distan de O la longitud r, y la envolvente debe ser una superficie esférica, que sólo tiene común un punto con cada plano generador.

Vamos a estudiar las superficies envolventes de los tres planos del triedro intrínseco de una curva.

El plano determinado por la tangente y la binormal se llama *plano rectificante*, y envuelve una superficie llamada *rectificante* de la curva dada, porque al desarrollarla sobre un plano, la curva dada se convierte en recta. La curva es, por tanto, geodésica de la superficie rectificante. Esto es consecuencia de ser la normal a esta superficie la normal principal de la curva (por ser trirrectángulo el triedro) propiedad que caracteriza a las geodésicas.

El plano normal envuelve una superficie desarrollable que se llama *polar* de la curva dada; sus rectas generatrices son precisa-

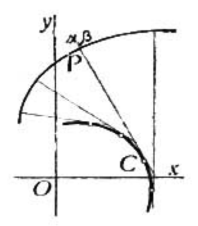
mente las rectas polares ya definidas, o sea las perpendiculares a los planos osculadores en sus centros de curvatura; el centro de la esfera osculatriz, asimismo situado en cada generatriz, es precisamente el punto de contacto con la arista de retroceso. Resulta, pues, que *la arista de retroceso de la superficie polar es el lugar de los centros de las esferas osculatrices.*

244. — Evolutas y evolventes de curvas planas.

Se llama *evoluta* de una curva $y = f(x)$ a la envolvente del haz de rectas normales en todos los puntos de la curva. La ecuación de la normal en el punto (α, β) es

$$x - \alpha + y'(y - \beta) = 0$$

siendo $\beta = f(\alpha) \qquad y' = f'(\alpha)$



derivando respecto del parámetro α resulta:

$$-1 + y''(y - \beta) - y'^2 = 0$$

de donde $$y - \beta = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

y de la ecuación primera sale:

$$x - \alpha = -y' \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

En vez de eliminar α, puede dejarse como parámetro, y resulta la envolvente (es decir, la evoluta) en forma paramétrica dada por estas dos fórmulas.

Comparando con las fórmulas obtenidas en la lección 21 para el centro de curvatura, resulta que la envolvente es precisamente el lugar geométrico de los centros de curvatura.

Una curva f que tiene por evoluta φ se dice *evolvente* de ésta. Se obtendrán, pues, todas las evolventes de φ como trayectorias ortogonales del haz de tangentes a φ; toda curva tiene, por tanto, infinitas evolventes.

En los tratados de Geometría diferencial se demuestran las propiedades, siendo ésta la más importante: *La longitud de un arco de evolvente sin puntos singulares es igual a la diferencia entre las normales de la evolvente correspondientes a los dos extremos.*

EJEMPLOS. — Evoluta de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Derivando se despeja:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

sustituyendo $c^2 = a^2 - b^2$, resulta:

$$1 + y'^2 = \frac{b^4 + c^2\beta^2}{a^2\beta^2}$$

derivando nuevamente se despeja:

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2\beta^3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la evoluta son, por tanto,

$$x = c^2\alpha^3/a^4 \qquad y = -c^2\beta^3/b^4$$

eliminando α, β entre éstas y la ecuación de la elipse resulta la ecuación:

$$(ax/c^2)^{\frac{2}{3}} + (by/c^2)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

245. — Envolventes de curvas alabeadas. Evolutas.

Una curva se llama *envolvente* de un haz de curvas alabeadas, cuando en cada punto es tangente a una de ellas. Se comprende, pues, que una familia de curvas carece, en general, de envolvente; pero si se dispone de dos grados de libertad, puede formarse envolvente. Estudiemos un ejemplo importante.

Se llama *evoluta* de una curva a la envolvente de sus normales. Veamos cómo deben elegirse éstas para que tengan envolvente. Sean x, y, z las coordenadas del punto A de la curva dada y X, Y, Z las del punto homólogo A' en la evoluta; los coeficientes directores de la recta AA' son: $X - x$, $Y - y$, $Z - z$; expresando que esta recta es tangente a una curva y normal a la otra, se tienen las ecuaciones:

$$\frac{X - x}{X'} = \frac{Y - y}{Y'} = \frac{Z - z}{Z'}$$

$$(X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0$$

como al variar t varían x, y, z, X, Y, Z, si derivamos

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = R^2$$

teniendo en cuenta la relación anterior, resulta:

$$(X - x)X' + (Y - y)Y' + (Z - z)Z' = RR'$$

y como el valor de las tres razones de la primera fórmula es R/S', siendo S la longitud del arco de envolvente, sustituyendo en esta última resulta: $RS' = RR'$, de donde: $S' = R'$, $S_1 - S_2 = R_1 - R_2$.

La longitud del arco de envolvente de normales a una curva, es la diferencia de las longitudes de las normales correspondientes a los extremos.

Se demuestra fácilmente que la envolvente está en la superficie polar de la curva dada.

EJERCICIOS

1. — Obtener la evoluta de la parábola.

2. — Obtener la ecuación de las evolventes de la circunferencia.

3. — Demostrar que la longitud de un arco de evoluta es la diferencia entre los radios de curvatura de la curva dada, correspondientes a los extremos.

CALCULO VECTORIAL DIFERENCIAL

246. — Derivación de vectores funciones de una variable.

Si los componentes de un vector A son funciones de t, se dice que éste es función de t, y escribiremos $A(t)$.

Derivada $A'(t)$ es el límite del cociente del incremento $A(t+h) - A(t)$ por el incremento $h \to 0$. Como las componentes de este vector diferencia son las diferencias o incrementos de las componentes:

$$x(t+h) - x(t) \quad , \quad y(t+h) - y(t) \quad , \quad z(t+h) - z(t)$$

al dividir por h y pasar al límite, resultan las componentes del vector derivado $A'(t)$ que son:

$$x'(t) \quad , \quad y'(t) \quad , \quad z'(t)$$

Si el origen del vector varía, y las componentes se dan como funciones del origen, el cual es función de t, se aplicará la misma regla de derivación de las funciones compuestas.

Como las componentes del producto escalar $A(t).B(t)$ son las sumas de los productos de las componentes de ambos, la regla de la derivada del producto es aplicable:

$$(A.B)' = A.B' + A'.B$$

omitiendo la variable, por brevedad.

Como la derivada del determinante que define $A \times B$ es suma de los dos determinantes que resultan derivando la segunda fila, o la tercera, resulta:

$$(A \times B)' = A \times B' + A' \times B$$

es decir,también para el producto vectorial es aplicable la regla de derivación.

También lo es para el producto de una función escalar por una vectorial: $m(t).A(t)$, o brevemente $m.A$; pues al multiplicar el vector por m, las componentes del vector derivado son:

$$m'.x + m.x' \quad , \quad m'.y + m.y' \quad , \quad m'.z + m.z',$$

luego resulta $\qquad (m.A)' = m'.A + m.A'$

Velocidad y aceleración en el movimiento curvilíneo.

Una curva alabeada está determinada por el vector variable cuyo origen es 0 y su extremo P un punto móvil sobre la curva, cuyas coordenadas son funciones del tiempo u otro parámetro t:

$$x(t) \quad , \quad y(t) \quad , \quad z(t)$$

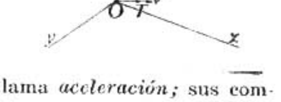
El vector de componentes:

$$x'(t) \quad , \quad y'(t) \quad , \quad z'(t)$$

está situado en la tangente, y tiene el sentido del movimiento; se llama *vector velocidad,* y lo representaremos por $V(t)$ o simplemente V. Su módulo es $v = ds : dt$, es decir, la *velocidad lineal.*

Llamamos *vector tangente:* $T(t)$ o simplemente T, al vector de módulo 1 sobre la tangente en el sentido del movimiento, es decir, T es el versor de V; por tanto,

[1] $$V = v . T.$$



Las componentes de T son, por consiguiente:

$$\frac{dx}{ds} \quad , \quad \frac{dy}{ds} \quad , \quad \frac{dz}{ds}$$

La derivada del vector velocidad se llama *aceleración;* sus componentes o coordenadas son por tanto $x''(t)$, $y''(t)$, $z''(t)$ y su expresión vectorial resulta derivando [1] respecto de t; esto es:

$$A = v' . T + v . T'$$

Ahora veremos la dirección y valor absoluto de T'.

247. — Triedro intrínseco y fórmulas de Frenet.

Dada una curva alabeada, llevemos sobre cada uno de los tres rayos que forman el triedro principal un vector de módulo 1, y obtenemos tres vectores principales:

Vector tangente: T; vector normal: N; vector binormal: B. La perpendicularidad está expresada así:

[2] $$N . B = 0 \qquad B . T = 0 \qquad T . N = 0$$

[3] $$T = N \times B \qquad N = B \times T \qquad B = T \times N$$

Veamos el significado de las derivadas T', N', B' respecto de s.

Por definición de curvatura de flexión, ésta es $c_1 = | T' |$ y el recíproco es el radio de flexión r_1.

Por definición de curvatura de torsión, ésta es $c_2 = |B'|$ y el recíproco es el radio de torsión r_2.

Como la dirección de T' tangente a la indicatriz de flexión es la de N, y lo mismo la de B', tangente a la indicatriz de torsión, resultan las dos primeras fórmulas de Frenet:

$$\text{I)} \quad T' = c_1 . N \qquad \text{II)} \quad B' = c_2 . N$$

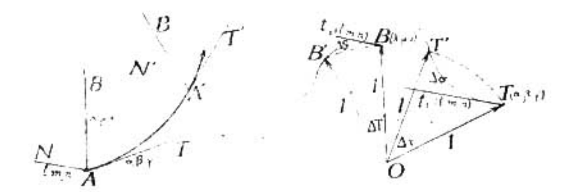
Falta N', que se deduce derivando $B \times T$, y resulta:

$$N' = B \times T' + B' \times T = c_1 . B \times N + c_2 . N \times T$$

y utilizando [3] resulta la tercera fórmula de Frenet, que completa las I) y II):

$$\text{III)} \quad N' = -c_1 . T - c_2 . B.$$

como B y T son perpendiculares resulta $|N'|^2 = c_1^2 + c_2^2$.



Aplicación al cálculo de la aceleración.

Puesto que la derivada de T respecto de s es $c_1 . N$, según la fórmula primera de Frenet, su derivada respecto de t será $c_1 . N$ por la derivada de s respecto de t, es decir, por v; y sustituida en la fórmula [1'] obtenida para la aceleración, resulta esta otra, mucho más expresiva:

$$[4] \qquad A = v' . T + v^2 . N . c_1$$

La aceleración se compone, pues, de dos partes: una dirigida según la tangente tiene el módulo v' que es la *aceleración lineal;* la otra dirigida según la normal tiene el módulo $v^2 . c_1 = v^2 : r_1$ y se llama *aceleración normal.*

Si el movimiento es uniforme, $v' = 0$, y la aceleración está dirigida según la normal. Si el movimiento es rectilíneo, es $c_1 = 0$ y la aceleración tiene la misma dirección del movimiento.

NOTA SOBRE LA GEOMETRIA VECTORIAL DE SUPERFICIES

Expresión vectorial y recta normal. — Por analogía con las curvas, el punto P de la superficie definida paramétricamente (235) y el vector OP, que también designamos por P vienen expresados como función de u, v, es decir, $P(u, v)$; el vector de origen P cuyas componentes son las derivadas de x, y, z respecto de u lo designamos por P_u, y análogamente P_v.

Los coeficientes del plano tangente (236) son las componentes del producto vectorial $P_n = P_u \times P_v$, el cual es, por tanto, normal a la superficie. Si el punto es *ordinario*, es decir, no se anulan las tres componentes, es $P_n \neq 0$; y este vector es nulo o no está definido, si el punto es singular.

Superficies regladas. — Dada la curva directriz $P = P(s)$, si sobre ella se apoya la recta generatriz paralela al versor $Q(s)$, cada punto X de la generatriz (o el vector correspondiente de origen O) viene expresado mediante los parámetros s, t, así:

$$X = P(s) + t \cdot Q(s); \quad (|P'(s)| = 1, \ |Q(s)| = 1)$$

y el vector normal en cada punto ordinario:

$$X_n = X_s \times X_t = (P' + t\,Q') \times Q \neq 0$$

Este vector $P' \times Q + t \cdot Q' \times Q$, tiene dirección fija para cada s, independiente de t, si $Q' \times Q$, y $P' \times Q$ tiene igual dirección, es decir, si P', Q, Q' son coplanarios, o sea: si cada uno es *combinación lineal* de los otros. Esta es, pues, la condición necesaria y suficiente para que la superficie sea desarrollable.

Con las notaciones (239) si se elige la directriz en el plano xy las componentes de P son $(a, b, 1)$ y las de Q son $(p, q, 1)$; luego es $P'(a', b' 0)$, $Q'(p', q', 0)$ y la condición de dependencia lineal, o de ser coplanarios P', Q, Q' es la anulación del determinante, que da la misma condición ya obtenida en (240), o sea: $p' b' = q' a'$.

El desarrollo sistemático de la teoría puede estudiarse en la Geometría diferencial de Bieberbach.

EJERCICIOS

1. — Demostrar, mediante la fórmula [4] de la aceleración, que los únicos movimientos uniformes en sentido estricto, esto es, sin aceleración, son los rectilíneos de velocidad constante.

2. — Expresar la intensidad y dirección de la aceleración del movimiento circular de aceleración angular constante, y su variación al tender ésta a 0.

3. — Escribir las ecuaciones vectoriales de las superficies elementales: plano, esfera, y más en general, de todas las superficies de revolución.

CÁLCULO TENSORIAL

248. — Campos tensoriales. Velocidad y gradiente.

Los tensores que hemos estudiado en los capítulos anteriores, tienen componentes constantes y se presentan al considerar propiedades de un solo punto (tensión, momento de inercia, etc.); pero claro es que al variar ese punto las componentes varían en función de sus coordenadas y resulta un tensor función del punto, o brevemente un *campo tensorial;* en particular se llama *campo vectorial,* o *campo escalar* en los dos casos más sencillos.

EJEMPLOS. — La temperatura y la presión de un flúido en cada punto son ejemplos de campos escalares.

El campo gravitacional de centro O es vectorial; en cambio, los vectores funciones de una variable t, estudiados en Lección 59, no forman campo vectorial.

Notación. — Desde ahora designaremos las coordenadas ortogonales con índices superiores: x^1, x^2, x^3; y las fórmulas de rotación de ejes se escribirán así:

$$x'^1 = \alpha^1{}_1\, x^1 + \alpha^1{}_2\, x^2 + \alpha^1{}_3\, x^3 \qquad x^1 = \beta^1{}_1\, x'^1 + \beta^1{}_2\, x'^2 + \beta^1{}_3\, x'^3$$

$$x'^2 = \ldots\ldots \qquad\qquad x^2 = \ldots\ldots$$

$$x'^3 = \ldots\ldots \qquad\qquad x^3 = \ldots\ldots$$

Pronto veremos la utilidad de usar índices superiores para las coordenadas; en cuanto a los coeficientes, designamos como hasta aquí por $\alpha_k{}^h$ el coseno del ángulo que forma el nuevo eje x'^h con el x^h; mientras que designaremos por $\beta_h{}^k$ el coseno del ángulo que forma el primitivo eje x^k con el nuevo x'^h. Ambos cosenos son, por consiguiente, iguales; y la matriz (α) se deduce de la (β) por simetría respecto de la diagonal principal, es decir, ambas son *conjugadas.*

Obsérvese que ni la matriz (α) ni la (β) son simétricas, pues el ángulo *que forman, p. ej.,* x'_1 *con* x_2 *es independiente del que forma* x_1 *con* x'_2. Escríbanse ambas matrices para el plano, y se verá su asimetría.

Velocidad y gradiente. — He aquí dos ejemplos importantes de campo vectorial:

1.º) Si un sólido se mueve, las coordenadas de cada punto son funciones de t; y como los coeficientes de la fórmula de rotación de ejes son constantes, se pueden derivar éstas, término a término, y por tanto las componentes v^i y v'^i de la velocidad satisfacen a la

misma ley lineal [1] adoptada en Lección 45 como definición de vector:

$$v'^1 = \alpha^i{}_1\, v^1 + \alpha_2{}^i\, v^2 + \alpha^i{}_3\, v^3 \qquad [1]$$

2.º) El gradiente de un campo escalar $u(x^1, x^2, x^3)$ tiene como componentes las derivadas u_1, u_2, u_3; y al cambiar de ejes, resulta por la regla de la derivación compuesta:

$$u_i' = u_1\,\beta^1{}_i + u_2\,\beta^2{}_i + u_3\,\beta^3{}_i \qquad [2]$$

Encontramos aquí una novedad respecto de las fórmulas de transformación de las componentes de la velocidad; mientras aquéllas se transforman por la matriz (α), las componentes del gradiente se transforman mediante la matriz (β) conjugada de la (β). Es claro que en coordenadas cartesianas rectangulares tal diferencia es sólo aparente, puesto que tal matriz conjugada de la (β) es precisamente la (α); y por tanto, las derivadas parciales componentes del gradiente se transforma como las coordenadas, por la matriz (α); pero basta pasar a coordenadas oblicuas para notar la diferencia esencial entre ambas matrices.

Nota. — Para la Mecánica racional clásica son suficientes las coordenadas rectangulares; pero en la relativista son indispensables las coordenadas curvilíneas, distinguiendo: *coordenadas contravariantes* son las que se transforman según la matriz (α), como las coordenadas y las velocidades; *coordenadas covariantes* las que se transforman por la matriz (β), como en el ejemplo del gradiente.

249. — Derivación de vectores y tensores.

Derivación de vectores. Puesto que la derivada de un campo escalar es un campo vectorial (brevemente suele decirse que la derivada de un escalar es un vector), parece natural definir como derivada de un vector al cuadro o matriz cuyas nueve componentes sean las derivadas $a^r{}_\kappa$ de las tres componentes a^r del vector. Esta matriz tiene caracter tensorial, es decir, define una díada, *suponiendo coordenadas cartesianas ortogonales* (*).

Para demostrarlo, derivemos respecto de x'_j la fórmula de transformación:

$$a'^i = \Sigma\,\alpha^i{}_r\, a^r \qquad (r = 1, 2, 3) \qquad [3]$$

Calculando la derivada de cada a^r respecto de x'_j como suma de derivadas parciales respecto de cada x^s por la derivada de ésta respecto de x'_j, resulta:

$$a'^i{}_j = \Sigma\,\alpha^i{}_r(\Sigma\, a_s{}^r\,\beta_j{}^s) = \Sigma\, a_s{}^r\,\alpha_r{}^i\,\beta_j{}^s \qquad (r, s = 1, 2, 3) \qquad [4]$$

y como en la hipótesis de coordenadas ortogonales los coeficientes β son conjugados de los α, resulta la relación:

$$a'_j{}^i = \Sigma\, a_s{}^r\,\alpha^i{}_r\,\alpha^j{}_s \qquad [5]$$

(*) No acontece lo mismo en coordenadas oblicuas o curvilíneas; para lograrlo es preciso introducir términos complementarios, formando así la *derivada covariante* y la *contravariante*.

que a pesar de su distinto aspecto equivale a la fórmula [5] (Lecc. 45) en la hipótesis de coordenadas ortogonales, en la cual es indiferente la colocación superior o inferior de cada índice; llegando así a este resultado:

Si las coordenadas son cartesianas ortogonales, las derivadas de las componentes de un vector forman un tensor doble, llamado derivada del vector.

Condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea constante, es la anulación de su tensor derivado. Pues la anulación del tensor derivado equivale a la anulación de todas las derivadas de las tres componentes.

Derivada de un gradiente. — Si el vector A es el gradiente del escalar u, las componentes son las derivadas parciales de u, que designaremos así: $a^1 = u_1$, $a^2 = u_2$, $a^3 = u_3$.

En tal hipótesis, suponiendo continuas las derivadas segundas, son iguales las derivadas cruzadas:

$$a^h{}_k = a^k{}_h = u_{hk} \qquad [6]$$

es decir: *el tensor derivado de un gradiente es simétrico.*

Generalización. — Las 27 derivadas de las 9 componentes de una díada forman una matriz cúbica; y repitiendo el cálculo anterior, con ligeras variantes, se ve que esta matriz obedece a la ley lineal de transformación y representa por tanto un tensor triple o tríada, siempre con la hipótesis de coordenadas cartesianas rectangulares.

Fácil ejercicio es la repetición de la demostración anterior para cualquier número de índices, y resulta:

En coordenadas cartesianas rectangulares, las derivadas parciales de un tensor de rango r forman otro tensor de rango r + 1, llamado derivado de aquél.

Divergencia y rotor. — Estos conceptos, fundamentales en el cálculo vectorial clásico, aparecen de modo muy natural y con mayor alcance en este cálculo generalizado.

Divergencia del campo vectorial $A(a^1, a^2, a^3)$ es el número suma de las derivadas principales de las tres componentes, esto es:

$$\text{Div. } A = a_1{}^1 + a_2{}^2 + a_3{}^3 \qquad [6]$$

Tal número es invariante por ser el escalar dado por la contracción del tensor derivado. Si las coordenadas son oblícuas o curvilíneas, no subsiste esta propiedad invariante.

Las importantes aplicaciones de la divergencia se desarrollan en Cap. XI; pero es preciso dejar sentado que la divergencia es un número independiente de los ejes, como acabamos de probar.

Dado un tensor doble (a^{ij}) de componentes variables, se define de dos modos el *vector divergencia*. Las componentes d_1, d_2, d_3 de ésto son las sumas de derivadas:

$$d_i = \Sigma\, a_i{}^{ir} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

es decir: las tres componentes del vector divergencia son las sumas de las derivadas que forman cada fila del tensor respecto de la variable de igual índice, esto es, la 1.ª componente es la suma de derivadas de la 1.ª fila respecto de x^1, y análogamente las otras.

Derivando por columnas resulta análogamente otro vector divergencia del mismo tensor A. Por tanto, si éste es simétrico, sus dos divergencias coinciden.

Omitimos la demostración del carácter tensorial de la divergencia que el lector pueda hacer como ejercicio, y nos limitamos a mencionar estas importantes aplicaciones:

1.ª *La divergencia del tensor de esfuerzos es igual a la fuerza unitaria en cada punto.*

2.ª Si sobre cada punto de un medio continuo deformable, de densidad constante o variable ρ, actúa la fuerza unitaria F, y son (a_{ij}) las componentes de la tensión T, funciones del punto, las tres ecuaciones clásicas de equilibrio quedan resumidas en esta sola: Div. $T = -F$.

3.ª Si el medio continuo está en movimiento, y es V la velocidad de cada punto, las tres ecuaciones del movimiento están condensadas en esta: Div. $T = (V' - F)$, siendo V' el vector derivado respecto del tiempo t.

Esta ecuación es fundamental en Elastodinámica, como la anterior lo es en Elastostática. Para mayores ampliaciones de las nociones aquí expuestas, puede consultarse nuestra *Introducción al Cálculo tensorial*.

Rotor. — Se define en el cálculo vectorial clásico el rotor de un campo vectorial $A(a^1, a^2, a^3)$ adoptando como componentes las diferencias de derivadas cruzadas:

$$(a^2{}_3 - a^3{}_2 \quad , \quad a^3{}_1 - a'_3 \quad , \quad a'_2 - a^2{}_1)$$

Estas componentes forman un semitensor, pues son las componentes situadas a un lado de la diagonal en el tensor deducido del tensor derivado por la operación de restarle su conjugado, como se vió en la Lección 45.

Cálculo tensorial en coordenadas curvilíneas. — Cualesquiera que sean los parámetros o coordenadas que determinen cada punto, si las fórmulas de transformación son:

$$x'^i = \alpha^i\ (x^1, x^2, x^3) \qquad x^r = \beta^r\ (x'^1, x'^2, x'^3)$$

y designamos por $\alpha_j{}^i$ la derivada de α^i respecto de x^j, subsisten las fórmulas [1] y [2] y todas las siguientes. Se comprende así la ventaja de la notación adoptada para los cosenos directores, que figuran como coeficientes constantes de las fórmulas de transformación, los cuales son ahora las derivadas de las nuevas coordenadas respecto de las antiguas, o viceversa.

Obsérvese cuán fácilmente se opera con los índices superiores e inferiores, como si formaran fracciones, y nótese que las fórmulas [3] y [4], mucho más generales que la [5], so nmucho más cómodas que ella.

Los ya numerosos tratadistas suelen comenzar por este caso general, pero creemos preferible el método inverso, aquí esbozado, cuyo desarrollo puede estudiarse en nuestra ya citada *Introducción*.

CAPITULO XI

INTEGRACION DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LECCIÓN 61

INTEGRALES DOBLES

250. — Area de un recinto.

Un método usado frecuentemente en dibujo para calcular el área de un recinto, cuyo contorno está dibujado en papel milimetrado, consiste en contar el número s_1 de centímetros cuadrados contenidos completamente en el recinto; si agregamos el número δ_1 de centímetros que atraviesa el contorno, la suma $S_1 = s_1 + \delta_1$ expresa el área de un polígono que contiene en su interior al recinto dado. El área buscada está comprendida entre s_1 y S_1, siendo el error de cualquiera de estas sumas menor que δ_1.

Si ahora contamos el número de mm² de la cuadrícula contenidos en el recinto y expresado en la misma unidad anterior, o sea en cm², resulta un área s_2, y si hacemos lo mismo con los mm² que atraviesa la curva, resulta un nuevo polígono de área $S_2 = s_2 + \delta_2$ contenido en el anterior. Obtenemos, pues, dos valores s_2, S_2, que expresan el área del recinto, con error menor que δ_2.

Teóricamente puede proseguirse indefinidamente y resultan las sumas:

$$s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq S_2 \leqq S_1$$

fácil es ver que estas sumas convergen, es decir, el error δ_i llega a ser tan pequeño como se quiera. Bastará probar para esto: el área δ de las mallas atravesadas por un arco de curva creciente (o decreciente) tiende hacia cero al tomar las dimensiones de las mallas suficientemente pequeñas sean iguales o desiguales y esto ya se ha visto (130), cuando el contorno está formado por dos arcos uniformes.

El área buscada viene, pues, expresada como límite de las sumas $\Sigma\, dx . dy$, cuando estos intervalos parciales dx, dy tienden simultá-

neamente hacia cero. Este límite común de las sumas por defecto y por exceso se representa así:

$$\int \int_R dx\, dy = \text{lím.} \sum dx\, dy$$

y puesto que expresa el área ,su valor coincide con la expresión

$$\int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$$

es decir, esta integral doble se puede calcular integrando primero respecto de y, después respecto de x, como se ha hecho antes de ahora.

251. — Integrales de recinto plano.

El volumen de un cilindroide (135), es decir, del cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y el cilindro cuya base es el recinto R en el plano xy, habría podido calcularse también como límite de suma de prismas. Dividido el recinto base por una cuadrícula de paralelas a los ejes, el área de cada rectángulo es $dx . dy$; y multiplicada por la ordenada máxima M_i de la superficie en dicho rectángulo, o por la ordenada mínima m_i, tenemos los volúmenes $M_i\, dx . dy$, $m_i\, dx . dy$, entre los cuales está comprendido el del prisma de igual base limitado por la superficie; el volumen buscado es, pues, el límite de las sumas:

$$s = \sum m_i . dx . dy \qquad S = \sum M_i . dx . dy \tag{1}$$

cuando las dimensiones de la cuadrícula tienden hacia cero (véase la nota).

El procedimiento es aplicable a cualquier función continua $z = f(x, y)$ cualquiera que sea su significado físico; si representa la densidad en cada punto, las sumas [1] representan valores extremos que comprenden a la masa del recinto, y ésta es el límite de aquellas sumas; si $f(x, y)$ es la distancia a un punto, eje o plano, resulta el momento del recinto respecto de ese punto, eje o plano, etc.

Más general: si en vez de los valores mínimo y máximo de la función en cada intervalo $dx . dy$ elegimos un valor cualquiera de la función en el mismo, es decir, $f(\xi, \eta)$ siendo ξ, η un punto cualquiera del rectángulo $dx . dy$, la

$$\sum f(\xi, \eta)\, dx . dy$$

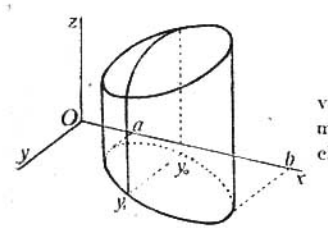
está comprendida entre las sumas s y S; y como ambas tienen el mismo límite, también esta suma intermedia tiende al mismo. Este límite de todas las sumas así formadas ,se llama *integral de superficie*, o mejor: *de recinto plano* y se designa así:

$$\int f(x, y)\,d\sigma = \int_R \int f(x, y)\,dx\,.\,dy = \text{lím.} \sum_R f(\xi, \eta)\,dx\,.\,dy \qquad [2]$$

extendida esta suma a todos los rectángulos de la cuadrícula que contienen puntos del recinto dado R. La notación $d\sigma = dx\,.\,dy$ para el elemento de área, se generaliza también para mallas de forma cualquiera.

DEFINICIÓN: *La integral de $f(x, y)$ en un recinto es el límite de la suma obtenida multiplicando el área de cada rectángulo $dx\,.\,dy$ que contiene puntos del recinto por el valor de la función en un punto cualquiera del mismo, al tender a cero simultáneamente las dimensiones de todos los rectángulos.*

Se demuestra (*Elem. T. F.*) que esta suma tiene el mismo límite cualquiera que sea el modo de tender a cero dx y dy. En particular, si se toma constante dx y se integra respecto de y, o bien inversamente, resultan dos modos de evaluar la integral doble reduciéndola a integrales simples, como vamos a explicar.



Primer método: $\int [\int f(x, y)\,dy]\,dx$

Segundo método: $\int [\int f(x, y)\,dx]\,dy$

variando x e y dentro del recinto R, como explicaremos prácticamente en la lección siguiente.

Si el recinto es el rectángulo:

$$a < x < a' \quad , \quad b < y < b'$$

los límites de ambas integrales son constantes: a y a' para la x, b y b' para la y.

Si el recinto tiene contorno cualquiera, pero cada paralela al eje y lo corta en dos puntos solamente, las ordenadas y_0 e y_1 de estos dos puntos son los extremos de la primera integral simple; estos dos extremos son, pues, funciones de x; los extremos de la segunda integral son los valores c y d mínimo y máximo de la x en el recinto. En el párrafo siguiente y en la lección próxima ponemos ejemplos

252. — Volumen de un cilindroide.

En la lección 33 hemos calculado el volumen de los cilindroides, esto es, de los cuerpos limitados por una superficie $z = f(x, y)$, el plano xy, y el cilindro cuya base es un recinto dado en este plano, mediante la descomposición por planos paralelos al yz; el área de cada sección, a la distancia x, viene expresada por la

$$\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy$$

debiendo limitarse entre los dos valores de y que corresponden al valor de x prefijado, los cuales se deducirán de la ecuación $\varphi(x, y) = 0$ de la curva que sirve de base a la superficie y son, por tanto, funciones de x. El producto de esta área por dx representa el volumen del cilindro elemental que tiene esta base y esta altura y el límite de la suma es la integral

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y)\, dy$$

debiendo interpretarse esta última notación como integral del producto de la segunda integral por dx, a pesar de omitirse el paréntesis.

Los valores a, b son, como allí se indicó, las abscisas extremas de los puntos de la curva base.

Análogamente habríamos podido integrar primero respecto de x suponiendo y fija, y limitando la integral entre los dos valores x_1, x_2 que corresponden a cada y, los cuales son funciones de y; la integral así definida es, pues, función de y, e integrada respecto de y entre los valores extremos c y d que esta coordenada pueda tomar en la curva base, resulta una segunda expresión para el volumen:

$$V = \int_c^d \left[\int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y)\, dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y)\, dx.$$

Si cada paralela a un eje determina en el recinto varios segmentos, la integral se compone de suma de integrales.

En general: cualquiera que sea el significado de la integral doble resulta esta conclusión que enunciaremos esquemáticamente:

Para calcular el valor de la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre un recinto plano, se integra esta función respecto de una variable, conservando constante la otra, y después se integra respecto de esta segunda variable.

EJEMPLO. — Calculemos el volumen del cuerpo limitado por el plano xy, el paraboloide

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

y el cilindro

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Este volumen será:

$$V = \int\int (x^2/2p + y^2/2q)\, dx.dy$$

que se descompone en suma de dos integrales sobre la elipse base.

Para calcular la primera, integraremos primero respecto de y entre las ordenadas y_1 e y_2 que corresponden a cada x, y resulta:

$$\int_{-a}^{+a} x^2\, dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

o sea, separando el factor $2b/a$:

$$\int_{-a}^{+a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Poniendo $x = a$ sen t, se reduce esta integral simple a

$$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos^2 t\, dt = \tfrac{1}{4} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2t)^2\, dt$$

y pasando al arco doble, resulta:

$$\tfrac{1}{8} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt = \pi a^4/16$$

luego la integral doble vale $\tfrac{1}{4}\pi a^3 b$, y la otra $\tfrac{1}{4}\pi a b^3$; por consiguiente

$$V = \tfrac{1}{8}\pi ab(a^2/p + b^2/q)$$

En particular, si los parámetros del paraboloide son $p = a$, $q = b$, resulta

$$V = \tfrac{1}{8}\pi\, ab(a + b) = \text{base } \tfrac{1}{8}(a + b)$$

Si el cilindro fuese el proyectante de la sección plana $z = h$, es decir: $a^2 = 2ph$, $b^2 = 2qh$, resultaría

$$V = \tfrac{1}{2}\pi abh = \tfrac{1}{2} \text{ base} \times \text{altura}$$

resultado acorde con el ejercicio 3.º, puesto que la curva intersección es plana.

NOTA. — Algunas observaciones son necesarias para el cálculo práctico.

1.º Si la curva $\varphi(x, y) = 0$ que sirve de base al cilindroide no es convexa y es cortada por cada paralela al eje y en más de dos puntos y son $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ las ordenadas de éstos, contadas de menor a mayor, los segmentos interiores al área base son $y_1 y_2$ e $y_3 y_4$; entonces la integral que expresa el área de la sección vertical se compone de

$$\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy + \int_{y_3}^{y_4} f(x, y)\, dy$$

y análogamente si fuesen más de dos los segmentos.

2.° Si un cuerpo está limitado por una superficie cerrada, tal que a cada valor de x, y corresponden dos valores de z, la superficie no está definida por una, sino por dos funciones uniformes:

$$z_1 = f_1(x, y) \quad , \quad z_2 = f_2(x, y)$$

suponiendo que esta segunda representa el casquete superior, el volumen viene expresado por la fórmula:

$$V = \int dx \int [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dy$$

En particular, si la superficie es simétrica respecto del plano xy, es decir, si f_2 y f_1 son iguales y de signos contrarios, basta multiplicar por 2, pues las dos integrales son iguales de signo opuesto y al restar se duplica. Bastará, pues, calcular una y tal sucede, por ejemplo, en el caso del elipsoide, que fué resuelto en (135).

253. — Area de una superficie curva.

Parece a primera vista admisible una definición análoga a la dada para la longitud de un arco como límite de los perímetros de las quebradas inscritas, al tender hacia cero todos los lados. Ocurre inmediatamente inscribir en la superficie dada poliedros de caras triangulares y hacerlas tender hacia cero mediante intercalación de nuevos vértices.

Sin embargo ,es fácil ver que pueden resultar límites distintos según como se hagan tender a cero las caras del poliedro (*). Habría que poner tales restricciones a la elección de poliedro inscrito. que se complicaría mucho la definición. Recordemos, por otra parte, que la longitud de un arco de curva, resulta también como límite de la suma de diferenciales ds, es decir, como suma de los trozos de tangente limitadas por las ordenadas sucesivas. Una definición análoga es válida para las superficies.

Dividido el plano xy por una cuadrícula de lados paralelos a los ejes, cada rectángulo $dx.dy$ determina sobre la superficie un cuadrilátero curvilíneo cuya proyección es $dx.dy$, y tomando el plano tangente en cualquiera de los puntos de ese trozo de superficie, determina con el mismo prisma proyectante de base $dx.dy$, un cuadrilátero plano cuya área es: $dx.dy : \cos(n, z)$, siendo $\cos(n, z)$ el tercer coseno director de la normal, que es igual al coseno del ángulo que forma el plano tangente con el xy, debiendo tomarse el ángulo agudo, es decir, el coseno positivo, pues todas las áreas lo son.

(*) Hay un ejemplo clásico de Schwarz que puede verse en cualquier tratado. Si un cilindro circular de radio 1 y altura h se corta por planos paralelos y en cada circunferencia se inscribe un polígono regular de m lados, de modo que se correspondan alternativamente, es decir, los vértices de cada polígono correspondan a los puntos medios de los lados de los polígonos contiguos y se une cada vértice con los extremos de estos lados correspondientes de los polígonos contiguos, el área del poliedro tiene límite variable según el modo de tender a 0 sus caras.

El límite de la suma de todos los cuadriláteros así formados es, por definición, el área de la superficie y viene, por tanto, expresada por la integral doble:

$$S = \int \int dx . dy / \cos nz \qquad [4]$$

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (a, b, c) es:

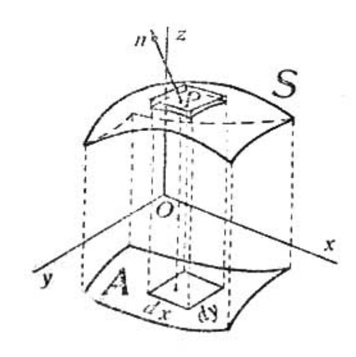
$$z - c = z'_x(x - a) + z'_y(y - b).$$

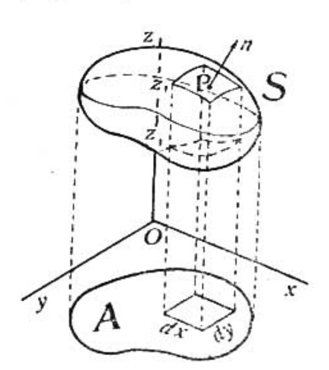
y los cosenos se calculan así:

$$\frac{z'_x}{\cos nx} = \frac{z'_y}{\cos ny} = \frac{-1}{\cos nz} = \frac{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}{1}$$

de donde resulta, aplicando la fórmula [4]:

$$S = \int \int \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy.$$





Si la ecuación viene en forma implícita $F(x, y, z) = 0$ basta despejar: z'_x, z'_y y sustituir en la fórmula anterior. La integral es entonces la suma de dos integrales de las funciones z_1 y z_2, correspondientes al casquete superior y al inferior.

NOTA. — Esta fórmula subsiste si en el plano xy se adoptan coordenadas polares, sustituyendo $dx . dy$ por $r\, dr . d\theta$. En la próxima lección pondremos ejemplos.

EJEMPLO 1.° — Area de la porción del paraboloide

$$y^2 + z^2 = 2px \qquad z = \sqrt{2px - y^2}$$

limitada por el plano $x = a$.

Basta considerar la mitad superior, en la cual es:

$$z'_x = p : z \quad , \quad z'_y = -y : z$$

y resulta fácilmente:

$$S = \pi \sqrt{p} \, [(p + 2a)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}] : 3$$

Esto mismo se obtiene más brevemente por una integral simple, como se explicó en (136) por ser una superficie de revolución. Ponemos este ejemplo porque las cuádricas que no son de revolución conducen a integrales elípticas.

EJEMPLO 2.° — Area del trozo del paraboloide $z = x^2/2a + y^2/2b$ limitado por el cilindro $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Resultado:

$$S = 2\pi ab(\sqrt{8} - 1) : 3$$

EJEMPLO 3.° — El área del elipsoide de semiejes $a > b > c$, después de complicadas transformaciones, viene dada por la fórmula final

$$S/2\pi = c^2 + b\sqrt{a^2 - c^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \; d\varphi +$$

$$c^2 b/\sqrt{a^2 - c^2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

siendo
$$\varphi = \text{arc. sen} \, [\sqrt{a^2 - c^2}/a]$$

y k el cociente de las excentricidades de las dos elipses meridianas de los planos xz o yz.

El cálculo de estas integrales se hace mediante las tablas que van al final.

Sea, por ejemplo:

$$a = \sqrt{3}, \; b = \sqrt{2}, \; c = 1, \; k = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\varphi = \text{arc sen} \sqrt{2/3} = 54° \, 45'.$$

Buscaremos, pues, los valores de la integral de primera y segunda especie en la columna $\alpha = 60°$ puesto que sen $60° = \sqrt{3}/2$ y en ella, los valores que da la tabla para $\varphi = 54° \, 45'$ son respectivamente 1,078 y 0,836.

Resulta, por lo tanto:

$$S = 2\pi(1 + 1{,}672 + 1{,}078) = 7{,}50\pi$$

Ejercicio. — Suponiendo el elipsoide de revolución, $a = b$, reducir la fórmula a la expresión más sencilla y deducir ésta directamente.

NOTAS

La demostración de que las sumas [1] tienen límite común se reduce a probar que la diferencia entre ambas o sea:

$$\Sigma M_i . dx . dy - \Sigma m_i . dx . dy \; = \Sigma (M_i - \; m_i) \, dx . dy \qquad [3]$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera eligiendo la cuadrícula suficientemente densa.

Supongamos que la base sea un rectángulo. Si suponemos la función *uniformemente continua*, es decir, si dado cualquier número positivo ε se puede elegir la cuadrícula suficientemente densa para que en cada malla la oscilación sea $M_i - m_i < \varepsilon$, resulta:

$$S_i - s_i < \varepsilon \, \Sigma \, dx . dy = \varepsilon . A$$

siendo A el área del rectángulo. He aquí, pues, un límite del error cometido cuando se toma s_i o S_i como valor del volumen.

Más general: si en vez de prismoide es un cilindroide cuya base es un recinto R del plano xy, no hay inconveniente en suponer como base todo el rectángulo que lo contiene, asignando a la función el valor cero en los puntos exteriores al recinto. A pesar de la discontinuidad que así se introduce en el contorno, las sumas s_1 y S_1 convergen también. En efecto, la diferencia viene dada por la expresión [3]; esa suma debe extenderse a todo el rectángulo, el cual ha quedado descompuesto en tres partes:

1.° Mallas interiores al recinto R;
2.° Mallas exteriores;
3.° Mallas que contienen al contorno (formado por dos arcos uniformes).

Para las primeras, la expresión [3] puede hacerse tan pequeña como se quiera según arriba se ha visto, por la continuidad de la función del recinto. Las segundas son nulas por ser $m_1 = M_1 = 0$. Las terceras tienen un área δ que puede hacerse (130) menor que cualquier número positivo; y como en ellas es $m_1 = 0$, si llamamos M al máximo absoluto de la función, resulta para estas mallas atravesadas por el contorno:

$$\Sigma M_1 \, dx . dy < M \Sigma \, dx . dy = M\delta$$

número que también tiende hacia cero. (Para el caso general, v. *T. F.*).

INTEGRALES IMPROPIAS. — En la lección 37 hemos advertido que las integrales en intervalo infinito no pueden someterse a las mismas transformaciones que las de intervalo finito, sin especiales condiciones de la función integrando. Sin poder desarrollar la teoría general, limitémonos a dar esta regla práctica: todas las transformaciones son legítimas, como en el caso de intervalo finito si el integrando para $x \to \infty$ es infinitésimo de orden exponencial o de orden superior.

INTEGRAL DE GAUSS. — Como aplicación de la permutación de variables, calculemos el valor de la integral llamada de Poisson, de Laplace, o de Gauss:

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Para ello efectuemos la siguiente permutación de integraciones:

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y \, . \, dy \int_0^\infty e^{-x^2 . y^2} dx = \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-(x^2+1)y^2} y \, . \, dy$$

La integral en x del primer miembro vale A/y; luego el integrando en y es $Ae^{-y^2} dy$; el primer miembro vale, por consiguiente A^2.

La integral en y del 2.° miembro vale $1 : 2(1 + x^2)$, luego el valor del 2.° miembro es $\pi/4$. Resultado:

$$A = \int_0^\infty e^{-x^2} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

EJERCICIOS

1.° — Calcular el volumen limitado por el paraboloide $p.z = x.y$, el plano xy y los dos planos $x = a$, $y = b$.

Solución: $V = a^2 b^2/4p = \tfrac{1}{4}$. base por altura.

2.° — Volumen limitado por el mismo paraboloide, el plano xy y los pares de planos $x = a$, $x = A$; $y = b$, $y = B$.

Solución: $V = (A^2 - a^2)(B^2 - b^2) : 4p$

De otro modo: producto de la base por el promedio de las cuatro ordenadas en los cuatro vértices.

3.° — Volumen limitado por el paraboloide

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

y un plano horizontal. Solución: $\tfrac{1}{2}$ base $\times$ altura.

LECCIÓN 62

INTEGRALES MULTIPLES.

254. — Integrales triples.

El concepto de integral múltiple se establece sin dificultad, una vez estudiadas ya las integrales dobles.

La definición de la integral triple de una función $f(x, y, z)$ definida en un recinto R, limitado por una superficie cerrada, es ésta:

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\,dx.dy.dz = \text{lím.}\ \Sigma f(\xi, \eta, \zeta)\,dx.dy.dz$$

es decir, análoga a la de las integrales dobles: *es el límite de la suma de los productos obtenidos multiplicando el volumen de cada paralelepípedo elemental por el valor de la función en un punto cualquiera del mismo.*

Que ese límite existe si la función es continua y que es independiente del modo de cuadricular el espacio, es cuestión que puede verse demostrada en cualquier tratado de Análisis matemático, así como también que ese valor es el mismo que se obtiene por integraciones sucesivas, es decir:

$$\int dx \int dy \int f(x, y, z)\,dz.$$

Esto debe interpretarse así: fijados x e y, es decir, trazada una ordenada paralela al eje z, intercepta en ella un cierto segmento el cuerpo dado, y el límite de la suma parcial correspondiente a la pila de paralelepípedos de base $dx.dy$ viene dado por la integral respecto de z; los límites son las ordenadas extremas de la superficie de contorno correspondientes al par (x, y) es decir, son dos funciones: $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$. (Figura 2.ª de párrafo 253).

Resulta así de la primera integración una función de x, y; integrada respecto de y, los límites y_1 y_2 son los valores extremos que corresponden a la abscisa x, es decir, funciones de x; la última integración entre a y b da el valor numérico de la integral triple.

El significado de la integral triple depende de la función $f(x, y, z)$. Si ésta se reduce a la unidad resulta el volumen del recinto R. Si es la densidad en cada punto, resulta la masa; si $f(x, y, z)$ es la distancia a un plano, la integral triple es el momento respecto de ese plano, etc.

EJEMPLO. — Calculemos $\int\int\int z\,dx.dy.dz$ sobre el octante de esfera de centro 0 y radio R limitado por el triedro de los semiejes positivos.

La reduciremos a tres integrales simples, por ejemplo, en este orden: Integrando respecto de z resulta $\frac{1}{2}z^2$, y limitando entre O y $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ resulta $\frac{1}{2}(R^2-x^2-y^2)$; integrando respecto de y resulta:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (R^2-x^2-y^2)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx\,[\sqrt{R^2-x^2}(R^2-x^2) - \frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{3}\int_0^1 (R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

y haciendo el cambio de variable $x = R \operatorname{sen} \varphi$, se transforma esta integral en

$$R^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \,.\, d\varphi$$

cuyo valor se obtiene pasando al arco doble y después al cuádruplo; tomando el resultado de la tabla de integrales, resulta $3\pi/16$, luego la integral triple que representa el momento del octante respecto del plano yx, vale $\pi R^4/16$. Más ventajosas son las coordenadas esféricas, como veremos en (260).

255. — Concepto general de integral múltiple.

En la definición de integral doble hemos supuesto, para mayor sencillez, que el recinto D se dividía en una red de rectángulos por paralelas a ambos ejes, pero igualmente puede adoptarse cualquier otra división en mallas de forma arbitraria, con la sóla condición de que su diámetro tienda a cero, entendiendo por *diámetro* de un recinto la máxima de las distancias entre cada par de sus puntos. La demostración de la existencia del límite de las sumas s y S por defecto y por exceso subsiste, y también la independencia del límite respecto del sistema de mallas adoptado.

Es preferible, por tanto, la notación más general:

$$\int f(x, y)\,d\sigma \quad \text{y análogamente} \quad \int f(x, y, z)\,d\tau$$

representado por $d\sigma$ el elemento de área y por $d\tau$ el elemento de volumen, siendo por definición

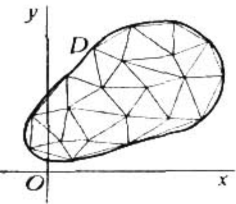
$$\int f(x, y)\,d\sigma = \text{lím.}\, \Sigma\, f(x, y)\,d\sigma$$

y análogamente para tres dimensiones.

Esta notación vale para toda clase de coordenadas planas mientras que la notación (250) vale solamente para cartesianas.

Más general es la notación $\int f(P)\,d\sigma$, designando por P un punto variable en un recinto de cualquier número de dimensiones, y $d\sigma$ un elemento del mismo.

La notación de Leibniz, que hasta aquí hemos seguido, y que tan ventajosa resulta en las integrales simples, puede inducir a transformaciones erróneas de las integrales múltiples al cambiar de variables.



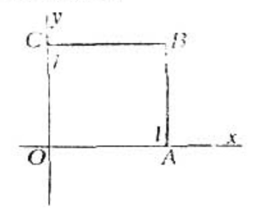
EJEMPLO. — Sea $x = u + v$, $y = u - v$. Si llevados de la analogía sustituimos

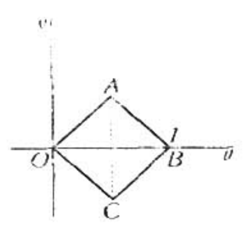
$$dx = du + dv \quad , \quad dy = du - dv \quad ,$$

$$dx . dy = du^2 - dv^2$$

resultará una expresión sin sentido.

Obsérvese en la figura que el cuadrado de lado 1 en el plano xy se transforma en el cuadrado de lado 1 en el plano uv, con sentido opuesto. En el próximo párrafo veremos el significado de esto y explicaremos cómo se efectúa el cambio de variables.





PROPIEDADES. — Puesto que la integral múltiple, como la simple, está definida por dos sucesiones monótonas convergentes, las demostraciones dadas en (130) son aplicables para demostrar:

a) *Si $f(P)$ es suma de varias funciones del mismo punto, la integral de $f(P)$ es la suma de las integrales de éstas, sobre el mismo dominio.*

b) *Si la función se multiplica por un número, su integral queda también multiplicada por él.*

Es, por tanto, legítimo, sacar fuera del signo todo coeficiente constante o independiente de P; pero no se puede efectuar tal operación, si el factor depende de P.

c) *Si $f(P) < g(P)$ la integral de la 1.ª es $\leq$ que la integral de la 2.ª sobre el mismo recinto. Si son continuas, queda excluído el caso de igualdad.*

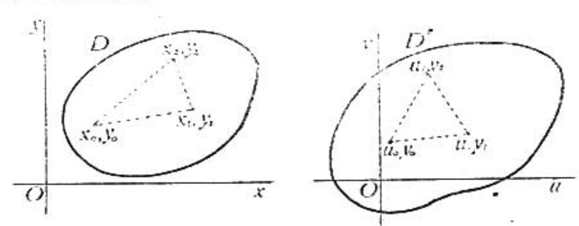
d) *Si $f(P)$ es continua en el dominio D, de área α, su integral es igual al producto de α por un valor de $f(P)$ intermedio entre el mínimo y el máximo.*

256. — Cambio de variables en las integrales múltiples.

Si entre los planos cartesianos (u, v) y (x, y) se establece una correspondencia punto a punto por las fórmulas

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad [1]$$

cada recinto se transforma en otro, y vamos a obtener la relación entre sus áreas.



El área del recinto *D* puede obtenerse como límite de la suma de triángulos cuyos lados tienden a cero; y el área de *D'* como límite de la suma de las áreas de los triángulos formados por los puntos homólogos. (Sin querer decir con esto que los lados de uno se transformen en los del otro por las fórmulas [1]).

Suponiendo *continuas* las derivadas de x, y (y por tanto su jacobiano) vamos a demostrar que la razón de áreas de los recintos homólogos es ésta:

$$[2] \qquad \Delta\sigma = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta\sigma'$$

o brevemente: $\Delta\sigma = J . \Delta\sigma'$, llamando J al jacobiano, y debiendo tomarse el valor de este jacobiano en un cierto punto interior. Al tender a 0 los recintos resulta: *el jacobiano en cada punto es el coeficiente de dilatación areolar en ese punto.*

El área del recinto *D* puede calcularse como límite de la suma de triángulos contenidas en él, y viene expresada así:

$$[3] \qquad S = \int \int dx \,.\, dy = \int \int \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \,.\, dv$$

o brevemente:

$$\int d\sigma = \int J \,.\, d\sigma'$$

fórmula completamente análoga a la de las integrales simples.

Si en vez del área se tiene una integral doble cualquiera:

$$\int f(x, y)\, d\sigma = \text{lím}\, \Sigma f(x, y)\, \Delta\sigma$$

y se efectúa la sustitución de variables resulta la fórmula general:

$$[4] \qquad \int_{D} f(x, y)\, d\sigma = \int_{D'} f(x, y)\, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, d\sigma'$$

que expresa la integral en el dominio D mediante otra integral sobre el dominio homólogo D'.

Análoga fórmula es aplicable a todas las integrales múltiples.

EJEMPLO. — Sea el momento polar de inercia del dominio D expresado en coordenadas cartesianas y en polares por las integrales:

$$\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy \qquad \int\int r^2 . r . dr . dw$$

esta 2.ª fórmula se puede establecer directamente, o bien deducirla de la 1.ª por cambio de variables, introduciendo como factor el jacobiano, que se calcula así:

$$x = r \cos w \qquad y = r \operatorname{sen} w \qquad \begin{vmatrix} \cos w & -r \operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen} w & r \cos w \end{vmatrix} = r$$

En el ejemplo de (255) el jacobiano vale -2, indicando el signo que los elementos de área homólogos tienen sentidos opuestos; como se observa en la figura comparando los sentidos de los contornos homólogos.

DEMOSTRACIÓN. — Las áreas de los triángulos homólogos son respectivamente:

$$\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}; \qquad \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} u_1 - u_0 & v_1 - v_0 \\ u_2 - u_0 & v_2 - v_0 \end{vmatrix}$$

o brevemente

$$\Delta\sigma = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix} \qquad \Delta\sigma' = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}$$

pero la fórmula del incremento finito permite escribir el primer determinante así:

$$\begin{vmatrix} x'u\, \Delta_1 u + x'v\, \Delta_1 v & y'u\, \Delta_1 u + y'v\, \Delta_1 v \\ x'u\, \Delta_2 u + x'v\, \Delta_2 v & y'u\, \Delta_2 u + y'v\, \Delta_2 v \end{vmatrix}$$

Como cada derivada debe tomarse en un punto intermedio distinto, conviene unificarlas, tomando todas en un mismo punto (u, v) del triángulo; y si las derivadas son uniformemente continuas, se logrará, tomando los lados de todos los triángulos menores que un número l suficientemente pequeño, que las

derivadas que figuran en este determinante difieran de sus valos en el punto (u, v) menos de ε; luego cada elemento del determinante tiene un error menor que $2\varepsilon l$, y el error del determinante tiene una cota del tipo $kl^2\varepsilon$; luego si designamos por $x'_u, \ldots,$ las derivadas en ese punto u, v del triángulo, la fórmula anterior expresa $\Delta\sigma$ con error $< kl^2\varepsilon$.

Este determinante se puede descomponer en producto (*) así:

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta_1 u & \Delta_1 v \\ \Delta_2 u & \Delta_2 v \end{vmatrix}$$

el primer factor es el jacobiano J del par (x, y) respecto del par (u, v), luego $|\Delta\sigma - J \cdot \Delta\sigma'| < kl^2\varepsilon$; y suponiendo que los triángulos de D' se eligen partiendo por su diagonal los cuadrados del reticulado cartesiano, es $\Delta\sigma' = \frac{1}{2} l^2$; por tanto, dividiendo por $\Delta\sigma'$ la acotación anterior, resulta $\Delta\sigma/\Delta\sigma' \to J$, para $l \to 0$.

Además: $\Sigma\Delta\sigma$ y $\Sigma J \cdot \Delta\sigma'$ difieren en menos de $k\varepsilon\Sigma l^2 \leq k\varepsilon$. área de D'; luego tienen el mismo límite, quedando demostrada [3], y por el teorema del valor medio (255, d) resulta [2].

Esta fórmula [2] es completamente análoga a la ya conocida del cambio de variable en la recta:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du$$

Finalmente, si $|f(x, y)| < M$ multiplicando por f y sumando, resulta la acotación:

$$|\Sigma f \cdot \Delta\sigma - \Sigma f \cdot J \cdot \Delta\sigma'| < Mk\varepsilon \text{ . área de } D'$$

luego ambas sumas tienen el mismo límite, y queda demostrada [4].

EJERCICIOS

1. — Conocido el volumen de la esfera de radio 1, probar inmediatamente que el del elipsoide de semiejes a, b, c se deduce multiplicándolo por $a\,b\,c$.

2. — Se llaman *coordenadas parabólicas* de un punto P respecto del foco O, a los parámetros de las dos parábolas de foco O y eje x, que pasan por P. Calcular el jacobiano de esta transformación de coordenadas.

(*) Basta recordar la fórmula de multiplicación de dos determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p_1 + b_1 q_1 & a_1 p_2 + b_1 q_2 \\ a_2 p_1 + b_2 q_1 & a_2 p_2 + b_2 q_2 \end{vmatrix}$$

que se comprueba fácilmente sin más que descomponer este último en suma de cuatro determinantes.

AREAS Y TANGENTES EN COORDENADAS POLARES

257. — Determinación de la tangente.

Aunque este problema corresponde a los primeros capítulos, conviene agruparlo con el de la cuadratura siendo una simple aplicación del cambio de variables. En coordenadas cartesianas, la $\operatorname{tg} \tau$ del ángulo que forma la tangente a la curva $r = f(t)$ con el radio vector, cuya pendiente es $k = y/x$, viene dada así:

$$\frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{x.dy - y.dx}{x.dx + y.dy}$$

pero las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$x = r.\cos t \quad \therefore \quad dx = \cos t.dr - r.\operatorname{sen} t.dt$$

$$y = r.\operatorname{sen} t \quad \therefore \quad dy = \operatorname{sen} t.dr + r.\cos t.dt$$

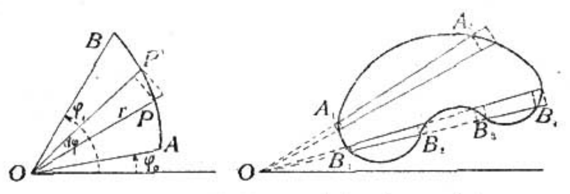
y la expresión anterior se reduce a $r.dt/dr$. Tomando el recíproco y llamando r' a la derivada del radio vector respecto del argumento t, resulta la fórmula

$$\operatorname{ctg} \tau = r'/r$$

Es decir: resulta la derivada logarítmica, mientras que la expresión análoga en cartesianas sería la derivada ordinaria. En los máximos y mínimos de r, es $r' = 0$ y la tangente perpendicular al radio.

258. — Cuadratura de recintos planos.

Para calcular el área limitada por la curva $r = f(t)$ y los ra-



dios de argumentos t_0 t_1, dividamos el ángulo que éstos comprenden por radios intermedios cualesquiera. El área limitada por cada dos radios consecutivos que forman ángulo Δt está comprendida entre

los sectores circulares cuyos radios son el máximo M_i y el mínimo m_i de los valores de r en el intervalo Δt, puesto que el sector curvilíneo está contenido en uno de estos sectores circulares y contiene al otro, y como la función es continua, también será igual al área de un sector circular del mismo ángulo y radio intermedio $f(\xi)$, siendo ξ un cierto ángulo comprendido en el intervalo Δt. Por tanto, el área tiene por expresión:

$$S = \text{lím.}\ \Sigma\ \tfrac{1}{2} f(\xi)^2\ \Delta t = \int f(t)^2\ dt = \tfrac{1}{2} \int r^2\ dt.$$

NOTA. — Las sumas de estas áreas de los sectores circulares máximos y mínimos:

$$S = \Sigma\ \tfrac{1}{2} M_i^2\ \Delta t \qquad s = \Sigma\ \tfrac{1}{2} m_i^2\ \Delta t \qquad [1]$$

difieren en

$$S - s = \tfrac{1}{2}\ \Sigma (M_i - m_i)\ (M_i + m_i)\ \Delta t < M\ \Sigma (M_i - m_i) \Delta t$$

si llamamos M al mayor de todos los valores de r en el intervalo total, puesto que

$$M_i + m_i < 2M$$

y como la función es uniformemente continua, es decir, se puede hacer que todas las oscilaciones $M_i - m_i$ sean menores que un número prefijado s, eligiendo todos los Δt suficientemente pequeños, resulta:

$$S - s < M . s\ \Sigma\ \Delta t = Ms(t_1 - t_0) \qquad [2]$$

es decir, el error o diferencia entre ambas expresiones aproximadas S y s puede hacerse tan pequeño como se quiera.

En esta fórmula se tiene un límite del error, es decir, una medida del grado de aproximación.

Espiral de Arquímedes: $r = at$.

El área comprendida desde el rayo origen $t = 0$ hasta el rayo de argumento t_1 es:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_0^{t_1} a^2\ t^2\ dt = \tfrac{1}{2}\ a^2 \int_0^{t_1} t^2\ dt = \tfrac{1}{2}\ a^2\ t_1^3/3$$

o también $S = r_1^3/6a$.

El área limitada por la primera espira vale $S = 4/3\ \pi^3\ a^2$

" " " " " segunda " " $S = 28/3\ \pi^3\ a^2$

es decir, siete veces la primera. El área de la tercera espiral vale 19 veces; etc.

Espiral logarítmica $r = k\ e^{mt} = k\ a^t$.

En particular, para la espiral $r = e^t$, el área limitada por dos radios es el producto de su semisuma por su semidiferencia.

Nótese que si $t_1 - t_0 > 2\pi$ resulta el área superpuesta a sí misma. Al tender t_0 hacia $-\infty$ resulta lím. $S = r^2_1/4m$.

Esta es el área de las infinitas espiras que tienden hacia el origen.

EJERCICIOS:

1. — Calcular el área de la cardioide de $r = a(1 + \cos t)$.

Solución: $S = \tfrac{1}{2}\ 3\pi\ a^2$ (seis círculos de diámetro a).

2. — Calcular el área de la lemniscata: $r = a \sqrt{\cos 2t}$.

Solución: $S = a^2$.

259. — Medias cuadráticas.

De igual modo que el promedio de n números se generaliza para infinitos mediante la expresión cartesiana del área (131), el promedio de cuadrados (importante en teoría de errores) se interpreta en coordenadas polares.

Puesto que la expresión del área en coordenadas polares es

$$2\,S = \int r^2\,dt = \text{lím.}\ \Sigma\, f(\xi)^2\,\Delta t$$

si los radios se toman equidistantes, es decir, si el intervalo $t_1 - t_0$ se divide en n partes iguales: $\Delta t = (t_1 - t_0) : n$, la suma anterior es el producto de la longitud $t_1 - t_0$ del intervalo por la fracción $(\Sigma\, f(\xi))^2 : n$ que es la media aritmética de los cuadrados de los radios elegidos arbitrariamente en cada intervalo, y la raíz cuadrada de su límite se llama *media cuadrática* de la función $f(t)$. Por tanto: llamando μ a la media cuadrática

$$\mu^2 = \frac{2\,S}{t_1 - t_0} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} f(t)^2\,dt \qquad [3]$$

es decir: la media cuadrática de una función es la raíz del cociente de la integral de su cuadrado por el intervalo.

Gráficamente se determinará, pues, fácilmente la media cuadrática de cualquier función, representándola en coordenadas polares, y midiendo con un planímetro o gráficamente el área del sector obtenido. Su duplo, dividido por el ángulo o intervalo, es el cuadrado del valor medio cuadrático en el intervalo considerado.

Ejemplo 1. — En Electrotécnica, sobre todo, tiene interés capital la determinación de la media cuadrática de las intensidades de una corriente en toda una onda; su valor se llama también *valor eficaz* de la corriente.

Sea, p. ej., la corriente alterna dada por esta tabla (Rose):

$t^s = 0$	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
$i = 5$	8	12	7	0	— 6	— 8,3	— 3	5

Dibujada la gráfica polar tomando t como ángulo, con unidad adecuada (p. ej., $20° = 0{,}001^s$) y para i un cm. por unidad, el área de la gráfica resulta ser 67,7 cm² y como el intervalo medido en radios vale $160° = 2{,}79$, resulta:

$$\text{Valor eficaz} = \sqrt{2.67{,}7/2{,}79} = 6{,}97.$$

El cociente del valor eficaz por el valor máximo se llama *eficacia*.

Ejemplo 2. — La potencia luminosa de una lámpara de arco varía según la inclinación del rayo respecto de la horizontal, es decir, es función de la coordenada φ pero no depende de λ. Basta, pues, construir la gráfica polar de la potencia en su plano vertical y hacerla girar alrededor de la vertical para tener la superficie de revolución que representa la potencia en cualquier dirección, mediante el radio vector correspondiente.

Constrúyase, p. ej., el diagrama polar con los datos siguientes (Rose), llamando φ a la latitud

$-\varphi = 8°$ 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°

potencia en bujías:

1000 1470 1800 1720 1200 960 800 720 600 480.

Siendo la iluminación que recibe una superficie el producto de ésta por la potencia, si trazamos una superficie esférica de radio r con centro en la lámpara, cada elemento superficial $d\sigma$ recibe una iluminación $P.d\sigma$ y la iluminación total es:

$$P\,d\,\sigma = 2\pi\,r \int_{-r}^{r} P\,d\,z \qquad [4]$$

efectuando la integración por zonas esféricas.

El cálculo práctico puede hacerse reduciendo la gráfica polar a cartesiana es decir: dibujada una semicircunferencia de centro O en la lámpara, limitada por el diámetro vertical, los puntos que en ella determinan los radios vectores se proyectan sobre dicho diámetro (o sobre una paralela) y se llevan como ordenadas los valores P dados. El área de la curva así obtenida es

$$\int_{-r}^{+r} P\,d\,z.$$

La altura media P_0 de esta curva resulta de dividir esta área por la base $2r$, y este valor medio P_0 se llama potencia luminosa media, es decir:

$$2r\,P_0 = \int_{-r}^{+r} P\,d\,r.$$

Una lámpara colocada en el mismo punto, cuya potencia fuera P_0 en todas direcciones, proyectaría sobre la superficie esférica de radio r una iluminación igual a

$$4\pi\,r^2 . P_0 = 2r\,P_0 . 2\pi\,r$$

expresión idéntica a la iluminación total [4] recibida de la lámpara estudiada.

Este método, que nada nuevo contiene respecto del modo de calcular valores medios (131), suele llamarse ampulosamente *diagrama de Rousseau.*

EJERCICIOS

1. — Calcúlense los valores medio (131) y eficaz de una función sinusoidal $y = \operatorname{sen} t$ en media onda.

Solución:

$$\text{Valor medio} = 2/\pi = 0{,}63663$$
$$\text{Valor eficaz} = 1/\sqrt{2} = 0{,}7071$$

Los mismos resultan para el coseno.

2. — Calcúlese el valor eficaz de una onda general alterna, es decir, la media cuadrática de una función periódica.

$$y = a_1 \cos t + b_1 \operatorname{sen} t + a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt$$

en el intervalo o período 2π.

Solución:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \ldots + a^2_n + b^2_n)}$$

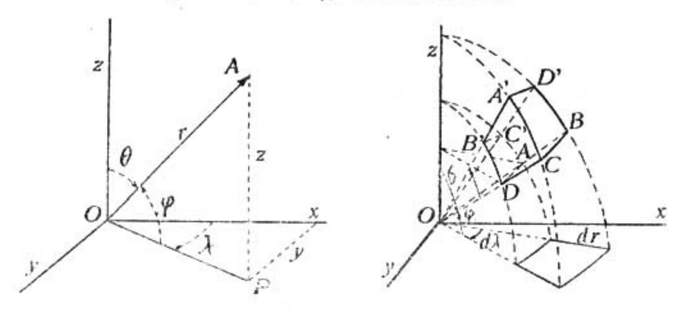
AREAS Y VOLUMENES EN COORDENADAS POLARES

260. — Coordenadas esféricas.

No siempre son las coordenadas cartesianas las más adecuadas para el cálculo de áreas y volúmenes. Para los cuerpos redondos son más naturales las coordenadas polares, también llamadas *esféricas* y las *semipolares* o *cilíndricas*.

Dado un triedro xyz todo punto del espacio está determinado dando: su distancia al origen o radio vector r; el ángulo φ que éste forma con el plano xy; el ángulo λ que el plano vertical rz forma con xz.

Por analogía con las coordenadas geográficas, a los números r, φ, λ los llamaremos brevemente: *radio, latitud* y *longitud*. A veces se utiliza el complemento θ de φ, llamado *colatitud*.



Las coordenadas cartesianas del punto se obtienen fácilmente observando que la proyección de r sobre el plano xy es $r \cos\varphi$; y sus dos proyecciones sobre los ejes x, y resultan multiplicando por $\cos\lambda$ y $\operatorname{sen}\lambda$:

$$x = r.\cos\varphi.\cos\lambda \qquad y = r.\cos\varphi.\operatorname{sen}\lambda \qquad z = r.\operatorname{sen}\varphi$$

de donde se despeja, recíprocamente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \operatorname{tg}\lambda = y/x; \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Con el sistema de coordenadas polares el espacio queda dividido del modo siguiente: los valores sucesivos de r dan esferas concéntricas de centro O; los valores de λ dan planos meridianos que pa-

san por el eje z; los valores de φ (o de θ) dan conos de revolución de eje z.

Si de las coordenadas r, φ, λ pasamos a las $r + dr$, $\varphi + d\varphi$, $\lambda + d\lambda$, las tres superficies que determinan cada uno de estos dos puntos limitan un cuerpo análogo al paralelepípedo de las coordenadas cartesianas. Las aristas (que son curvas) en el punto r, φ, λ son:

$AB = dr$ (rectilínea)

$AC = r \cdot d\varphi$ (círculo de radio r)

$AD = r \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$ (círculo de radio $r \cdot \cos\varphi$).

Considerado como paralelepípedo, su volumen viene dado aproximadamente como producto de estas tres longitudes, es decir:

$$r^2 \cos\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\lambda. \qquad [6]$$

El volumen de un cuerpo cualquiera es el límite de la suma de todos los elementos contenidos en él, al tender a 0 sus dimensiones y resulta la fórmula práctica:

$$V = \int\int\int r^2 \cdot \cos\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\lambda. \qquad [7]$$

que se resolverá por tres integraciones sucesivas, de igual modo que hacíamos con las coordenadas cartesianas. Si se trata de calcular la masa, siendo δ la densidad variable, función de r, φ, λ resulta:

$$\text{Masa} = \int\int\int \delta\, r^2 \cdot \cos\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\lambda.$$

NOTA. — Con la deducción anterior, corriente en los libros clásicos, queda la duda de si el error cometido en la determinación del elemento de volumen influye en el resultado final. Demostremos que el volumen calculado es exacto, anticipando la aplicación del teorema de Guldin que será demostrado en la lección siguiente.

Puesto que el cuerpo $A\,B\,C\,D\;A'\,B'\,C'\,D'$ es de revolución, basta multiplicar el área $A\,B\,D'\,C' = r_1\, d\,\varphi \cdot d\,r$ (r_1 es el radio medio) por el arco descrito por su centro de gravedad cuyo valor es: $r_2 \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$, llamando r_2, φ_2 las coordenadas de dicho centro de gravedad. El volumen viene dado, pues, exactamente por la fórmula:

$$r_1\, r_2 \cdot \cos\varphi \cdot d\,r \cdot d\varphi \cdot d\lambda$$

y como r_1, r_2 son números comprendidos entre r y $r + dr$, su producto es: $r_1\, r_2 = \xi^2$, siendo ξ otro número también comprendido entre ambos.

En definitiva: el volumen viene dado por el producto de $dr \cdot d\varphi \cdot d\lambda$ por el valor que toma la función $r^2 \cos\varphi$ en un punto del cuerpo $A\,B\,C\,D\;A'\,B'\,C'\,D'$. Según la definición de integral, el límite de la suma de estos elementos *exactos* de volumen viene expresado por la integral [7] anteriormente deducida.

Quienes han estudiado (256) poseen ya la demostración más elegante; pues el factor $r^2 \cos\varphi$ que aparece bajo el signo integral, no es sino el valor absoluto del jacobiano de la transformación, como se ve desarrollando el determinante.

Obtenga asimismo, como ejercicio, la fórmula de rectificación:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2 + r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\lambda^2$$

261. — Coordenadas cilíndricas.

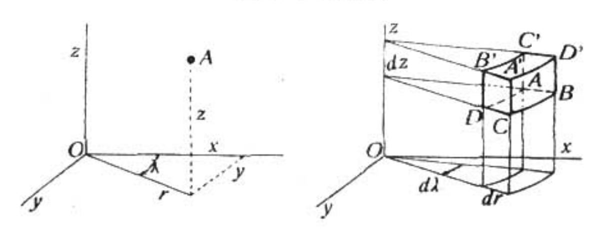
Cada punto viene determinado por los elementos siguientes: las coordenadas polares (r, λ) de su proyección horizontal, más la altura z sobre el plano xy.

Las coordenadas cartesianas se deducen inmediatamente:

$$x = r \cos \lambda \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \lambda \quad , \quad z = z.$$

El elemento de volumen se calcula así: el área del trapecio circular de radios r, $r + dr$ y ángulos λ, $+ \gamma \; d\lambda$ es exactamente: dr por el radio medio $r \, . \, d\lambda$ es decir:

$$\text{Area} = r \, . \, dr \, . \, d\lambda.$$



El volumen del cuerpo prismático limitado por el par de planos, λ, $\lambda + d\lambda$, por el par de planos z, $z + dz$ y por los cilindros r, $r + dr$ es exactamente: $r \, . \, dr \, . \, d\lambda \, . \, dz$, y por tanto el volumen de un cuerpo cualquiera viene expresado por la fórmula:

$$V = \int \int \int r \, . \, dr \, . \, d\lambda \, . \, dz. \qquad [8]$$

De igual modo que se vió para las coordenadas esféricas, esta fórmula [8] es consecuencia inmediata de lo demostrado en (256), por ser r el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

Dedúzcase la fórmula de rectificación: $ds^2 = dr^2 + r^2 \, . \, d\lambda^2 + dz^2$

262. — Cubicación y cuadratura de cuerpos redondos.

Supongamos un arco de curva en el plano xy, definido por la ecuación $y = f(x)$, y calculemos el volumen del cuerpo redondo engendrado por el trapezoide que determina con el eje x, al girar en torno del eje y.

Si la curva generatriz está determinada en el intervalo (a, b) y lo dividimos en intervalos, considerando las superficies cilíndricas $r = r_1$, $r = r_2$, ... éstas cortan a la superficie de revolución según circunferencias, y el volumen buscado aparece como límite de la suma de los cilindros anulares (tubos) de radios sucesivos r_1, r_2, r_3 ....

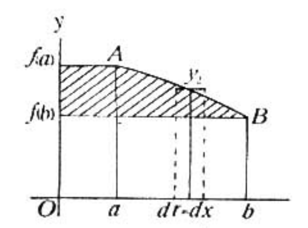
La base de cada uno de estos anillos tiene el área: $2\pi r\,\Delta r$, llamando r a la semisuma de ambos radios o radio medio; pudiendo tomarse como altura de cada cilindro una ordenada cualquiera en cada intervalo.

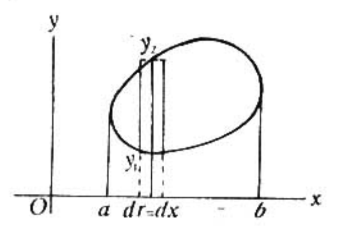
El volumen del cilindro anular que tiene como altura la ordenada $f(r)$ que corresponde a dicho punto r es: $2\pi r f(r)\Delta r$ y el límite de la suma de estos elementos, por la definición de integral es:

$$V = 2\pi \int_a^b r\, f(r)\, dr = 2\pi \int_a^b xy\, dx \qquad [9]$$

si llamamos xy a las coordenadas cartesianas en el plano meridiano según la figura.

NOTA: Directamente se llega a esta fórmula sin la deducción anterior, aplicando la fórmula [8] del volumen de coordenadas cilíndricas; integrando sucesivamente respecto de λ, z, r.





Más general: dado un recinto plano limitado por una curva cerrada, el radio variará entre dos valores a, b y para cada valor de r resulta un segmento de ordenada $f(r)$ interceptado por el recinto. La fórmula del volumen es general, o sea:

$$V = 2\pi \int_a^b r\, f(r)\, dr = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)\, dx.$$

Si lo que se desea calcular es un segmento de volumen limitado por dos planos paralelos, la integral

$$2\pi \int_a^b xy\,.\,dx$$

no dará el volumen buscado sino el engendrado por $a\,AB\,b$; a él se puede agregar el cilindro $\pi a^2 f(a)$ para llenar el vacío central, y después restarle el cilindro $\pi b^2 f(b)$ en que se apoya el cuerpo dado.

Su volumen, en definitiva, es:

$$V = 2\pi \int_a^b xy\,.\,dx + \pi\, a^2 f(a) - \pi\, b^2 f(b).$$

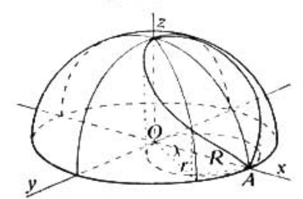
EJEMPLO 1: *Volumen de la bóveda de Viviani.* — **Se llama así a la parte de superficie esférica limitada por el cilindro cuyo diámetro es un radio de ella.**

En coordenadas cilíndricas:

$$V = \int \int \int r\, d\, r\,.\, d\,\lambda\,.\, d\, z = \int \int r\, d\, r\,.\, d\,\lambda\, \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\,\lambda \int_0^{R \cos \lambda} r\,.\, dr\, \sqrt{R^2 - r^2}$$

La integral de $r \sqrt{R^2 - r^2} dr$ es $(-R^3 \operatorname{sen}^3 \lambda + R^3) : 3$, e integrando de nuevo entre 0 y $\pi/2$, resulta:



$$3V = -2R^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 \lambda\,.\, d\lambda + 2R^3 \int_0^{\pi/2} d\lambda$$

$$3V = -4/3\, R^3 + \pi\, R^3 = R^3 (\pi - 4/3).$$

Veamos un ejemplo de la simplificación que en el cálculo de áreas de superficies introduce el uso de coordenadas polares del plano xy en la fórmula (253).

EJEMPLO 2: *Area de la bóveda de Viviani.* — Puesto que la normal a la superficie esférica es el radio, el coseno del ángulo que forma con el eje z es z/R; luego:

$$S = R \int \int dx\, dy/z$$

y en coordenadas polares:

$$S = R \int \int r\, d\, r\, d\lambda / \sqrt{R^2 - r^2}$$

fijando λ e integrando respecto de r, resulta: $-(R^2 - r^2)^{1/2}$; pero fijado λ el radio r oscila entre 0 y $R.\cos \lambda$, luego:

$$-(R^2 - r^2)^{1/2} \Big|_0^{R \cos \lambda} = -R \operatorname{sen} \lambda + R$$

integrando respecto de λ entre 0 y $\pi/2$ para obtener la mitad de la bóveda:

$$\int R\,.\, d\lambda - \int R \operatorname{sen} \lambda\,.\, d\lambda = R(\tfrac{1}{2}\pi - 1)$$

La superficie de la bóveda es: $S = R^2 (\pi - 2)$.

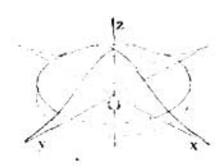
Es éste el *problema florentino*, o de Viviani, discípulo de Galileo, que se propuso trazar en la superficie esférica una ventana cuadrable.

NOTA. — Si hubiéramos tomado la integral entre $-\pi/2$, $\pi/2$ como el $\cos \lambda$ se anula en ambos extremos habría resultado la fórmula errónea: $S = R^2 \pi$. La causa es que no debe integrarse $\operatorname{sen} \lambda$, sino su valor absoluto.

EJEMPLO 3: Como aplicación importante calculemos el volumen del cuerpo engendrado por la curva: $z = e^{-x^2}$ y limitado por el cilindro $r = a$.

$$V = 2\pi \int_0^a r\,.\, e^{-r^2} dr = -\pi \int_0^a e^{-r^2}\, d(-r^2) = \pi e^{-r^2} \Big|_a^0 = \pi\,(1 - e^{-a^2})$$

Si consideramos ahora el cuerpo limitado por la superficie indefinida con el plano xy, se llama volumen del mismo al límite del volumen limitado cuando *el radio a crece infinitamente; el límite de e^{-a^2} es 0 y queda solamente π.*



Este límite se expresa más brevemente escribiendo así: $\int_0^\infty$ cuyo significado no es otro sino este: $\lim\limits_{a \to \infty} \int_0^a$

En definitiva, podemos escribir:

$$V = 2\pi \int_0^\infty r \,.\, e^{-r^2}\, dr = \lim_{a \to \infty} 2\pi \int_0^a r \,.\, e^{-r^2}\, dr = \pi.$$

Cálculo de la integral de Gauss

Este resultado tiene aplicación en el cálculo de la integral de Poisson o Gauss, fundamental en la teoría de los errores.

En efecto, pongamos

$$I_a = \int_0^a e^{-x^2}\, dx = \int_0^a e^{-y^2}\, dy$$

y formemos la integral doble sobre el cuadrado de lado Oa:

$$\int \int e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^a e^{-x^2}\, dx \,.\, \int_0^a e^{-y^2}\, dy = I_a^2.$$

Pasando al límite para $a \to \infty$ y llamando I a la integral de la exponencial de 0 a ∞, o sea $I = \lim.\, I_a$, resulta que el volumen del cuerpo de revolución antes calculado en coordenadas polares, y cuyo valor es π, es igual a $4I^2$, luego $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, es decir:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Cuadratura de superficies redondas. — Aunque la fórmula (253) es general, conviene considerar la superficie como límite de suma de los anillos tronco-cónicos engendrados por los elementos ds de tangente; y si la generatriz está en el plano xz, resulta:

$$S = 2\pi \int z \,.\, ds = 2\pi \int z \sqrt{1 + z'^2} \,.\, dx \qquad [10]$$

Para relacionarla con (253), demuéstrese esta regla práctica:

Dada en el plano xz la curva $z = f(x)$, la ecuación de la superficie engendrada al girar en torno del eje z, es $z = f(r)$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Aplicada a esta ecuación $z = f(r)$ la fórmula (253), resulta la nueva fórmula [10], mucho más sencilla y práctica.

EJERCICIOS

1. — Rectificar la curva que limita la bóveda de Viviani.

(Demuéstrese que la ecuación en coordenadas esféricas, es $\varphi = \lambda$ y la fórmula dada en (260) conduce fácilmente a una integral elíptica de parámetro $1 : \sqrt{2}$.)

2. — Calcular el volumen del toro en coordenadas cilíndricas.

MOMENTOS Y CENTROS DE GRAVEDAD

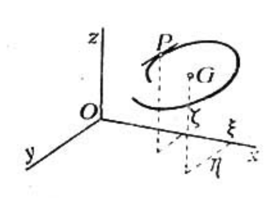
263. — Momentos de líneas, superficies y cuerpos.

El concepto de momento definido en (147) se generaliza fácilmente. Dada una línea, superficie o cuerpo material, dotada de densidad δ, constante o variable (*), puede considerarse como límite de una suma de masas rectilíneas, rectangulares, o paralelepípedos, respectivamente. Calculada la suma de momentos de estas masas componentes respecto de un centro, eje o plano, su límite se llama momento de la curva, superficie o cuerpo material respecto de este centro, eje o plano, y según sean aquellos momentos de primero o segundo orden, es decir, según que cada masa esté multiplicada por la distancia o por el cuadrado de la distancia al centro, eje o plano, así resultará el momento de primero o segundo orden (*estático* o de *inercia*) de la masa curvilínea considerada.

En particular, si el cuerpo es homogéneo ,es decir, su densidad constante, las masas son proporcionales a las longitudes, áreas o volúmenes, y se pueden sustituir por éstas, resultando así momentos *geométricos*, esto es, sumas de productos de las longitudes, áreas y volúmenes componentes por sus distancias o cuadrados de distancias al centro, eje o plano. Una vez calculados estos momentos geométricos bastará multiplicar por la densidad, para tener el momento mecánico.

Si consideramos un elemento de arco ds, es decir, un trozo de tangente que suponemos tiene su punto medio de contacto, y es x la abscisa de este punto de contacto, el producto $x.ds$ es el momento de ese segmento respecto del plano yz. El límite de la suma de momentos, o sea el momento del arco AB es, pues, la integral:

$$M_x = \int x.ds$$



y análogamente

$$M_y = \int y.ds \qquad M_z = \int z.ds.$$

Si el arco tiene densidad variable δ, las fórmulas son:

$$M_x = \int \delta.xds;$$
$$M_y = \int \delta.yds;$$
$$M_z = \int \delta.zds.$$

(*) Acerca del concepto de *densidad* véase la nota de párrafo (266).

Análogamente: el momento de un elemento $dx.dy = d\sigma$ de área plana respecto de su plano es nulo; respecto de los planos yz, xz, vienen expresados por las integrales

$$M_x = \int \delta . x . d\sigma; \quad M_y = \int \delta . y . d\sigma \qquad [1]$$

es decir, coinciden con los momentos respecto de los ejes y, x.

Estas fórmulas valen asimismo para recintos de superficie curva, pero en ellas ya no es $d\sigma$ el producto $dx.dy$, sino éste dividido por $\cos(nz)$ como se explicó en (253) y además aparece $M_z = \int \delta . z . d\sigma$.

Los momentos de un cuerpo homogéneo respecto de los tres planos son análogamente:

$$M_x = \int \delta . x . d\tau \quad M_y = \int \delta . y . d\tau \quad M_z = \int \delta . z . d\tau \qquad [2]$$

siendo $d\tau = dx . dy . dz$.

La ecuación de un plano cualquiera que pase por O, reducida a su forma normal, es decir, después de dividida por la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de los coeficientes, sea:

$$Ax + By + Cz = 0$$

la distancia del punto (x, y, z) a este plano se obtiene sustituyendo estas coordenadas en el mismo, luego el momento del arco AB respecto de ese plano es:

$$\int (Ax + By + Cz) ds = AM_x + BM_y + CM_z \qquad [3]$$

la misma fórmula vale para las superficies y cuerpos.

Calculados, pues, los momentos respecto de los planos coordenados se deduce fácilmente el momento respecto de otro plano.

264. — Centros de gravedad.

Suele definirse el centro de gravedad de una línea material, superficie o cuerpo, como punto de aplicación de la resultante de un sistema de fuerzas paralelas aplicadas en los infinitos puntos materiales que los componen. Esta expresión incorrecta debe entenderse así: El momento de la línea, superficie o cuerpo, según se acaba de definir, respecto de todo plano que pase por el centro de gravedad debe ser nulo. En particular, si el hilo, superficie o volumen es homogéneo, es decir, su densidad constante, siendo la masa proporcional a la longitud, área o volumen, se puede sustituir el momento estático por el geométrico.

Puesto que el momento respecto de un plano que pasa por la intersección de otros tres rectangulares es la suma de los momentos respecto de éstos por los coeficientes de la ecuación del plano, según se ha demostrado [3], resulta que para la determinación del baricentro de una figura cualquiera, basta imponer la condición de que sean nulos los momentos respecto de los tres planos trazados por él paralelamente a los coordenados.

265. — Baricentros de curvas.

Los momentos del arco AB respecto de los planos $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ son:

$$\int \delta (x - \xi) ds = 0 \qquad \int \delta (y - \eta) ds = 0 \qquad \int \delta (z - \zeta) ds = 0$$

de donde se deducen las coordenadas ξ, η, ζ del baricentro, que son:

$$\xi = \frac{\int \delta . x . ds}{\int \delta . ds} \qquad \eta = \frac{\int \delta . y . ds}{\int \delta . ds} \qquad \zeta = \frac{\int \delta . z . ds}{\int \delta . ds}$$

Si el arco es homogéneo, la constante δ se puede sacar como factor común y después de simplificar resultan:

$$\frac{\int x . ds}{s} \,, \qquad \frac{\int y . ds}{s} \,, \qquad \frac{\int z . ds}{s}$$

siendo s la longitud total del arco.

266. — Baricentros de superficies.

Si la curva es plana, es $\zeta = 0$ y basta calcular ξ, η. Si es simétrica respecto del eje y, basta calcular η puesto que $\xi = 0$. Si la curva es cerrada, con centro de simetría, éste es el baricentro.

Dado un recinto R en el plano xy si δ es la *densidad* (*) variable en cada punto, (es decir, la masa por unidad de área) el momento total respecto de los planos $x = \xi$, $y = \eta$, o lo que es lo mismo ,respecto de estas rectas situadas en el plano xy, es respectivamente:

$$\int \delta (x - \xi) d\sigma = 0 \qquad \int \delta (y - \eta) d\sigma = 0$$

(*) Este concepto de *densidad en un punto* no se puede definir claramente sino de modo análogo a como se ha definido la velocidad en un momento, la carga es un punto, etc., mediante la *derivada*. Pero tratándose de dos o más variables hay que estudiar previamente las *funciones de recinto*.

condiciones que determinan las coordenadas ξ, η:

$$\xi = \frac{\int \delta . x . d\sigma}{\int \delta . d\, \sigma} \qquad \eta = \frac{\int \delta . y . d\sigma}{\int \delta . d\, \sigma}$$

En particular, si δ es constante, puede suprimirse como factor común y resultan

$$\frac{\int x . d\sigma}{A} \,, \quad \frac{\int y . d\sigma}{A}$$

siendo A el área total del recinto.

Siendo $d\sigma = dx . dy$, estas integrales pueden calcularse por dos integraciones sucesivas, pero también pueden expresarse, desde luego, por integrales simples:

$$\xi = (1/A) \int_a^b x(y_2 - y_1) dx \qquad \eta = (1/A) \int_c^d y(x_2 - x_1) dy$$

NOTA. — Si el recinto es un trozo de superficie curva, $z = f(x, y)$ las fórmulas son las mismas, pero la diferencial de área $d\sigma$ no es $dx . dy$ sino $d\sigma = dx . dy : \cos nz$.

En particular, es importante el caso en que la superficie es esférica. Para ella la normal es el radio y $\cos nz = z/R$. Por tanto:

$$\zeta = (R/A) \int dx . dy = RA_0 . A$$

es decir: *la altura del baricentro de una porción de superficie esférica de área A es igual al radio por la razón entre su proyección A_0 y su área A.*

Así, por ejemplo, la altura del baricentro de la bóveda de Viviani (N.º 262, Ej. 2) es:

$$\zeta = R \frac{\frac{1}{4} \pi R^2}{(\pi - 2) R^2} = \frac{1}{4} \frac{R\pi}{\pi - 2}$$

El baricentro del hemisferio superior de la esfera de centro 0 y de radio R tiene las coordenadas $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = R/2$.

267. — Baricentros de cuerpos.

De modo totalmente análogo al anterior se deduce el baricentro de un cuerpo de densidad δ (masa por unidad de volumen) variable, cuyas coordenadas ξ, η, ζ, son:

$$\frac{\int \delta . x . d\tau}{\int \delta . d\tau} \,, \quad \frac{\int \delta . y . d\tau}{\int \delta . d\tau} \,, \quad \frac{\int \delta . z . d\tau}{\int \delta . d\tau}$$

extendiendo las integrales a todo el cuerpo; y si δ es constante, puede suprimirse como factor común.

Nótese que $d\tau$ designa el elemento de volumen, que puede tomarse en coordenadas cartesianas o polares, según convenga por la forma de la superficie.

EJEMPLO. — En el número (254) hemos calculado el momento del octante de esfera respecto del plano xy. Hagamos ahora el cálculo en coordenadas esféricas, y dicho momento vendrá expresado por la integral triple de $z . r^2 \cos \varphi$ que se calcula muy sencillamente y vale $\pi R^4/16$.

Compárese la brevedad de este método con el cartesiano seguido anteriormente. No menos sencillo es usar coordenadas cilíndricas.

Las coordenadas del baricentro del octante de esfera, son por tanto:

$$\xi = \eta = \zeta = 3/8\, R.$$

268. — Teoremas de Guldin.

Relacionan las áreas y volúmenes de los cuerpos de revolución con la longitud recorrida por el centro de gravedad de la generatriz de la superficie o cuerpo, y tienen muy útil aplicación, directa e inversa.

El área de una superficie de revolución alrededor del eje x viene expresada por

$$S = 2\pi \int y ds$$

pero obsérvese que esta integral es el momento de la línea generatriz respecto del eje x, es decir, el numerador que figura en la fórmula que determina la coordenada η del baricentro, y cuyo denominador es la longitud s de dicha curva, luego $S = 2\pi\eta . s$.

Y si se considera solamente un sector de superficie de revolución, es decir, si la curva generatriz gira un arco, bastará poner dicho arco en vez de $2\pi\eta$. Es decir:

El área engendrada por un arco al girar alrededor de un eje de su plano, que no lo corta, es igual a su longitud por la longitud del arco de circunferencia descrito por el centro de gravedad.

El volumen engendrado por un área al girar alrededor del eje y es:

$$V = 2\pi \int xy . dx$$

donde bajo el signo integral aparece el elemento de área $y . dx$ por la distancia x al eje y, luego es el momento total del área respecto del eje y; y recordando la fórmula que da la ordenada del centro de gravedad del área, esta integral resulta igual a: ξA, luego $V = A . 2\pi\xi$, es decir:

El volumen engendrado por un recinto que gira alrededor de un eje no secante es igual al producto del área del recinto por la longitud del arco descripto por su centro de gravedad.

Los teoremas de Guldin (ya sabidos de Pappo) sirven para calcular áreas y volúmenes de superficies redondas cuando se conoce el centro de gravedad, del arco o área móvil. Y también para calcular el centro de gravedad, cuando se conoce el volumen o el área engendrada.

EJEMPLO 1. — Area del toro engendrado por la circunferencia de radio r, siendo el radio de giro a.

$$S = 2\pi . r . 2\pi\, a = 4\pi^2\, a\, r$$

$$V = \pi r^2 . 2\pi\, a = 2\pi^2\, r^2\, a.$$

Compárese la brevedad de este método con el del cálculo directo en coordenadas cartesianas.

EJEMPLO 2: *Centro de gravedad de un arco de circunferencia.* — Si R es el radio y 2α la amplitud, la longitud es $2R\alpha$. Haciéndolo girar alrededor del eje y perpendicular al eje x de simetría, el área de la zona engendrada es

$$2\pi R . 2R \operatorname{sen} \alpha = 2R\alpha . 2\pi\xi$$

luego

$$\xi = R \operatorname{sen} \alpha / \alpha \quad ; \quad \eta = 0.$$

EJEMPLO 3: *Centro de gravedad del semicírculo.* — Por simetría debe estar en el radio perpendicular a la base a una distancia ξ de la misma; haciendo girar el semicírculo engendra una esfera de volumen:

$$4/_3\pi\, R^3 = \tfrac{1}{2}\pi\, R^2 . 2\pi\xi$$

de donde se despeja:

$$\xi = 4R/3\pi$$

EJEMPLO 4: Hagamos girar el semicírculo alrededor del eje que dista a de su base. Aplicando de nuevo el teorema de Guldin, el volumen engendrado vale:

$$V = \tfrac{1}{2}\pi R^2 . 2\pi(a \pm \xi) = \pi^2\, R^2 (a \pm 4R/3\pi)$$

según que el eje esté situado del lado de la concavidad o de la convexidad.

He aquí, pues, calculado el volumen de las dos porciones externa e interna del toro; su suma coincide naturalmente con la expresión $2\pi^2\, R^2\, a$ arriba obtenida para el volumen del toro.

EJERCICIO:

Calcúlese análogamente el centro de gravedad de la semicircunferencia y aplíquese a la determinación del área de cada una de las dos regiones convexa y cóncava del toro.

269. — Momentos de inercia.

Momento de *inercia* (o de segundo orden) de una masa aislada m respecto de un eje es el producto de m por el cuadrado de su distancia al eje, es decir: $I = m\rho^2$.

Tales momentos se llaman *axiales*, y si ρ es la distancia a un punto o a un plano, el momento se llama *polar* o *plano*, respectivamente.

Si la masa es un hilo, superficie o volumen, las expresiones del momento de inercia se definen como límites de sumas de los momentos de sus elementos, es decir, por integrales.

Si la masa es plana, resultan estas reducciones:

Momentos polares son los momentos de inercia respecto de ejes perpendiculares al plano o, lo que es lo mismo, respecto de puntos del plano.

Momentos axiales son los momentos respecto de planos perpendiculares al dado, o lo que es lo mismo, respecto de ejes situados en el plano.

El momento respecto de un punto O lo designaremos I_0 y respecto de un eje y lo designaremos I_x puesto que en él figuran las distancias x.

Si el momento polar o axial de una masa plana M es I, se llama radio de giro al segmento ρ que cumple la condición

$$I = M\rho^2 \quad \text{es decir:} \quad \rho = \sqrt{I/M}$$

Representa, pues, el *radio de giro la distancia del centro o del eje a que debe colocarse la masa concentrada M para obtener un momento igual al de toda la masa superficial.* Obsérvese (259) que no es sino la media cuadrática de todos los radios u ordenadas del recinto, según sea el momento polar o axial.

Si, como supondremos en lo sucesivo la masa es uniforme, es decir, proporcional al area, se puede sustituir en las fórmulas, masa por área, tomando como unidad de masa la masa de la unidad de área.

Las relaciones fundamentales a que satisfacen los momentos de inercia de las masas planas, o áreas, son éstas:

El momento polar respecto de 0 es la suma de los momentos axiales respecto de los ejes x, y.

En efecto, siendo $r^2 = x^2 + y^2$, integrando resulta: $I_0 = I_x + I_y$.

El momento de inercia respecto de cualquier eje es igual al momento respecto del eje paralelo trazado por el centro de gravedad más el producto de la masa (o del área) por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

En efecto, si adoptamos el baricentro como origen, y el eje dado es el $x = d$ tenemos:

$$(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$$

e integrando sobre la superficie resultan tres integrales.

De estas tres integrales la segunda es el momento estático respecto del eje y que pasa por el baricentro, y, por tanto, es nula. Queda, por consiguiente:

$$I_d = I_x + Ad^2.$$

EJEMPLO 1. — Momento de inercia del rectángulo de base b y altura a respecto de su base.

Adoptada ésta como eje y tomando elementos rectangulares de base b y altura dy, resulta:

$$I_x = \int_0^a by^2 . dy = a^3\, b/3 = \text{area por } a^2/3$$

Luego $\rho = a/\sqrt{3}$.

EJEMPLO 2. — Idem respecto de su base media o eje neutro.

Adoptado éste como eje x resulta:

$$I_x = \int_{-a/2}^{a/2} by^2\, dy = a^3\, b/12 = \text{área por } a^2/12$$

de donde resulta: $\rho = a/2\sqrt{3}$.

EJEMPLO 3. — Idem respecto de una paralela a la base, a distancia d del centro. Según la propiedad segunda:

$$I_d = a^3\, b/12 + a\, b\, d^2$$

En particular para $d = \frac{1}{2}a$ resulta el ejemplo 1.º.

EJEMPLO 4. — Momento polar de un anillo circular respecto de su diámetro. Sean r y R los radios interno y externo; tomando coronas circulares como elementos de área, resulta:

$$I_0 = 2\pi \int_r^R r^3\, dr = \tfrac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)\ ,\ \rho^2 = \tfrac{1}{2}\pi(R^4 - r^4)\ :(R^2 - r^2) = \tfrac{1}{2}(R^2 + r^2)$$

Puesto que los momentos respecto de los diámetros perpendiculares son iguales por simetría, y su suma es I_0 resulta:

$$I_x = \tfrac{1}{4}\pi(R^4 - r^4)$$

Para el círculo, resulta, por ser $r = 0$

$$I_0 = \tfrac{1}{2}\pi R^4 \quad , \quad \rho = R/\sqrt{2} \quad , \quad I_x = \tfrac{1}{4}\pi R^4 \quad , \quad \rho = \tfrac{1}{2}R.$$

270. — Centros de presión.

La presión que un líquido cualquiera ejerce sobre unidad de superficie sumergida es proporcional a la profundidad, es decir, tiene por expresión kz, adoptando como positivo el sentido hacia abajo. El punto de aplicación de la presión resultante se llama *centro de presión* y se puede calcular como el centro de gravedad cuando la densidad es $\delta = kz$.

Hay una relación notable entre el baricentro de un área, su centro de presión y el radio de giro respecto de la traza con el plano de nivel del líquido. Suponiendo el área vertical, sea ζ la coordenada del baricentro, η la del centro de presión y ρ el radio de giro.

La definición del centro de presión implica que el momento de todas las presiones es igual al momento de la presión total P, aplicada en el centro de presión, es decir:

$$\int z^2\, d\sigma = \eta \int z\, d\sigma = \eta\, \zeta . A$$

y como el primer miembro es el momento de inercia, igual a $A\rho^2$, resulta

$$\eta\,\zeta = \rho^2 \qquad [1]$$

El radio de giro de un área sumergida respecto de la línea de nivel de su plano, es media proporcional entre las distancias a ésta del baricentro y del centro de presión.

Esta relación permite determinar un elemento, conocidos los otros dos y subsiste aunque el plano sumergido no sea vertical, pues si forma con el horizontal ángulo α, la presión queda multiplicada por sen α y también el momento de presiones, luego η (coordenada del centro de presión en su plano) no varía y tampoco ζ ni ρ.

EJEMPLO. — Sea una compuerta vertical rectangular de base $b = 1$ m. y altura $a = 1{,}50$ m., cuyo borde superior está sumergido a 3 m. de profundidad bajo el nivel; la coordenada ζ del centro de presión viene dada por la fórmula:

$$\int_3^{4,50} kz^2\,dx : \int_3^{4,50} kz\,dz$$

cuyo valor es:

$$\tfrac{1}{3}(4{,}5^3 - 3^3) : \tfrac{1}{2}(4{,}5^2 - 3^2) = 21{,}375 : 5{,}625 = 3{,}80 \text{ m.}$$

Llégueso a este mismo resultado utilizando la fórmula [1].

EJERCICIOS

1. — Calcular los momentos de inercia de un cilindro circular de radio R y altura a respecto de los ejes siguientes:

a) Eje del cilindro.
Solución: $I = \tfrac{1}{2} M R^2$; $\rho = R/\sqrt{2}$.

b) Eje perpendicular a la dirección del cilindro, trazado por el baricentro.
Solución: $I = M(R^2/4 + a^2/12)$.

c) Diámetro de una base.
Solución: $I = M(R^2/4 + h^2/3)$.

2.— Momento de inercia de la esfera de radio R respecto de un diámetro.
Solución: $I = 2M\,R^2 : 5$ $\quad \rho = R\sqrt{2/5}.$

3.— Momento del toro engendrado por la circunferencia de radio r cuyo centro dista R del eje, respecto de éste.
Solución: $I = M(R^2 + \tfrac{3}{4} r^2)$.

4.— Momento de inercia de una elipse de semiejes a y b respecto del eje mayor.
Solución: $I = \tfrac{1}{4} M\,b^2$ $\quad \rho = \tfrac{1}{2} b$.

5. — Entre el radio de giro ρ respecto de un eje que pasa por el baricentro, el radio de giro ρ_1 respecto de un eje paralelo que dista d existe la relación:

$$\rho_1^2 = \rho^2 + d^2$$

6.— Constrúyase el radio de giro de los recintos anteriores para ejes paralelos a los considerados.

INTEGRALES CURVILINEAS

271. — Definición y cálculo de integrales curvilíneas.

Como para las funciones de una variable, también para las de dos variables hay un doble problema de cálculo integral: la integral *definida* entre dos puntos (a, b) (a', b'), y el problema inverso de la derivación, o sea el cálculo de una función conocidas sus derivadas.

Lo mismo que allí, el primer problema se reduce al segundo, pero la analogía no es completa, pues carece de sentido hablar de *función primitiva* de una sola función; en cambio se dirá que u es *función primitiva* o *función potencial* del par de funciones $p(x, y)$, $q(x, y)$, cuando es $u'_x = p \quad , \quad u'_y = q$.

Si el par p, q admite funciones primitivas, la diferencia de éstas es constante, pues siendo nulas sus derivadas parciales, debe ser independiente de x y de y, es decir, constante.

En la lección próxima estudiaremos el caso en que hay función primitiva, y en ésta vamos a estudiar las integrales definidas.

¿Qué significado puede atribuirse a los símbolos:

$$\int_{(a,b)}^{(a' b')} p(x, y)dx \quad , \quad \int_{(a,b)}^{(a', b')} p(x, y)dy$$

siendo $p(x, y)$ una función de dos variables (x, y)? Será preciso saber cuál es el camino seguido para pasar del punto inicial (a, b) al (a', b'); y dada esa curva:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

a lo largo de la cual debe efectuarse la integración, siendo t_0 el valor de t que corresponde al punto inicial (a, b) y t' el punto final (a', b') ambas integrales tienen su significado perfectamente claro, pues se reducen a integrales de una sola variable t. La primera se transforma así:

$$\int_{t_0}^{t'} p[x(t), y(t)]\, x'(t)dt$$

y análogamente la segunda.

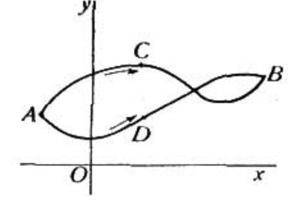
En efecto, tales integrales existen seguramente (v. núm. 3 de *Complementos*) si suponemos p y q funciones continuas, y además que sean continuas las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$, salvo a lo sumo en número finito de puntos. Tales arcos de curva formados por número finito de arcos, provistos de *tangente continua*, suelen llamarse *regulares*, y a ellos nos referimos en todo este capítulo.

Si el camino de integración de t_0 a t' se descompone en varios, por ejemplo, de t_0 a t_1, de t_1 a t_2, de t_2 a t', siendo $t_0 < t_1 < t_2 < t'$, la integral desde t_0 a t' es la suma de las integrales desde t_0 a t_1, desde t_1 a t_2, desde t_2 a t'.

En particular, la integral a lo largo de un contorno cerrado se puede calcular como suma de las integrales a lo largo de diversos arcos abiertos en que éste se descomponga, o bien por una sola integral de t_0 a t' si t_0 y t' son los valores del parámetro que determinan el punto inicial y el final de la curva, siendo ambos coincidentes.

Si se cambia el sentido de la integración sobre un camino abierto o cerrado, hay que permutar los extremos t_0, t', luego la integral cambia de signo.

Si la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, y AB son dos puntos del mismo, las dos integrales a lo largo de los dos caminos AB son iguales; pues siendo:



$$\int_{ACB} + \int_{BDA} = 0 \quad \therefore \quad \int_{ACB} = \int_{ADB}$$

Ejemplo 1. — Calculemos $\int y.dx$ a lo largo de la elipse de semiejes a y b situados en los ejes coordenados, recorrida en sentido positivo.

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$x = a.\cos t \quad , \quad y = b.\text{sen}\, t$$

desde $t = 0$ que da el vértice de la derecha, hasta $t = 2\pi$ que vuelve a dar el mismo, después de recorrida en sentido positivo; la integral se transforma así:

$$\int y.dx = \int b.\text{sen}\, t(-a.\text{sen}\, t)dt = -ab \int \text{sen}^2 t.dt$$

y como la función primitiva de $\text{sen}^2 t$ es $\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\text{sen}\, 2t$, limitada entre a y 2π resulta el valor de la integral: $-\pi ab$.

Nota. — Todas las integrales de funciones irracionales cuadráticas calculadas en el capítulo V, son integrales curvilíneas a lo largo de circunferencias, y el cambio de variables que se hizo para efectuar las integraciones no es sino la expresión paramétrica de la respectiva circunferencia.

Sea, por ejemplo:

$$\int \sqrt{1 - x^2}.dx = \int y.dx$$

poniendo

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{o sea:} \quad x^2 + y^2 = 1$$

el cambio de variables:

$$x = \cos t \qquad y = \text{sen}\, t$$

es justamente la expresión paramétrica de la circunferencia.

Lo mismo acontece en cualquier otra, por ejemplo,

$$\int x \sqrt{1 - x^2 - 2x}.dx$$

que es una integral curvilínea sobre la circunferencia: $x^2 + y^2 + 2x = 1$.

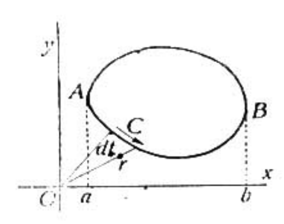
272. — Areas y momentos por integrales curvilíneas.

Hemos observado que $\int y\,.dx$ a lo largo de una elipse nos ha dado el área; en general: si la función $P(x,y)$ se reduce a y, tenemos a lo largo de cualquier curva cerrada C compuesta de dos arcos uniformes:

$$\int_C y dx = \int_a^b [y_1 - y_2]\,dx = -S \qquad [1]$$

siendo S el área del recinto; y esto se generaliza fácilmente, aunque el contorno sea más complicado.

Análogamente, tomando la integral curvilínea respecto de y:



$$\int_C x dy = \int_a^b (x_2 - x_1)\,dy = S \qquad [2]$$

y sumando ambas resulta ésta:

$$S = \tfrac{1}{2}\int_C x dy - y dx \qquad [3]$$

Nota. — La diferencial en esta fórmula [3] es el elemento de área en coordenadas polares, pues haciendo:

$$x = r\cos t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} t$$

resulta.

$$x.dy - y.dx = r.\cos t(r.\cos t.dt + \operatorname{sen} t.dr) - r.\operatorname{sen} t(\cos t.ds - \operatorname{sen} t.dt) =$$

$$= r^2.dt$$

Análogamente, los momentos de primero y segundo orden del área S respecto de los ejes, vienen dados por las integrales curvilíneas:

$$\int_C y^2\,d\,x = \int_a^b [y_1{}^2 - y_2{}^2]\,d\,x = -2M_x$$

$$\int_C x^2\,d\,y = \int_c^d [x_2{}^2 - x_1{}^2]\,d\,y = 2M_y$$

$$\int_C y^3\,d\,x = \int_a^b [y_1{}^3 - y_2{}^3]\,d\,x = -3I_x$$

$$\int_C x^3\,d\,y = \int_c^d [x_2{}^3 - x_1{}^3]\,d\,y = 3I_y.$$

He aquí la demostración general, sin recurrir a las integrales dobles, como suele hacerse. Para un trapezoide sobre (a,b) el momento respecto del eje y es:

$$\int y\,.\,x^n\,.\,dx = \frac{y\,.\,x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,.\,dy$$

Al restar las dos expresiones para los dos trapezoides cuya diferencia es el recinto, se reduce el término integrado, común a ambas y queda la integral curvilínea de $x^{n+1}\,.\,dy$ dividida por $n+1$.

273. — Integrales curvilíneas de funciones de tres variables.

Dado un arco de curva alabeada entre los puntos (a, b, c) y (a', b', c') y una función $p(x, y, z)$ sobre ella, se define análogamente la integral respecto de x a lo largo del arco. Basta, en efecto, expresar x, y, z, como funciones de un parámetro t y si los valores de t que corresponden a los extremos son t_0 y t' resulta:

$$\int_{(a\ b\ c)}^{(a'\ b'\ c')} p(x, y, z)\,dx = \int_{t_0}^{t'} p\,[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)\,.dt$$

En muchos problemas de Física y Mecánica, donde los elementos físicos vectoriales se descomponen según sus componentes, aparecen integrales curvilíneas:

$$\int_{AA'} p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy = \int_{AA'} p(x, y)\,dx + \int_{AA'} q(x, y)\,dy.$$

y en los problemas tridimensionales aparecen, análogamente, las del tipo:

$$\int_{AA'} p(x, y, z)\,dx + q(x, y, z)\,dy + r(x, y, z)\,dz$$

mientras que las integrales monomias, sean de dos o tres variaoles, carecen de interés. La razón es obvia: si (p, q, r) son las componentes de un campo vectorial, cada una carece de sentido geométrico o físico, y cambia al adoptar nuevos ejes coordenados; mientras que el producto escalar $p.dx + q.dy + r.dz$ tiene significado intrínseco, independiente de la terna adoptada. Así, p. ej., si los vectores representan fuerzas, la integral trinomia significa el trabajo de esa fuerza variable al recorrer su punto de aplicación el arco AA'; número invariante respecto de todos los cambios de coordenadas.

Lo mismo que en las integrales ordinarias, sobre un intervalo, cabe considerar integrales curvilíneas *indefinidas*, es decir, integrales sobre un arco AP de extremo P variable, pero aquí surge el interrogante de cuál sea el camino elegido para la integración, cuestión que será resuelta en la lección siguiente; y además será preciso distinguir el caso de recinto *simplemente conexo*, o de contorno único, y el de recinto multiplemente conexo. Vamos a estudiar ambas cuestiones que tienen primordial interés en las aplicaciones físicas.

EJERCICIOS

1. — Si cambia el signo de un término en [3], la integral es nula, cualquiera que sea el circuito C.

2. — ¿Qué sucede si el integrando [3] se divide por x^2?

LECCIÓN 67

INTEGRACION DE DIFERENCIALES EXACTAS

274. — Caso en que existe un potencial.

Dado un par de funciones $p(x, y), q(x, y)$ (o, lo que es equivalente, un *campo vectorial* plano) veamos la íntima relación existente entre el valor de la integral:

$$\int p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy$$

y la existencia de función *primitiva* o *potencial* del par $p(x, y)$, $q(x, y)$; relación completamente análoga a la clásica fórmula de Barrow.

Cuando estas funciones p y q son las derivadas parciales según x e y respectivamente de una misma función $u(x, y)$, ésta se llama *función potencial* de p y q, no debiendo confundirse con el *potencial físico*, que es $-u(x, y)$.

Cuando existe esta función potencial u tal que $p = u'_x$; $q = u'_y$, la integral curvilínea se transforma así:

$$\int_{(a\,b)}^{(a'\,b')} u'_x\,dx + u'_y\,dy = \int_{(a\,b)}^{(a'\,b')} du(x, y) = u(a', b') - u(a, b).$$

Es decir: *Si existe función potencial uniforme, la integral curvilínea entre dos puntos no depende del camino seguido en la integración y su valor es la diferencia de potencial en ambos puntos extremos. La integral es nula en toda curva cerrada.*

Refiriéndonos a recintos *simplemente conexos* (120) se verifica:

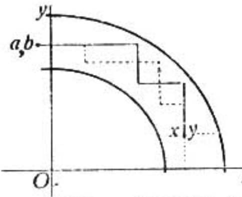
Recíprocamente: *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos rectangulares contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial, es decir: $p\,dx + q\,dy$ es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente:

$$v(x, y) = \int_{(a,\,b)}^{(x,\,y)} p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy \qquad [1]$$

extendiendo la integral hasta el punto variable (x, y) siguiendo una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto. En virtud de la hipótesis, el valor de la integral es el mismo para todas esas quebradas, pues de una se pasa a otra sustituyendo respectivamente dos lados consecutivos de un rectángulo por los otros dos; luego define una función uniforme $u(x, y)$.

Para derivar respecto de x hay que conservar fijo y, es decir, prolongar la quebrada desde (x, y) paralelamente al eje x, luego resulta nula la 2.ª integral y la 1.ª es la primitiva de p, luego $v'_x = p$; análogamente, para derivar respecto de y se prolonga la quebrada paralelamente al eje y, resultando $v'_y = q$. La función formada $v(x, y)$ es, pues, una función potencial.



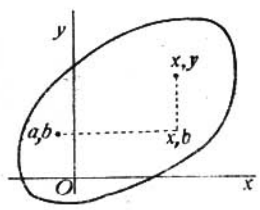
NOTA. — Obsérvese que no es preciso exigir la anulación de la integral en toda curva cerrada; basta que sea nula en todos los contornos rectangulares de lados paralelos a los ejes y contenidos en un cierto recinto, para que exista función potencial y, por consiguiente, la integral será nula en toda curva cerrada contenida en el mismo.

275. — Criterio para la existencia de potencial.

La condición necesaria y suficiente para que las funciones p y q dos veces derivables, definidas en un recinto simplemente conexo, admitan un potencial uniforme, es que sean idénticas las derivadas cruzadas:

$$p'_y = q'_x \qquad [2]$$

1.º Si existe el potencial u, derivando p respecto de y resulta u''_{xy}, y derivando q respecto de x resulta: u''_{xy}; y ambos resultados son iguales, según demostramos en (209) si estas derivadas son continuas.



2.º Supongamos, recíprocamente, que la condición [2] se cumple en un cierto recinto simplemente conexo.

Formemos la integral curvilínea [1] de la expresión $p.dx + q.dy$ desde un punto fijo (a, b) a un punto variable (x, y) siguiendo el camino más simple, formado por paralelas a los ejes,

$$v(x, y) = \int_a^x p(x, b)\,dx + \int_b^y q(x, y)\,dy \qquad [3]$$

esta es una función de x e y puesto que a cada par (x, y) corresponde un solo valor de la integral, ya que hemos fijado el camino.

La derivada respecto de y es inmediata, lo mismo que en el párrafo anterior, puesto que la primera integral no depende de y, y la segunda tiene por derivada $q(x, y)$, es decir: $v'_y = q(x, y)$.

Recordando la regla para derivar bajo el signo integral:

$$v'_x = p(x, b) + \int_b^y q'_x(x, y)dy = p(x, b) + \int_b^y p'_y(x, y)dy =$$
$$= p(x, b) + [p(x, y) - p(x, b)] = p(x, y)$$

Resulta, pues, que la función $v(x, y)$ definida por la integral [3] suma de dos integrales simples, es una *función potencial* de p y q. Cualquier otra función potencial tendrá la misma derivada respecto de x e y; por tanto difiere de $v(x, y)$ en una constante. Es decir: la función potencial más general del par p, q es: $u = v(x, y) + C$.

Si no se pueden unir los dos puntos (a, b) y (x, y) por una quebrada de dos lados contenida en el recinto se toma de varios lados y la conclusión subsiste.

NOTA. — A este mismo resultado se llega integrando el sistema:

$$u'_x = p \quad , \quad u'_y = q$$

pues de la segunda resulta:

$$u = \int_b^y q(x, y)dy + \alpha(x)$$

siendo $\alpha(x)$ una función arbitraria de x que no contiene la y; derivando respecto de x y sustituyendo $u'_x = p$, resulta la nueva condición:

$$p(x, y) = \int_b^y q'_x(x, y)dy + \alpha'(x)$$

y sustituyendo $q'_x = p'_y$, resulta:

$$p(x, y) = \int_b^y p'_y(x, y)dy + \alpha'(x) = p(x, y) - p(x, b) + \alpha'(x)$$

de donde:

$$\alpha'(x) = p(x, b) \quad \therefore \quad \alpha(x) = \int_a^x p(x, b)\,dx + C$$

y obtenemos el mismo resultado. Este método suele convenir en la práctica.

EJEMPLO. — Calculemos la integral curvilínea

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + y)dx + (x - 4y)dy.$$

Primer método: Puesto que $p'_y = q'_x = 1$, hay función potencial y la podemos calcular así:

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,0)} + \int_{(x,0)}^{(x,y)} = x^3 + xy - 2y^2$$

$$\text{luego: } \int_{(0,0)}^{(1,2)} = u(1,2) - u(0,0) = -5.$$

Segundo método:
$$u = xy - 2y^2 + \alpha(x)$$
$$\alpha'(x) = 3x^2 + y - y$$
$$\alpha(x) = x^3 + C.$$

276. — Integrales curvilíneas completas de tres variables.

Con frecuencia se presentan en Física y en Mecánica integrales de esta forma:

$$\int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz.$$

Si existe función potencial u, tal que:

$$p = u'_x; \quad q = u'_y; \quad r = u'_z$$

la integral curvilínea se reduce a:

$$\int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} u'_x\,dx + u'_y\,dy + u'_z\,dz = \int_{(a,b,c)}^{(a',b',c')} du = u(a',b',c') - u(a,b,c)$$

es decir: *Si existe potencial uniforme, el valor de la integral curvilínea no depende del camino seguido para pasar del punto (a,b,c) al (a',b',c') y su valor es la diferencia de potencial en ambos puntos. La integral es nula en toda curva cerrada.*

Suponiendo *simplemente conexos* los recintos considerados, se verifica:

Recíprocamente: *Si son nulas las integrales a lo largo de todos los contornos paralelepipédicos contenidos en un recinto, cuyos lados son paralelos a los ejes, existe función potencial;* es decir, *$p.dx + q.dy + r.dz$ es una diferencial exacta.*

Definamos la función siguiente:

$$v(x,y,z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz$$

siguiendo como camino una quebrada cualquiera de lados paralelos a los ejes, contenida en el recinto; repitiendo el razonamiento hecho para dos variables, resulta:

$$v'_x = p \quad , \quad v'_y = q \quad , \quad v'_z = r$$

es decir, la función v es potencial de p, q, r.

277. — Criterio para la existencia de potencial.

Como en (275), la igualdad de derivadas cruzadas caracteriza la existencia de potencial en los recintos simplemente conexos.

Las condiciones necesarias y suficientes para que exista función potencial uniforme de p, q, r, son:

$$p'_y = q'_x; \quad p'_z = r'_x; \quad r'_y = q'_z. \qquad [1]$$

1.° Desde luego deben verificarse estas igualdades si existe u; pues entonces: $p'_y = u''_{xy}$, $q'_x = u''_{yx}$, y análogamente las otras.

2.° Recíprocamente: si se verifican las condiciones anteriores [1] formemos la función siguiente:

$$v(x, y, z) = \int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)} p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz$$

eligiendo como camino de integración la quebrada de lados paralelos a los ejes, tenemos a $v(x, y, z)$ expresada por tres integrales ordinarias:

$$v(x, y, z) = \int_a^x p(x, b, c)dx + \int_b^y q(x, y, c)dy + \int_c^z r(x, y, z)dz \qquad [2]$$

y recordando la regla de derivación bajo el signo integral:

$$v'_x = p(x, b, c) + \int_b^y q'_x(x, y, c)dy + \int_c^z r'_x(x, y, z)dz =$$

$$= p(x, b, c) + \int_b^y p'_y(x, y, c)dy + \int_c^z p'_z(x, y, z)\, dz =$$

$$= p(x, b, c) + p(x, y, c) - p(x, b\, c) + p(x, y, z) - p(x, y, c) =$$

$$= p(x, y, z)$$

$$v'_y = q(x, y, c) + \int_c^z r'_y(x, y, z)dz = q(x, y, c) + \int_c^z q'_z(x, y, z)dz =$$

$$= q(x, y, c) + q(x, y, z) - q(x, y, c) = q(x, y, z).$$

$$v'_z = r(x, y, z).$$

Esta última resulta inmediatamente, pues solo la tercera integral depende de z.

Hemos obtenido, pues, una función potencial $v(x, y, z)$ y cualquier otra difiere de ella en una constante:

$$u = v(x, y, z) + C.$$

NOTA. — Si el recinto no es convexo, se elige una poligonal de lados paralelos a los ejes, como ya se hizo en casos anteriores; y fijada ésta, resulta uniforme la función $u(x, y, z)$.

NOTAS

Caso de recinto multiplemente conexo.

Tanto en el plano, como en el espacio, interesa considerar este caso, que modifica las conclusiones anteriores.

Consideremos, p. ej., el caso: $p = -y:(x^2 + y^2)$, $h = x:(x^2 + y^2)$.

Las derivadas cruzadas son iguales, y existe potencial *no uniforme:* arc tg y/x; si se consideran circuitos que no rodean al origen, el potencial es uniforme en ellos, y la integral nula; pero si el circuito da n vueltas alrededor de 0, la integral vale $2n\pi$.

La integral desde A a P toma valores distintos según el *tipo* de arco, y esos valores difieren en múltiplo de 2π.

Como en este ejemplo se verifica en todo recinto doblemente conexo, donde los valores de la integral difieren en múltiplos de un número, llamado *módulo de periodicidad*; hay dos módulos si la conexión es triple, etc.

Aplicación a la Aerotécnica.

Justamente el caso de recinto doblemente conexo es el que se presenta en la teoría de la sustentación del ala de avión.

Si (p, q) es el vector velocidad de cada partícula de aire respecto del ala, la integral:

$$\Gamma = \int p \, . \, dx + q \, . \, dy$$

sobre un circuito alrededor del perfil se llama *circulación*. Su valor depende de la forma del perfil, y en virtud del teorema fundamental de Kutta y Joukowski, la *sustentación* del ala es igual al producto de la *circulación*, por la *densidad* del flúido, por la *velocidad* del avión. (V. nuestra obra: *Aplicaciones físicas y técnicas de las funciones de variable compleja*. Buenos Aires, 1938).

Aplicación a la Termodinámica

Si un gas perfecto $pv = Rt$ pasa del estado (v, p) al $(v + \Delta v, \ p + \Delta p)$ el incremento de energía ΔQ se compone de dos partes:

Fijado v, es $\Delta Q = c . \Delta t$ siendo c el *calor específico a volumen constante,* y expresado mediante v es $\Delta t = t'_p . \Delta p = v . \Delta p / R$.

Fijada p es $\Delta Q = C . \Delta t$ siendo C el *calor específico a presión constante;* y se puede sustituir $\Delta t = t'_v . \Delta v = p . \Delta v / R$.

El incremento de energía a lo largo de un camino prefijado, es, por tanto:

$$Q = (1/R) \int c . v . dp + C . p . dv$$

¿Es Q función de p, v; es decir, en cada estado del gas tiene Q valor independiente del camino seguido para llegar a él? Así se creía, al admitir la indestructibilidad del calor. Pero como las derivadas cruzadas son c y C, y es $c \neq C$, no acontece así.

Veremos (302) cómo la expresión $cv . dp + Cp . dv$ se transforma en diferencial exacta, dando origen al concepto de *entropía*.

Lección 68

TRANSFORMACION DE INTEGRALES MULTIPLES EN CURVILINEAS

278. — Fórmula de Riemann.

Consideremos un recinto R cuyo contorno está formado por dos arcos uniformes AB; y calculemos la siguiente integral doble:

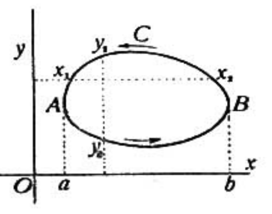
$$\int\int_R p'_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} p'_y(x,y)\,dy = \int_a^b [p(x,y_2) - p(x,y_1)]\,\mathrm{dx}.$$

Ahora bien: la suma de estas dos integrales no es, según la definición, sino la integral curvilínea de la función $p(x,y)$ tomada en el arco superior AB y después en el arco inferior BA.

Por tanto, si adoptamos como sentido positivo en el contorno el que deja el recinto a la izquierda, resulta:

$$\int\int_R p'_y(x,y)\,.\,dx\,dy = -\int_C p(x,y)\,.\,dx \qquad [1]$$

fórmula que transforma una integral doble en una integral curvilínea.



EJEMPLO. — Si tomamos la función

$$P(x,y) = y$$

tenemos:

$$\int\int_R dx\,.\,dy = \text{Area } S = -\int_C y\,dx.$$

Análogamente; calculemos esta integral doble:

$$\int\int_R q'_x(x,y)\,dx\,dy = \int_c dy \int_{x_1} q'_x(x,y)\,dx =$$

$$= \int_c^d dy\,[q(x_2,y) - q(x_1,y)] = \int_c^d q(x_2,y\,dy - \int_c^d q(x_1,y)\,dy$$

y como, según la definición de integrales curvilíneas, estas dos integrales componen la integral curvilínea de la función $q(x,y)$ a lo largo del contorno cerrado en sentido positivo, resulta:

$$\int\int_R q'_x(x,y)\,dx\,dy = \int_C q(x,y)\,dy \qquad [2]$$

Reuniendo en una ambas igualdades [1] y [2] obtenemos la fórmula:

$$\int\int_R (q'_x - p'_y)\,dx\,dy = \int_C p\,dx + q\,dy.$$

llamada de *Stokes* o de *Riemann*, que transforma una integral curvilínea en integral doble o viceversa, y de ella se deducen nuevamente algunos resultados ya obtenidos. Así, por ejemplo, resulta una nueva demostración muy sencilla y breve, del teorema fundamental de las integrales curvilíneas: *La condición necesaria y suficiente para que la integral curvilínea sea nula en todo circuito es la igualdad de derivadas cruzadas.*

Si p y q son los componentes de un vector (p, q) el número $q'_x - p'_y$ que aparece en la integral se llama *curl* o *rotor* del vector.

La condición $q'_x = p'_y$ equivale, pues, a ésta: Rot $W = 0$.

Demostración del criterio de las derivadas cruzadas. — Que la igualdad $p'_y = q'_x$ implica la anulación de la integral [3], salta a la vista. Recíprocamente, si esta integral es nula sobre todo contorno rectangular, el rotor debe ser nulo en todo punto, si se suponen *continuas las derivadas.* Pues si en un punto vale $a > 0$, en un entorno rectangular es $> \frac{1}{2}a$; y por tanto es positiva la integral [3] en este rectángulo, contra la hipótesis. A igual contradicción se llega suponiendo el rotor negativo.

279. — Integrales sobre una superficie.

Una generalización inmediata de la integral de dos variables sobre una curva, es la integral de una función de tres variables sobre una superficie.

Como sobre la superficie no es z independiente, sino que depende de x, y, si sustituímos su expresión: $z = f(x, y)$, resulta una integral doble ordinaria:

$$\int \int_S p(x, y, z)\, dx\, dy = \int \int_S p[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy$$

que calcularemos por dos integraciones sucesivas.

Análogamente se definen las integrales dobles sobre R de yz y de zx.

Si se trata de una superficie cerrada S, convendremos en representar por el símbolo:

$$\int \int_S p(x, y, z)\, dx\, dy$$

la diferencia:

$$\int \int_{S_2} p(x, y, z_2)\, dx\, dy - \int \int_{S_1} p(x, y, z_1)\, dx\, dy$$

entre las dos integrales dobles sobre el casquete superior y el casquete inferior.

NOTA. — Este convenio está justificado por analogía con las integrales curvilíneas; y también se llega a él partiendo de esta otra definición:

$$\int p(x, y, z) \cdot \gamma \cdot d\sigma$$

donde γ representa el tercer coseno director de la *normal exterior* en cada punto (x, y, z) de la superficie, concepto importante en Física.

En el casquete *superior* el coseno es *positivo*; en el *inferior* es *negativo*; y resulta la misma definición anterior.

280. — Fórmula de Gauss o de Ostrogradski.

Considerada una superficie convexa cerrada S, y definida en un punto una función $\zeta(x, y, z)$ calculemos la integral triple sobre todo el volumen V:

$$\int\int_V\int \zeta'_z(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_S [\zeta(x, y, z_2) - \zeta(x, y, z_1)]\,dx\,dy =$$
$$= \int\int_S \zeta(x, y, z)\,dx\,dy$$

La integral de volumen ha quedado así reducida a una integral de superficie.

Aplicando esto a tres funciones:

$$\xi(x, y, z) \quad , \quad \eta(x, y, z) \quad , \quad \zeta(x, y, z) \qquad [1]$$

obtenemos la fórmula:

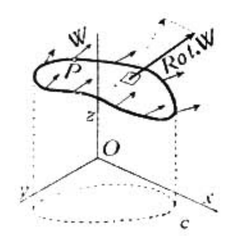
$$\int\int_V\int (\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int\int_S \xi.dy.dz + \eta.d\ z.dx + \zeta.dx.dy$$

llamada de *Gauss* o también de Ostrogradski.

En la lección próxima estudiaremos el importante significado vectorial de esta igualdad, que es independiente de los ejes coordenados.

281. — Fórmula de Stokes.

Consideremos un casquete S de superficie $z = f(x, y)$ cuyo contorno C se proyecta en el plano xy según el contorno c del recinto plano R proyección del casquete. Dar tres funciones



$$\xi(x, y, z), \quad \eta(x, y, z) \quad \zeta(x, y, z)$$

sobre el casquete S es dar tres funciones de x, y sobre R, por ser $z = f(x, y)$ y la integral sobre el contorno C de la terna [1]:

$$\int \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$$

se reduce a una integral sobre c, sustituyendo $dz = z'_x.dx + z'_y.dy$, y así resulta la integral curvilínea de dos variables:

$$\int \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta(z'_x\,dx + z'_y\,dy) =$$
$$= \int (\xi + \zeta\,z'_x)dx + (\eta + \zeta\,z'_y)dy$$

para aplicar la fórmula de Riemann calcularemos la diferencia de derivadas cruzadas:

$$(\eta'_x + \eta'_z z'_x + \zeta z''_{xy} + \zeta'_x . z'_y + \zeta'_z z'_x z'_y) -$$
$$- (\xi'_y + \xi'_z . z'_y + \zeta z''_{xy} + \zeta'_y z'_x + \zeta'_z z'_y z'_x) =$$
$$= (\eta'_z - \zeta'_y) z'_x + (\zeta'_x - \xi'_z) z'_y + (\eta'_x - \xi'_y)$$

Si multiplicamos por $dx . dy$, podemos sustituir, según la definición (253) de elemento de superficie:

$$z'_x . dx . dy = - \alpha d\sigma$$
$$z'_y . dx . dy = - \beta d\sigma$$
$$dx\, dy = \gamma d\sigma$$

y resulta:

$$\int \xi dx + \eta dy + \zeta dz =$$
$$= \int \int_S [(\zeta'_y - \eta'_z)\alpha + (\xi'_z - \zeta'_x)\beta + (\eta'_x - \xi'_y)\gamma]\, d\sigma$$

que es la *fórmula de Stokes*, cuyo hondo significado aparecerá al interpretarla vectorialmente en la próxima lección. Por ahora expresa simplemente que *toda integral simple sobre un contorno alabeado C que limita un casquete se puede expresar como una integral doble sobre este casquete.*

Como aplicación inmediata resulta el importante teorema demostrado en (276, 277): *La condición necesaria y suficiente para que la integral a lo largo de todo circuito sea nula, es la igualdad de las derivadas cruzadas.*

Que tal condición es *suficiente* salta a la vista en la fórmula de Stokes; para ver que es necesaria, basta suponer por el absurdo, que en un punto no se anula el rotor, llegándose a una contradicción, de modo análogo al de (278).

EJERCICIOS

1. — Demostrar el teorema fundamental que acabamos de enunciar.

2. — Relacionar la fórmula de Stokes con la de Riemann relativa a los campos vectoriales planos (278).

3. — Interpretar la fórmula de Stokes para el campo vectorial:

$$\xi = -y \quad , \quad \eta = x \quad , \quad \zeta = F(z)$$

LECCIÓN 69

INTEGRACION DE CAMPOS VECTORIALES

282. — Integral curvilínea de un campo vectorial.

Consecuentes con la notación convenida, las letras minúsculas designan números y las mayúsculas puntos y vectores.

Se dice que forman un campo vectorial los vectores cuyas componentes (ξ, η, ζ) son funciones de (x, y, z). Es decir: cada punto de un cierto recinto es origen de un vector del campo.

Si consideramos un arco de curva $A\,B$, tenemos un vector del campo aplicado en cada punto de arco. La integral

$$\int_{AB} \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz \qquad [1]$$

estudiada en las lecciones 64 y 65, tiene un valor numérico bien determinado como suma de las tres integrales de sus tres términos, cada una de las cuales se puede calcular según se ha explicado en (271).

Ahora puede darse una notación más sintética, observando que la expresión $\xi.dx + \eta.dy + \zeta.dz$ es el producto escalar de W por $dP(dx, dy, dz)$, luego podemos representar [1] brevemente así:

$$\int_{AB} W.dP \qquad [2]$$

y se llama *integral del vector W a lo largo de la curva A B*.

El significado más importante se obtiene cuando el vector representa una fuerza; el producto $W.dP$ es el trabajo elemental correspondiente al camino ds y el límite de la suma de trabajos elementales, o sea la integral [2] se llama *trabajo de la fuerza a lo largo del camino A B*.

Si W es una velocidad, [2] se llama *circulación* a lo largo del arco AB.

283. — Líneas de fuerza de un campo vectorial.

Se llaman *líneas de fuerza* de un campo vectorial las envolventes de estos vectores ,de modo tal que el vector correspondiente a cada punto de una curva es tangente a ella. La condición que deben

cumplir las ecuaciones $y = f(x)$ de las líneas de fuerza en el plano, debe ser por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$$

que es una ecuación diferencial de primer orden: de ellas nos ocuparemos más adelante.

En el caso de tres variables las líneas de fuerza satisfacen a las condiciones:

$$[3] \qquad \frac{dx}{\xi(x, y, z)} = \frac{dy}{\eta(x, y, z)} = \frac{dz}{\zeta(x, y, z)}$$

que expresan que el vector correspondiente a cada punto es tangente a la línea de fuerza que pasa por él.

En el cap. XII veremos cómo se resuelve este sistema de ecuaciones diferenciales que determina las líneas de fuerza.

Las líneas de fuerza que pasan por los diversos puntos de una curva cualquiera forman una *superficie de fuerzas;* si aquella curva es cerrada, esta superficie se llama *tubo de fuerzas;* las líneas de fuerza que forman el tubo no se cortan entre sí.

Si todos los vectores son paralelos, las líneas de fuerza son rectas y los tubos de fuerzas son cilindros. Tal sucede, en particular si el campo es *uniforme* ,es decir, todos sus vectores iguales.

284. — Caso en que existe una función potencial.

Todo lo expuesto es válido para cualquier campo vectorial, pero el caso más importante se presenta cuando existe función *potencial u,* tal que

$$u'_x = \xi \quad , \quad u'_y = \eta \quad , \quad u'_z = \zeta \qquad [4]$$

es decir:

$$W = Du = \text{Grad } u.$$

Las superficies de nivel $u(x, y, z) = k$ se llaman entonces *equipotenciales;* los cosenos directores del plano tangente en cada punto son proporcionales a las derivadas de u, es decir, proporcionales a ξ, η, ζ; y como estas componentes son proporcionales a los cosenos directores del vector que tiene su origen en dicho punto, resulta:

Cada vector del campo es normal a la superficie equipotencial que pasa por su origen.

Por tanto: *las líneas de fuerza cortan ortogonalmente a las superficies equipotenciales.*

Recíprocamente, esta condición de ortogonalidad viene expresada por las ecuaciones [3] luego caracteriza completamente a las líneas de fuerza.

Todo campo escalar da origen por derivación a un campo vectorial cuyas componentes son [4]. Recíprocamente un campo vectorial que admite potencial u, puede deducirse como gradiente de este potencial.

Según se ha demostrado en (274) el valor de la integral [2] del vector, es decir, el trabajo, es la diferencia de potencial en ambos extremos. Resulta así la fórmula fundamental:

$$\int_A^B \text{Grad. } u = \int_A^B Du = u(B) - u(A)$$

Como potencial físico v suele tomarse u con signo contrario; este convenio no altera los resultados anteriores, pero al calcular el trabajo de A a B resulta $v(A) - v(B)$, es decir, el trabajo es el potencial *físico* perdido al pasar de A a B.

Según (201) la derivada de u en un punto, en cualquier dirección, se obtiene proyectando sobre ésta el gradiente, es decir, el vector que tiene su origen en el punto, luego:

En cada punto la derivada de la función potencial en una dirección cualquiera es la componente del vector correspondiente según esa dirección.

285. — Integral superficial de un campo vectorial.

Sean α, β, γ los cosenos directores de la normal a la superficie S en un punto; según la definición (254) de elemento de superficie, se tiene: $dx.dy = \gamma.d\sigma$; debiendo tomarse γ *positivo*, puesto que $d\sigma$, dx, dy son positivos; esto equivale a considerar la semirrecta normal que forma ángulo agudo con el semieje $+z$, es decir, la semirrecta normal dirigida hacia arriba. En cambio, como en la integral sobre una superficie cerrada (279) la integral relativa al casquete inferior figura con el signo —, basta considerar $\gamma < 0$, es decir, la semirrecta normal dirigida hacia abajo y con este convenio resulta:

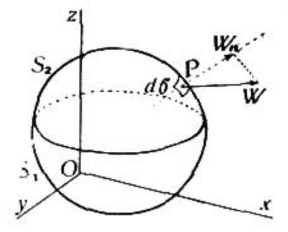
Para toda función $\zeta(x, y, z)$ es:

$$\int\int_S \zeta.dx.dy = \int \zeta.\gamma.d\sigma$$

siendo γ el tercer coseno director de la normal exterior al cuerpo li-

mitado por S, es decir, dirigida hacia arriba en el casquete superior y hacia abajo en el inferior.

Apliquemos esta transformación a la integral doble que figura en la fórmula de Gauss y resulta:



$$\int\int \xi\, dy.dz + \eta.dz\,dx + \zeta.dx.dy =$$
$$= \int\int (\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma) d\sigma = \int w_n\, d\sigma$$

llamando w_n a la proyección sobre la normal exterior del vector $W(\xi, \eta, \zeta)$, es decir, al módulo de W_n.

Veamos ahora el importante significado físico de esta integral.

286. — Flujo y divergencia. Fórmula vectorial de Gauss. Dado un campo vectorial uniforme W, si se considera un área σ normal a la dirección de W, se llama *flujo* de W sobre σ al producto $\sigma . |W| = \sigma w$.

Si el área es oblícua al vector W, y el ángulo de incidencia es (n, W) se llama flujo al producto

$$w.\sigma.\cos(n, W) = \sigma.\ \text{proy. de } W \text{ sobre } n = w_n.\sigma$$

cuyo signo depende del sentido que se adopte para la normal n. El flujo es un escalar y su significado físico depende de la magnitud que represente el vector. Si es la velocidad de un fluído, el flujo es la cantidad de éste que pasa por σ en la unidad de tiempo; si representa una radiación luminosa, calorífica, etc., el flujo es la cantidad de energía que pasa a través de σ en la unidad de tiempo, etc.

Dada una superficie curva cualquiera y un campo vectorial W de componentes variables (ξ, η, ζ) funciones de (x, y, z) el flujo elemental correspondiente a cada elemento de superficie $d\sigma$ es $w_n.d\sigma$, y el límite de la suma de flujos elementales se llama *flujo* de W a través de la superficie. Su expresión es, por tanto:

$$\text{Flujo} = \int_S w_n.d\sigma$$

Respecto del signo se hace el convenio siguiente: el flujo *saliente* de la superficie cerrada se considera *positivo*, y el *entrante* se toma *negativo*, es decir, a w_n le atribuímos signo $+$ si la proyección de W sobre la normal está dirigida hacia el *exterior* del recinto, y signo $-$ si está dirigida hacia adentro. Esto se expresa brevemente diciendo: W_n es la proyección de W sobre la normal *exterior*.

Vemos, pues, que el 2.º miembro de la fórmula de Gauss es el flujo del campo (ξ, η, ζ) a través de la superficie. Veamos el 1.º.

Se llama *divergencia* de un campo vectorial $W(\xi, \eta, \zeta)$ y se representa por la abreviatura Div. W o bien por DW, al número:

$$\text{Div. } W = DW = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$$

El significado físico de este escalar se explicará después; pero con él obtenemos esta expresión sintética de la fórmula de Gauss:

$$\text{Flujo} = \int (\text{Div. } W)\, d\tau = \int w_n \,.\, d\sigma$$

es decir: *El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es la integral de la divergencia extendida a todo el cuerpo que limita.*

287. — Rotor. Fórmula vectorial de Stokes.

También la fórmula de Stokes (281) adopta una expresión sintética e independiente de los ejes coordenados, mediante la introducción de este concepto vectorial:

Rotor de un campo vectorial (ξ, η, ζ) en un punto es el vector: (*)

$$\text{Rot } W = (\zeta'_y - \eta'_z \;,\; \xi'_z - \zeta'_x \;,\; \eta'_x - \xi'_y)$$

La fórmula de Stokes (281) se expresa, por tanto, así:

$$\int W \,.\, dP = \int (\text{Rot } W)_n\, d\sigma$$

La circulación de un campo vectorial a lo largo del contorno de un casquete es igual al flujo del rotor a través de este casquete.

Las tres fórmulas destacadas en recuadro constituyen el fundamento del Cálculo vectorial integral.

288. — El operador simbólico de Hamilton.

Extrañará al lector que operaciones tan diversas como son el *gradiente* de un escalar, la *divergencia* de un vector y el *rotor* de un vector se designen por notaciones tan análogas:

$$Du \quad ; \quad DW \quad \text{o bien} \quad D \,.\, W \quad ; \quad D \times W$$

Esto responde al significado del símbolo operador de Hamilton D, que se define abstractamente así:

$$D = (D_x, D_y, D_z)$$

(*) En realidad pueden adoptarse las componentes opuestas y el carácter vectorial es, por tanto, convencional, ya que su sentido no está determinado.

Si convenimos en considerar la derivada $D_x u$ como un producto simbólico de D_x por la función u, y análogamente las otras, resulta que el vector simbólico D puede multiplicarse escalar o vectorialmente. Si multiplicamos D por el escalar u (es decir, cada componente se multiplica por u) resulta el vector que hemos llamado gradiente de u.

Si se multiplica escalarmente por el vector (ξ, η, ζ) resulta, recordando la regla del producto:

$$D \cdot W = DW = \xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$$

es decir, la divergencia del vector W.

Si se multiplica D vectorialmente por el vector (ξ, η, ζ) resulta

$$D \times W = (\zeta'_y - \eta'_z \quad \xi'_z - \zeta'_x \quad , \quad \eta'_x - \xi'_y)$$

es decir, el rotor del campo W.

Con el símbolo de Hamilton D adoptan las fórmulas antes obtenidas una expresión sintética, usual en los tratados de Física y que interesa conocer.

Fórmula del potencial:

$$u = \int Du$$

Fórmula de Gauss:

$$\int DW \cdot d\tau = \int w_n \, d\sigma$$

Fórmula de Stokes:

$$\int w_t \cdot ds = \int (D \times W)_n \, d\sigma$$

En realidad, este símbolo D no es el mismo de Hamilton, pero es muy preferible al usado por él, que es el signo llamado *nabla*: ∇

289. — Aplicaciones físicas de la integración vectorial.

a) HIDRODINÁMICA. — El movimiento de un flúido está determinado por el campo vectorial (ξ, η, ζ) de las velocidades de sus diversos puntos. En general, estos vectores son funciones de (x, y, z, t), es decir, la velocidad de las diversas moléculas que pasan por cada punto varía con el tiempo; cuando la velocidad no depende del tiempo, el movimiento se llama *estacionario*, y las velocidades (ξ, η, ζ) forman un campo vectorial constante.

El flujo a través de una superficie cualquiera, viene expresado por la integral de Gauss

$$\int\int\int (\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z) dx \cdot dy \cdot dz$$

Si el fluído es incompresible, la cantidad que entra en un cierto tiempo por una superficie cerrada, debe ser igual a la que sale, es decir, el flujo debe ser nulo; por tanto su derivada nula, es decir:

$$\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = 0 \quad \text{o sea} \quad DW = 0$$

Esta es la condición de incompresibilidad de un fluído: divergencia nula en cada punto.

La divergencia de la velocidad de un flúido es el *coeficiente relativo de dilatación*, por unidad de tiempo y unidad de volumen.

Cuando existe función potencial u, las derivadas parciales de ξ, η, ζ son las derivadas segundas de u y resulta como ecuación de incompresibilidad:

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0 \quad \text{o simbólicamente;} \quad \Delta u = 0$$

que es la ecuación de Laplace.

En el caso del movimiento plano, el flujo a través de una curva cerrada es

$$\int\int (\xi'_x + \eta'_y) dx \cdot dy = \int \xi \cdot dy - \eta \cdot dx$$

y la ecuación de incompresibilidad

$$\xi'_x + \eta'_y = 0$$

b) POTENCIAL NEWTONIANO. — Es este el ejemplo más importante de fuerzas que tienen función potencial.

En efecto, según la ley de Newton, la atracción (o repulsión) de un punto fijo sobre la unidad de masa a la distancia r, viene expresada por una fuerza dirigida hacia el punto fijo y de intensidad:

$$f = -k/r^2$$

Si para abreviar nos fijamos especialmente en el caso del plano, las componentes son:

$$\xi = f \cos \alpha = f \cdot x/r = -kx/r^3 = -kx(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\eta = f \operatorname{sen} \alpha = f \cdot y/r = -ky/r^3 = -ky(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

e inmediatamente se observa que ambas son las derivadas parciales de la función:

$$u = k/r = k(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

La misma fórmula k/r expresa el potencial en el caso de tres dimensiones.

Por tanto, el trabajo de la fuerza atractiva a lo largo de una curva cualquiera es: $k/r' - k/r$ siendo r y r' los radios vectores de los extremos; y el trabajo a lo largo de un contorno cerrado cualquiera es nulo.

Las superficies equipotenciales son esferas cuando hay una sola masa y son superficies cuya ecuación es $\Sigma . ki/ri = 0$ cuando hay varias.

c) ROTORES DE UN CAMPO VECTORIAL. — Formemos las expresiones:

$$p = \zeta'_y - \eta'_z \quad , \quad q = \xi'_z - \zeta'_x \quad , \quad r = \eta'_x - \xi'_y$$

Cuando estas tres funciones son idénticamente nulas en todo el campo, existe una función potencial u de ξ, η, ζ y por tanto la integral de la expresión $\xi . dx + \eta . dy + \zeta . dz$ a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Consideremos ahora el caso general en que no exista potencial; las tres funciones p, q, r son componentes de un nuevo vector que hemos llamado el *rotor* del campo W; otros lo llaman *torbellino, curl, vórtice,* .....

Se demuestra inmediatamente que la divergencia de un rotor es nula.

Si el rotor es nulo en todos los puntos del campo, el movimiento se llama *irrotacional;* entonces existe función potencial y el flujo a través de toda superficie cerrada es nulo. Si en algunos puntos aislados no es nulo, el flujo es o no nulo según que la superficie contenga o no vórtices en su interior (*).

En efecto, la carencia de vórtices, o sea la anulación del rotor en todo punto, equivale, como hemos dicho, a la existencia de potencial en todo punto del recinto, sin excepción (por la igualdad de derivadas cruzadas); por tanto, la divergencia del vector W es:

$$DW = \Delta u = 0$$

y como el flujo viene expresado por la integral triple de la divergencia en todo el recinto, resulta nulo el flujo total. En cambio, si hay puntos en que el rotor no es nulo, la integral de la divergencia en el entorno del punto no es nula; y, en general, el flujo total a través de la superficie que encierra vórtices, no será nulo; pero, si hay compensación, puede resultar nulo.

d) TEORÍA DE LA ELASTICIDAD. — En la Teoría de la Elasticidad, cada deformación de un cuerpo da origen a un campo vectorial formado por los desplazamientos de sus puntos; a cada punto le asignamos como vector $W(\xi, \eta, \zeta)$ el que lo transforma en su punto homólogo.

(*) El significado físico del rotor para dos variables, como velocidad media de rotación de las partículas en torno de una de ellas puede verse en nuestro *Resumen de la Teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas.* Buenos Aires, 1918.

El flujo a través de una superficie S representa en este caso el volumen de materia que pasa por esa superficie en la deformación, es decir: el incremento encerrado por la superficie considerada S; luego la dilatación (positiva o negativa) sufrida por una porción de cuerpo viene expresada por la integral de la divergencia: $\int \mathrm{D}W . dv$ sobre todo el volumen.

290. — Funciones analíticas. — Problema de Dirichlet.

Hemos definido en (119) la *función analítica* de variable compleja por la condición de tener derivada única finita en cada punto, es decir, el cociente $\Delta w/\Delta z$ tiene límite independiente del Arg. Δz. Se demuestra fácilmente que la *condición necesaria y suficiente para que la función $w = u(x, y) + i.v(x, y)$* sea analítica es que se verifiquen las igualdades de Cauchy - Riemann;

$$u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x \qquad [1]$$

Demostración. — Al incrementar z resulta:

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y \qquad \Delta w = \Delta u + i\Delta v$$

Si el punto z se mueve paralelamente al eje x, es decir, si es $\Delta y = 0$, resulta como derivada en la dirección x el número $u'_x + i.v'_x$.

Si el punto z se mueve en la dirección vertical, es decir, si es $\Delta x = 0$, $\Delta z = i.\Delta y$, resulta la derivada: $-i.u'_y + v'_y$.

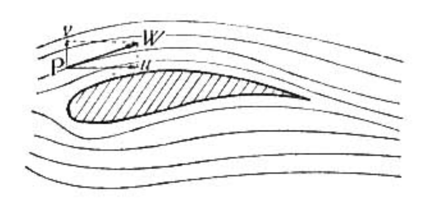
Como ambas derivadas deben ser iguales, igualando las partes reales e imaginarias resultan las igualdades [1]. Que estas condiciones son suficientes puede verse en cualquier tratado de Análisis.

Aplicación en Aerotécnica.

La teoría de la sustentación de un ala cilíndrica, de perfil cualquiera, es un ejemplo muy importante de aplicación de las funciones analíticas.

El movimiento del aire respecto del ala está definido por el vector velocidad $W(u, v)$ de cada partícula respecto de ejes coordenados fijos en el perfil. Estas funciones u, v satisfacen en todo punto (x, y) a las ecuaciones siguientes:

$$u'_x + v'_y = 0 \qquad v'_x = u'_y$$



La primera expresa la incompresibilidad del aire, hipótesis admisible, aun para las velocidades actualmente logradas. La segunda expresa la irrotacionalidad del flúido, esto es, la ausencia de torbellinos.

Salta a la vista la analogía con las ecuaciones [1], y coinciden con ellas sin más que cambiar el signo de v. Resulta, pues, que $u - iv$ es función analítica de z; esta función $w(z)$ conjugada de la velocidad física, se llama *velocidad compleja*.

La función $f(z)$ primitiva de $w(z)$ se llama *potencial complejo;* su parte real $\varphi(x, y)$ cumple las condiciones

$$\varphi'_x = u \qquad \varphi'_y = v$$

luego es el potencial del campo vectorial W; se llama *potencial de velocidades.* La otra componente $\psi(x, y)$ determina el haz de líneas de corriente, cuya ecuación es: $\psi(x, y) = C$.

Toda la teoría se desarrolla cómodamente mediante funciones complejas. Así, la presión del aire sobre el ala, o sea la *sustentación,* viene expresada por la integral de w^2 sobre el perfil; esta es la primera fórmula de *Blasius;* y análogamente se expresa su momento. Así se demuestra que esa presión es penperdicular a la dirección del movimiento y proporcional a la circulación. Este es el teorema capital de Kutta y Joukowski, ya citado en Lecc. 67. La teoría aquí esbozada puede estudiarse en nuestra obra allí citada.

Ecuación de Laplace. — Algunos problemas físicos citados y otros varios conducen al estudio de la ecuación de Laplace para tres variables; su teoría puede estudiarse en cualquier tratado de Análisis (Picard, Goursat, Vallée-Poussin).

Hay un caso importante: son los movimientos llamados *planos* o de dos dimensiones, es decir, aquellos en que todas las partículas situadas en una misma vertical se mueven de igual modo; basta, pues, considerar las coordenadas (x, y) y la ecuación de Laplace se reduce a dos términos. Para este caso es muy útil la aplicación de funciones de variable compleja, como explicamos a continuación:

Sea $u(x, y)$ una función *armónica*, esto es, que satisface a la ecuación de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$ en un cierto recinto R del plano (x, y) y efectuemos una transformación conforme de R mediante una función analítica cualquiera que lo transforma en otro recinto R'; trasplantando los valores $u(x, y)$ sobre los puntos homólogos (x', y') resulta otra función $v(x', y')$ en R', que también satisface a la ecuación de Laplace, como fácilmente se demuestra. Esto se expresa diciendo: *la ecuación de Laplace es invariante respecto de las trasformaciones conformes.*

Por tanto: para construir las líneas equipotenciales y las líneas de fuerza (o bien las líneas de corriente si se trata del movimiento de un fluído) en un recinto, basta transformarlo en círculo, o en semiplano, construir en éste las líneas y dibujar sus homólogas en el recinto dado.

EJEMPLO. — En un estanque semicircular (n.º 118) hay una fuente A y un sumidero B; si se trasforma en semiplano (fig. 3.ª) las líneas de corriente son las rectas del haz A y sus trayectorias ortogonales las semicircunferencias de centro A; sus trasformadas en el semicírculo son los arcos AB de circunferencia y otro haz ortogonal.

NOTAS

Fórmulas de Green. — Si en la fórmula de Gauss se eligen como **funciones:**

$$\xi = u.v'_x \quad , \quad \eta = u.v'_y \quad , \quad \zeta = u.v'_z$$

resulta:
$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = u(\alpha v'_x + \beta v'_y + \gamma v'_z) = -uv'_n$$

pues la expresión del paréntesis no es sino la derivada de v según la normal exterior y designamos por v'_n la derivada según la normal *interior*. Por otra parte, la divergencia es en este caso:

$$\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = u(v''_{x^2} + v''_{y^2} + v''_{z^2}) +$$
$$+ u'_x v'_x + u'_y v'_y + u'_z v'_z$$

y designando estos paréntesis por Δv y $\mathrm{D}u.\mathrm{D}v$, resulta:

$$\int u.\Delta v \, d\tau + \int \mathrm{D}u.\mathrm{D}v \, d\tau = -\int uv'_n \, d\sigma$$

Análogamente $\int u.\Delta v \, d\tau + \int \mathrm{D}v.\mathrm{D}u \, d\tau = -\int vu'_n \, d\sigma$

y restando resulta la fórmula de Green:

$$\int (u.\Delta v - v.\Delta u) d\tau = -\int [uv'_n - vu'_n] \, d\sigma \qquad [5]$$

En particular si se supone $u = 1$

$$\int \Delta v \, d\tau = -\int v'_n \, d\sigma$$

fórmula de Green para una sola función v.

Si v es armónica ($\Delta v = 0$) resulta

$$\int v'_n \, d\sigma = 0.$$

La integral sobre una superficie cerrada de la derivada según la normal de una función armónica dentro del recinto es nula.

Si u es armónica y v cualquiera

$$\int u.\Delta v \, d\tau = -\int [uv'_n - vu'_n] \, d\sigma$$

Funciones de Green. — Se llama función de Green en un recinto que contiene en su interior un punto O, a una función $G(x, y, z)$ que cumple estas condiciones:

1.° Es continua ella y sus derivadas en todo el recinto excepto en el punto O.

2.° La función $G + 1/r$ es continua, incluso en el punto O.

3.° En todo el recinto es $\Delta G = 0$.

4.° En la superficie es $G = 0$.

La función $G = -1/r$ cumple las condiciones 1.ª, 2.ª, 3.ª, según es fácil comprobar, pero no satisface a la 4.ª.

El problema de Dirichlet. — La determinación de la función de Green de un recinto es caso particular del problema de Dirichlet: *calcular la función $u(x, y)$ que en el interior del recinto satisface a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ y en el contorno toma valores prefijados.*

Si el recinto se transforma en círculo por una función de variable compleja, basta resolver el problema para el círculo mediante la integral de Poisson. (V., p. ej., nuestro *Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*). Esto vale solamente para el plano.

CAPÍTULO XII

ECUACIONES DIFERENCIALES

LECCIÓN 70

FAMILIAS DE CURVAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

291. — Ecuación diferencial de un haz de curvas.

Una ecuación $\varphi(x, y) = 0$ entre las coordenadas x e y representa una curva; pero si en la ecuación figura un parámetro c, la ecuación $\varphi(x, y, c) = 0$, para cada valor que se fije a c (dentro de un cierto intervalo) representa una curva. Obtenemos, pues, infinitas curvas que forman una *familia simplemente infinita* o *haz* de curvas.

Por cada punto (x_0, y_0) del plano pasa, en general, un número finito de curvas de la familia, pues la constante c queda determinada por la condición: $\varphi(x_0, y_0, c) = 0$, de donde resulta el valor o valores de c que sustituídos en la ecuación $\varphi(x, y, c) = 0$ dan una o varias curvas, o bien ninguna. Para algunos valores excepcionales (x, y) la ecuación puede satisfacerse idénticamente cualquiera que sea c, y entonces pasan todas las curvas del haz por dicho punto (x, y), el cual se llama *base* del haz.

Dada la ecuación $y = \varphi(x, c)$ de un haz de curvas es posible obtener una ecuación que carece del parámetro c y que relaciona la x de cada punto, la y y la y', es decir una ecuación que expresa una propiedad geométrica de cada punto y su tangente, para todas las curvas del haz.

En efecto, si derivamos la ecuación: $y = \varphi(x, c)$, resulta: $y' = \varphi'(x, c)$; fijado c, para la curva correspondiente se verifican simultáneamente ambas condiciones y, por tanto, se verifica la que resulta de eliminar c entre ellas. Resulta así una ecuación:

$$F(x, y, y') = 0$$

a la cual satisfacen todas las curvas del haz. Esta se llama *ecuación diferencial* del haz. Esta ecuación se llama de primer orden porque solo figura en ella la derivada primera.

El problema inverso: dada una ecuación diferencial cualquiera obtener todas las funciones que satisfagan a esa ecuación, es decir, integrarla, lo tratamos en los párrafos siguientes.

EJEMPLO 1.º — Sean las curvas $x^2 + y^2 = r^2$. Por cada punto del plano pasa una sola circunferencia del haz.

Derivando resulta: $x + y\,y' = 0$ y como no contiene el parámetro, no es necesaria la eliminación; esta es la ecuación diferencial del haz, la cual expresa la propiedad geométrica $y' = -x/y$, es decir: la normal a cualquier curva del haz en un punto cualquiera A es el radio correspondiente OA.

EJEMPLO 2.º — Si la ecuación es $(x - a)^2 + y^2 = 1$, por cada punto del plano pasan dos circunferencias del haz.

Derivando resulta: $x - a + y\,y' = 0$, y eliminando a se obtiene la ecuación diferencial del haz:

$$y^2\,y'^2 + y^2 = 1.$$

292. — Teorema de existencia de las ecuaciones de primer orden.

Una ecuación cualquiera $F(x, y, y') = 0$ que liga la variable x, la función y, la derivada primera y', se llama ecuación diferencial de *primer orden* para distinguirla de las que contienen las derivadas de órdenes superiores y'', y''', etc., que se llaman ecuaciones diferenciales de segundo, tercero .... orden, las cuales estudiaremos en capítulos siguientes.

El problema de encontrar todas las funciones que satisfacen a la ecuación es el inverso del resuelto en el número anterior y se llama *integrar la ecuación diferencial*. Geométricamente tiene este significado: encontrar la familia de curvas que tienen una cierta propiedad geométrica entre las coordenadas de cada punto y la tangente en él.

Si la ecuación diferencial de primer orden cumple la condición exigida en (205), para despejar las funciones implícitas, puede escribirse en la forma explícita

$$y' = f(x, y)$$

siendo $f(x, y)$ una función *uniforme* de x, y; pero cuando y' sea multiforme se obtendrán tantas ecuaciones diferenciales como soluciones tenga la ecuación resuelta respecto de y'.

Suponiendo y' uniforme y fijado un punto (x_0, y_0) ordinario de $f(x, y)$ (*) resulta, pues, un solo valor y'_0 dado por la ecuación, y derivando resultan los y_0'', y_0''' .... ; por tanto, para otro valor x

(*) He aquí la definición general que de ellos puede darse:
El punto (x_0, y_0) es ordinario cuando $f(x, y)$ admite un desarrollo en serie según las potencias de $x - x_0$, $y - y_0$, es decir, cuando el resto de la fórmula de Taylor tiende a cero para $n \to \infty$.

cualquiera, la función buscada queda determinada por la fórmula de Mac-Laurin:

$$y = y_0 + \frac{(x - x_0) y'_0}{1!} + \frac{(x - x_0)^2 y''_0}{2!} + \dots$$

Recíprocamente: Cauchy demostró (ver cualquier tratado moderno de Análisis, por ejemplo, Goursat, t. II) que esta serie converge y define por tanto, una función de x, que satisface a la ecuación diferencial dada. Se exceptúan aquellos puntos (x_0, y_0) en los cuales no está definida la función $f(x, y)$; por ellos no pasa ninguna curva del haz; y también los puntos singulares de $f(x, y)$ por los cuales pueden pasar infinitas curvas.

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ tiene infinitas soluciones; cada una queda determinada fijando el valor y_0 de y que corresponde a un valor $x = x_0$. O sea: por cada punto del plano (o de la región del plano en que $f(x, y)$ cumple las condiciones impuestas) pasa una curva y sólo una que satisface a la ecuación diferencial.

Toda expresión $y = \varphi(x, c)$ que satisface a la ecuación diferencial, cualquiera que sea el valor de la constante c, se llama *integral general* de la ecuación, si fijado cualquier punto (x_0, y_0) que sea ordinario para la función $f(x, y)$ existe un valor de c, y por lo tanto una curva integral, que satisface a la ecuación y pasa por el punto elegido.

La integral general da, por consiguiente, *todas* las soluciones de la ecuación que pasan por los puntos *ordinarios* de la función $f(x, y)$; pero si esta función no es uniforme, por los puntos llamados de *ramificación*, es decir, por aquellos en cuyo entorno hay dos o más funciones que se confunden en dicho punto, pueden pasar varias curvas integrales del haz; y aun otra distinta, que estudiaremos más adelante, y se llama *integral singular*.

EJEMPLOS. — La ecuación $y' = -x/y$ considerada en el Ej. 1 del párrafo anterior cumple las condiciones impuestas en todo el plano, excepto en el eje x.

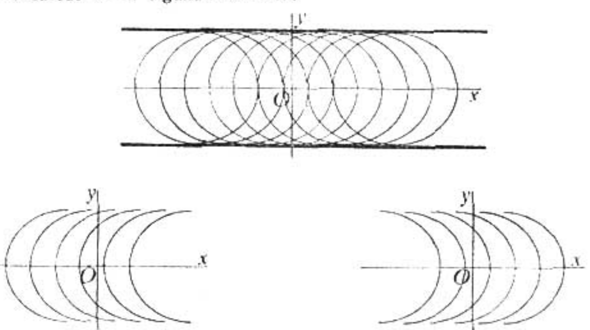
En el ejemplo 2.° la ecuación diferencial se descompone en dos:

$$y' = + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \qquad y' = - \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}$$

(*) Un punto puede ser singular aunque esto no se note en el campo real; por ejemplo, es singular el punto (0, 0) en la función

$$e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

las cuales representan, separadamente, los dos haces de semicircunferencias que indica la figura 2.ª; pues en la primera ecuación diferencial tiene y' el mismo signo de y, es decir, es positiva sobre el eje x y negativa debajo de él; y lo contrario sucede en la segunda ecuación.



Obsérvese que por cada punto interior de la zona limitada por las rectas $y = 1$, $y = -1$, pasa una curva de cada haz y sólo una, pues en cada semicircunferencia se excluyen sus extremos.

293. — Trayectorias ortogonales de un haz de curvas.

Dada una familia de curvas $\varphi(x, y, c) = 0$, se llama *trayectoria ortogonal* a toda curva que las corta perpendicularmente.

Formemos la ecuación diferencial de primer orden: $f(x, y, y') = 0$, que representa la familia dada. La condición que debe cumplir cada curva ortogonal buscada es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y'}$$

siendo y' el coeficiente angular de la tangente a la curva del haz. Por tanto, si en vez de $y' = dy/dx$ sustituimos $-x' = -dx/dy$, tenemos la ecuación diferencial de las curvas ortogonales:

$$f(x, y, -x') = 0.$$

Regla práctica. — Se forma la ecuación diferencial del haz de curvas, se permutan dx y dy cambiando el signo a uno de ellos y se tiene la ecuación diferencial del haz de curvas ortogonales al haz dado.

EJERCICIOS

1. — Obtener por la serie de Mac-Laurin la integral general de la ecuación $y' = y + x$.

2. — Obtener el haz de trayectorias ortogonales de todas las hipérbolas $xy = c$.

3. — Idem de las parábolas de eje x, foco O, y parámetro positivo.

(Resultan las parábolas del mismo eje y foco, de parámetro negativo).

Lección 71

TIPOS ELEMENTALES DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

294. — Ecuaciones con variables separables.

Cuando la ecuación tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$$

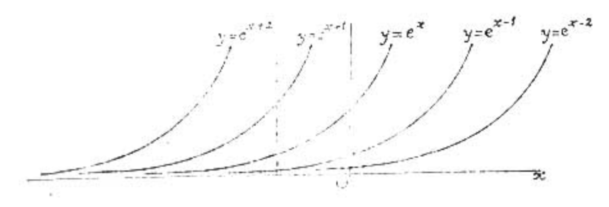
se separan las variables así: $\varphi(x) . dx = \psi(y) . dy$, e integrando ambos miembros, si $\Phi(x)$, $\Psi(y)$ son dos funciones primitivas cualesquiera, tenemos: $\Phi(x) = \Psi(y) + c$ que es la integral general.

En este tipo queda incluído el caso en que la ecuación no contiene x, y también cuando la función no contiene la y, pues $y' = f(x)$, es el caso de la integración ordinaria.

Ejemplo 1.° — Curvas que tienen la subtangente constante k. Es decir: $S_t = y/y' = k$ de donde: $dx = k . dy/y$ o integrando ambos miembros resulta:

$$x = k . ly + c \quad \text{o sea:} \quad y = e^{\frac{x-c}{k}}$$

que es la ecuación de la familia de curvas buscadas.



Obsérvese que cada curva se deduce de otra bien por *traslación* (incremento de x) o por *afinidad* (multiplicación de y).

Ejemplo 2.° — Hallar las curvas que tienen la subnormal constante. Es decir:

$$S_n = y . y' = p$$

$$y . dy = p . dx \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2} y^2 = px + c$$

La integral general es, por consiguiente:

$$y^2 = 2px + 2c$$

luego las curvas que tienen la propiedad dada son las parábolas de eje x y parámetro p.

295. — Ecuaciones homogéneas en x, y.

Cuando la función del segundo miembro es un cociente de dos funciones homogéneas del mismo grado, o sea es una función de (x, y) que no varía al multiplicar x e y por una constante arbitraria, es decir, si $f(x, y)$ sólo depende del valor del cociente $y/x = z$, es, en realidad, una función $\varphi(z)$ de la sola variable z y haciendo el cambio de la y por la z resulta:

$$y = zx \quad ; \quad dy = z.dx + x.dz$$

y sustituyendo, la ecuación se transforma así:

$$x.dz = [\varphi(z) - z]\, dx$$

de donde resulta, separando las variables:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

y después de integrados ambos miembros se restablece el valor $z = y/x$ quedando una ecuación en x, y, c, que es la integral buscada.

EJEMPLO 1.° — Sea la ecuación homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

pongamos: $y/x = z; \quad y = xz; \quad dy = z.dx + x.dz$

$$z.dx + x.dz = -\sqrt{1 + z^2}\, dx$$

$$\frac{dz}{-(z + \sqrt{1 + z^2})} = \frac{dx}{x}$$

haciendo: $z + \sqrt{1 + z^2} = t$ se integran fácilmente ambos miembros y resulta.

$$lx = -\tfrac{1}{2}\, l(z + \sqrt{1 + z^2}) + \tfrac{1}{4} : (z + \sqrt{1 + z^2}) + c$$

reemplazando t por su valor, se tiene la ecuación de la familia de curvas buscadas.

EJEMPLO 2. — Curvas cuya subtangente en cada punto es la media aritmética de las coordenadas del punto.

La ecuación es: $$2y.dx = (x + y)dy$$

y efectuado el cambio de variable $y = xz$, se transforma así:

$$2z.dx = (1 + z)(x.dz + z.dx)$$

y separando las variables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 + z)dz}{z - z^2}$$

Integrando resultan las parábolas: $y = c(x - y)^2$

296. — Ecuaciones lineales.

Se llaman *ecuaciones lineales incompletas* a las del tipo.

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \quad \text{o sea:} \quad y'/y = -P(x) \qquad [1]$$

Si llamamos $p(x)$ a una función primitiva cualquiera de $P(x)$, integrando los dos miembros, sale:

$$ly = -p(x) + lc, \quad \text{de donde:} \quad y = c \cdot e^{-p(x)}$$

integral general de la ecuación lineal incompleta.

La ecuación lineal completa (con segundo miembro) es de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad [2]$$

Hagamos: $y = u \cdot v$, y esta ecuación toma la forma:

$$uv' + u'v + P \cdot uv = Q$$

o sea:

$$u(v' + Pv) + u'v = Q$$

el primer término del primer miembro es igual a cero si elegimos v de modo que sea $v' + Pv = 0$, para lo cual basta tomar $v = e^{-p(x)}$

$$u' = Q : v = Qe^{p(x)}$$

e integrando, sale: $u = \int Qe^{p(x)} \cdot dx + C$.

Luego la función $y = uv$, o sea la *integral general* de la ecuación, es:

$$y = e^{-p(x)} \left[\int Qe^{p(x)} \, dx + C \right]$$

Ejemplo. — La intensidad I de una corriente alternada, en el momento t viene expresada por la ley de Ohm:

$$E \cdot \text{sen}\, wt = RI + LI'$$

siendo E la fuerza electromotriz máxima, w la frecuencia, R la resistencia, L el coeficiente de autoinducción.

Aplicando la fórmula general de las ecuaciones lineales y recordando las integrales del tipo $\int e^{rt} \cdot \text{sen}\, wt \cdot dt$, ya calculadas en la pág. 189, resulta, llamando $r = R : L$, la expresión:

$$I = E(r \cdot \text{sen}\, wt - w \cdot \cos wt) : L(w^2 + r^2) + Ce^{-rt}$$

que se compone de un sumando periódico y otro que decrece rápidamente.

Ejercicio. — Integrar la ecuación: $y' + 2xy = x$.

Solución: $Ce^{-x^2} + ½$.

297. — Ecuaciones de Clairaut.

La ecuación de todas las rectas del plano (excepto las paralelas al eje y) es:

$$y = cx + a;$$

pero si los coeficientes no son los dos arbitrarios, sino que están ligados por una relación $a = \alpha(c)$, tenemos una familia simplemente infinita: $y = cx + \alpha(c)$ pues contiene una sola constante.

La ecuación diferencial de este haz se obtiene así: derivando resulta $y' = c$, y eliminando c resulta

$$y = y'.x + \alpha(y') \qquad [3]$$

Las ecuaciones diferenciales de este tipo se llaman: *ecuaciones de Clairaut.*

Recíprocamente: toda ecuación de este tipo tiene por integral general las rectas $y = cx + \alpha(c)$ puesto que éstas la satisfacen, como acabamos de ver.

Como en estas ecuaciones no es y' función uniforme de (x, y), no es aplicable el teorema de existencia, y además de la integral general puede haber otra integral llamada *singular*, envolvente del haz de rectas, que se obtendrá como se vió en (243). Volveremos sobre este concepto en (303).

EJEMPLO. — Ecuación diferencial de las rectas que son cortadas por los ejes x, y en segmentos de longitud constante k

$$y = cx + d \quad ; \quad d^2 + d^2/c^2 = k^2 \quad \therefore \quad d = \pm ck/\sqrt{1 + c^2}$$

La ecuación diferencial es por tanto:

$$y = y'x + ky'/\sqrt{y'^2 + 1}$$

NOTA. — He aquí otro método para deducir la integral general y la solución singular: derivando [3], se tiene después de simplificar:

$$y''[x + \alpha'(y')] = 0$$

Si es $y'' = 0$, resultan las rectas ya obtenidas. La anulación del otro factor da otra ecuación; eliminando y' entre ella y la propuesta, resulta una curva, que según (243) es la *envolvente* del haz de rectas y se llama *integral singular.*

298. — Ecuaciones de Lagrange.

Si en la ecuación [3] el coeficiente de x no es precisamente y', sino una función de y', resulta la ecuación de Lagrange:

$$y = \alpha(y')x + \beta(y') \qquad [4]$$

Adoptemos como variable independiente $y' = t$, siendo, por tanto, x e y funciones de t; para determinarlas, derivemos respecto de x y resulta:

$$t = \alpha(t) + \alpha'(t)x.t' + \beta'(t).t'$$

Si ahora adoptamos t como variable independiente, es decir, si determinamos cada punto de una curva integral por su pendiente, es x función de t, siendo $x' = 1 : t'$, y la ecuación se transforma así:

$$(\alpha(t) - t)x' + \alpha'(t)x + \beta'(t) = 0$$

que es lineal y determina $x = x(t, c)$ como ya se explicó; teniendo despejada x, la ecuación [4] determina:

$$y = \alpha(t)x(t, c) + \beta(t)$$

y obtenemos así las curvas integrales en forma paramétrica.

Hay un caso de excepción: cuando sea $\alpha(t) = t$; es precisamente el caso, ya estudiado, de las ecuaciones de Clairaut.

Ejemplo. — Sea $y = x . y'^2 + y'^3$. La ecuación lineal que determina x, es:

$$(t^2 - t)x' + 2t . x + 3t^2 = 0$$

o sea:

$$(t - 1)x' + 2x + 3t = 0$$

cuya solución general es:

$$x = (c + 3t^2/_2 - t^3) : (t - 1)^2$$

y las ecuaciones paramétricas de cada integral son:

$$x = (c + 2t^2 - 2t^3) : (t - 1)^2$$

$$y = t^3 + (c + 3t^2 - 2t^3)t^2 : 2(t - 1)^2$$

299. — Ecuaciones de Bernoulli.

Una generalización de las ecuaciones lineales incompletas es la siguiente de Bernoulli:

$$y' = A(x)y^n + B(x) . y \qquad [5]$$

un cambio de variable que ocurre inmediatamente es este:

$$y = z^m \quad \therefore \quad y' = m . z^{m-1} . z' \quad , \quad y^n = z^{mn}$$

Si dividimos por z^{m-1} queda despejada z' y el exponente de z se reduce a 1; sólo falta que desaparezca el exponente de z en el último término, para que la ecuación sea lineal y para ello basta elegir m de tal modo que

$$mn - (m - 1) = 0 \quad \therefore \quad m = -1 : (n - 1)$$

resultando la ecuación lineal completa:

$$m . z' = A(x) + B(x)z \qquad [6]$$

y una vez integrada ésta, se deduce inmediatamente y.

Ejemplo. — Curvas tales que la ordenada del punto de intersección de la tangente con el eje y sea proporcional al cuadrado de la ordenada.

Como la abscisa del pie de la tangente es $y - xy'$, resulta la ecuación:

$$y - xy' = ky^2$$

que es del tipo $n = 2$ de Bernoulli; se reduce a lineal sustituyendo:

$$y = z^{-1} \quad \therefore \quad y' = -z^{-2} . z'$$

$$z^{-1} + xz^{-2} . z' = kz^{-2}$$

y multiplicando por z^2/x resulta la ecuación lineal:

$$z' + x^{-1} z = kx^{-1}$$

cuya solución general es

$$z = x^{-1}(\int k \, dx + C) = k + C/x$$

luego las curvas que resuelven el problema son las hipérbolas

$$y(c + kx) = x$$

que tienen la asíntota fija $y = 1/k$ y la otra paralela al eje y.

300. — Ecuaciones de Riccati.

Ocurre inmediatamente hacer también la generalización de la ecuación lineal completa agregando un término y^n; pero tales ecuaciones ya no se pueden resolver por cuadraturas; ni aun siquiera en el caso más sencillo $n = 2$. Tales ecuaciones:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \qquad [7]$$

se llaman de Riccati, y se pueden resolver completamente cuando se conoce una integral particular y_1; pues sustituyendo $y = y_1 + z$, resulta la nueva ecuación:

$$y'_1 + z' = A \cdot y_1^2 + B \cdot y_1 + C + 2A \cdot y_1 \cdot z + Az^2 + Bz$$

que se simplifica por satisfacer y_1 a la ecuación [7], resultando:

$$z' = (2Ay_1 + B)z + Az^2$$

que no es lineal, pero se hace lineal dividiendo por z^2 y poniendo $Y = 1/z$, pues se obtiene:

$$Y' = -(2Ay_1 + B)Y - A$$

Integrada ésta, se deduce la integral de [7] mediante la fórmula de transformación:

$$y = y_1 + 1/Y \qquad [8]$$

Ejemplo. — Una solución particular de la ecuación

$$y' = x^{-2} - x^{-1} \cdot y - y^2$$

es $y = -x^{-1}$, y con la sustitución $y = -1/x + 1/Y$ resulta la ecuación lineal:

$$Y' = 3x^{-1} \cdot Y - 1$$

cuya solución general es

$$Y = x^3(½x^{-2} + C) = ½x + Cx^3$$

Nota. — Hay una gradación interesante en las ecuaciones lineal incompleta, lineal completa y de Riccati. En la primera el cociente de dos integrales cualesquiera $y_1 : y_2$ es constante; en la segunda es constante el cociente de diferencias o razón simple $(y_1 - y_2) : (y_1 - y_3)$; y, por tanto, la razón doble de cuatro integrales cualesquiera ,por ser cociente de dos razones simples; finalmente, como la transformación lineal [8] conserva los valores de las razones dobles, como hemos demostrado en la lección 28 resulta: *la razón doble de cada cuaterna de integrales de una ecuación de Riccati es constante.*

EJERCICIOS

Integrar las siguientes ecuaciones de Clairaut:

$y = y'x + y' - y'^2$ sol. singular: $4y = (x + 1)^2$

$y = y'x + \sqrt{1 + y'^2}$ „ „ $x^2 + y^2 = 1$

LECCIÓN 72

ECUACIONES GENERALES DE PRIMER ORDEN

301. — Integración de las diferenciales exactas.

Toda ecuación de primer orden $y' = f(x, y)$ puede ponerse en la forma:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad [1]$$

se puede adoptar, por ejemplo:

$$P = f(x, y) \quad , \quad Q = -1$$

o bien, se puede multiplicar o dividir P y Q por cualquier constante o función de x, y, que no sea idéntica a cero. Precisamente en esta indeterminación, que permite multiplicar por un factor conveniente, se funda el método que se llama del *factor integrante.*

Consideremos primero el caso en que existe un potencial: es decir, que cumplida la condición de las derivadas cruzadas, exista una función U tal que: $U'_x = P$, $U'_y = Q$.

Entonces el binomio del primer miembro es una diferencial exacta: $dU(x, y) = 0$ y por tanto debe ser: $U(x, y) = c$. Como esta función satisface a la ecuación diferencial y contiene una constante arbitraria, es la integral general.

EJEMPLO. — Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$dx(x^2 - 2xy) - dy(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Se cumple la condición: $P'_y = Q'_x$, luego [1] es diferencial exacta, y existe la función potencial U tal que:

[2] $$U'_y = -x^2 - y^2 - 1 \quad ; \quad U'_x = x^2 - 2xy$$

De [2] sacamos:

$$U = -x^2 y - y^3/3 - y + \varphi(x)$$

$$U'_x = -2xy + \varphi'(x) = x^2 - 2xy$$

de donde

$$x^2 = \varphi'(x); \quad \varphi(x) = x^3/3 + C$$

luego la integral general U es:

$$U = -x^2 y - y^3/3 - y + x^3/3 + C.$$

302. — Cálculo del factor integrante.

Cuando la expresión dada $Pdx + Qdy$ no es diferencial exacta, multiplicando por un factor conveniente $\varphi(x, y)$ se puede conseguir transformarla en diferencial exacta. El cálculo de dicho factor integrante no es fácil en general; pero hay casos en que se obtiene inmediatamente, como vemos en este ejemplo.

EJEMPLO 1.° — El primer miembro de la ecuación

$$x\,dy - y\,dx = 0,$$

no es diferencial exacta, pero multiplicado por $1/xy$ se convierte en:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}$$

que es la diferencial exacta de: $ly - lx$, luego la integral general de la ecuación dada es:

$$ly - lx = lc \quad , \quad \text{o sea:} \quad y = cx.$$

EJEMPLO 2.° — Más general: en las ecuaciones del tipo:

$$m.y.dx + n.x.dy = 0,$$

el primer miembro se hace diferencial exacta del producto $x^m y^n$ multiplicando por el factor $x^{m-1} y^{n-1}$, pues resulta:

$$(m.x^{m-1})\, y^n\, dx + x^m (n.y^{n-1})\, dy = d(x^m y^n) = 0$$

y la integral general es: $x^m y^n = C$.

Concepto de entropía. — Ejemplo de expresión que no es diferencial exacta es la obtenida en lección 65:

$$\Delta Q = (cv.dp + Cp.dv) : R$$

que expresa el incremento total de energía de un gas al pasar del estado (p, v) al $(p + dp, v + dv)$ por un camino prefijado; si no se fija éste, carece de sentido escribir dQ.

El factor integrante es en este caso inmediato:

$$\frac{1}{t} = \frac{R}{pv}$$

y multiplicando por él resulta la diferencial de la función $S = c.lp + C.lv$ que se llama *entropía*, y que es función del *estado*, es decir, de las coordenadas (v, p), estando determinado su valor salvo una constante aditiva.

303. — Integrales singulares de las ecuaciones de 1er. orden.

Cuando la ecuación $f(x, y, y') = 0$ da origen a dos o más funciones uniformes $y' = f_1(x, y)$; $y' = f_2(x, y)$, como ha sucedido en el ejemplo de (292), resulta que además de la solución general $y = \varphi(x, c)$ puede haber otra solución $y = \psi(x)$, que se llama *integral singular*.

Así, en dicho ejemplo segundo, las funciones $y = +1$, $y = -1$ satisfacen a la ecuación diferencial y, sin embargo, no están incluídas en la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje x, definida por la integral general.

En efecto, obsérvese que al descomponer la ecuación diferencial en dos uniformes, resolviendo la ecuación de segundo grado respecto de y', hemos excluído el caso en que ambas raíces coincidan, es decir, los puntos en que sea:

$$\sqrt{1 - y^2} = 0 \qquad \text{o sea} \qquad y = \pm 1$$

Estas rectas son las *envolventes* del haz de circunferencias, es decir, son tangentes a todas ellas.

Más general: si la familia de curvas $\varphi(x, y, c) = 0$ está representada por la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$, la envolvente de las curvas es una *integral singular*.

En efecto; por cada uno de estos puntos de la envolvente pasa una curva del haz, tangente a ella y por tanto: la x, la y, y la y', son las mismas de esta curva y por tanto satisfacen a la ecuación diferencial.

304. — Líneas de fuerza de un campo vectorial.

Dado un campo vectorial de componentes $[X(x, y),\ Y(x, y)]$ las líneas de fuerza están caracterizadas por la condición de que en cada punto la tangente es el vector correspondiente, es decir: tiene por coeficiente angular: $Y(x, y)/X(x, y)$ luego la ecuación diferencial de las líneas de fuerza del campo vectorial es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

o abreviadamente:

[1] $$Y dx - X dy = 0$$

El caso más importante se presenta cuando se verifica:

[2] $$X'_y = Y'_x$$

pues entonces existe una función potencial U del campo, es decir, tal que las componentes son las derivadas parciales:

[3] $$X = U'_x \quad , \quad Y = U'_y$$

y la ecuación de las líneas equipotenciales es $U =$ constante.

La condición necesaria y suficiente para que la expresión [1] sea diferencial exacta es

[4] $$-Y'_y = X'_x$$

Entonces existe un potencial V tal que:

[5] $$-Y = V'_x, \; X = V'_y$$

y la ecuación de las líneas de fuerza es: $V =$ constante, y sustituyendo en [4] los valores [3] resulta:

$$U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0 \quad \text{o simbólicamente:} \quad \Delta U = 0$$

Análogamente, sustituyendo en [2] los valores [5] resulta:

$$V''_{x^2} + V''_{y^2} = 0 \quad \text{o sea:} \quad \Delta V = 0$$

es decir: los dos potenciales (que se llaman conjugados) satisfacen a la ecuación de Laplace.

De [3] y [5] resulta: *las curvas equipotenciales $U =$ const. y las líneas de fuerza $V =$ const. son ortogonales.*

Ejemplo. — Sea el campo vectorial:

$$X = x^2 - y^2 \qquad Y = -2xy$$

que cumple la condición de las derivadas cruzadas; luego existe un potencial U, tal que:

$$U'_x = x^2 - y^2 \;\; , \;\; U'_y = -2xy \;\; \therefore \;\; U = \tfrac{1}{3}x^3 - y^2x + c$$

También existe un potencial conjugado V, tal que:

$$V'_x = -2xy \;\; , \;\; V'_y = y^2 - x^2 \;\; \therefore \;\; V = -x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 + C$$

Dibújense las curvas equipotenciales $U =$ const. y las líneas de fuerza $V =$ const.

NOTAS

Sobre el factor integrante.

Conviene aclarar el verdadero alcance de este concepto, pues pudiera creerse en su eficacia para la integración de ecuaciones de primer orden.

Suponiendo $Q = 1$, pues basta dividir por Q para lograrlo, la condición para que el producto $(P \,.\, dx + dy)z$ sea diferencial exacta es:

$$z_x - P \cdot z_y = P_y \cdot z$$

ecuación lineal en derivadas parciales cuya resolución, como veremos en (325), se reduce a la de un sistema de ecuaciones ordinarias, una de las cuales es precisamente la propuesta.

Que en algunos casos se encuentra el factor, no es extraño; son aquellos en que se conoce la integral general $F(x, y) = C$, pues ambos problemas son equivalentes. Conocida F, la ecuación diferencial puede escribirse en la forma:

$$F_x \,.\, dx + F_y \,.\, dy = 0 \qquad \text{luego } z = F_y.$$

Ejercicio. — Obtener el factor integrante de la ecuación lineal y de la ecuación homogénea.

LECCIÓN 73

INTEGRACION APROXIMADA DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

305. — Método del desarrollo en serie.

No existe método general para reducir una ecuación diferencial a *cuadraturas* (esto es, a *integraciones* ordinarias de funciones de una sola variable); pero la integral general existe siempre que se cumplan las condiciones (292) y está representada por la serie que allí hemos obtenido.

Cuando la ecuación dada no sea de ninguno de los tipos elementales integrados en la lección 69 por cuadraturas ,habrá de abordarse su integración mediante la serie [1] anterior, que siempre resulta convergente en un cierto intervalo, según el teorema fundamental arriba enunciado. Obtendremos, pues, un arco de curva integral a partir del punto inicial (x_0, y_0) a uno y otro lado ;tomaremos uno cualquiera de sus puntos (x_1, y_1) como inicial, y repitiendo el mismo método obtendremos otro arco y así sucesivamente.

El cálculo de las derivadas sucesivas se hace fácilmente:

$$y' = f; \quad y'' = f'_x + f'_y \cdot y' = f'_x + f'_y \cdot f$$

$$y''' = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{yy} \cdot f^2 + f'_y \cdot f'_x + (f'_y)^2 \cdot f$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y tenemos la fórmula final:

$$\Delta y = hf + \tfrac{1}{2}h^2 \, [f'_x + f'_y \cdot f] +$$

$$+ h^3/3! \, [f''_{x^2} + 2f''_{xy} f + f''_{y^2} \cdot f^2 + f'_y(f'_x + f \cdot f'_y)] + \dots \qquad [2]$$

que da el valor *exacto* de Δy correspondiente al $\Delta x = h$.

EJEMPLO. — **Ecuación: $y' = y^2 + x$, con las condiciones iniciales: $x = 0$, $y = 0$.**

$$y'' = 2y\,y' + 1$$

$$y''' = 2y\,y'' + 2y'^2$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 2y\,y''' + 6y'\,y''$$

$$y^{\mathrm{V}} = 2y\,y^{\mathrm{IV}} + 8y'\,y''' + 6y''^2$$

de donde:

$$y_0' = 0, \; y_0'' = 1, \; y_0''' = 0, \; y_0^{\mathrm{IV}} = 0, \; y_0^{\mathrm{V}} = 0, \; \dots$$

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + {}^1/_{20}x^5 + \dots$$

una solución bastante aproximada es, pues, $\frac{1}{2}x^2$. En un interalo de 0,1 el error cometido tomando este arco de parábola es menor que 0,000001.

306. — Método de aproximación de Euler.

Como el método de desarrollar en serie tiene a veces el inconveniente de la lenta convergencia, o la pequeñez del intervalo de validez, se han ideado métodos más rápidos para el cálculo de la integral que pasa por un punto dado (x_0, y_0).

El cociente $\Delta y/\Delta x$ es igual al valor de la derivada en un punto intermedio del intervalo considerado; tendremos, pues, en el punto (x_0, y_0) un valor aproximado del Δy correspondiente a un incremento Δx admitiendo que y' varíe tan poco en el intervalo Δx que pueda considerarse como constante. Es decir:

$$\Delta y = y_1 - y_0 \sim (x_1 - x_0) \,.\, f(x_0, y_0)$$

Esto equivale a tomar como curva un segmento de tangente. Si en el punto (x_1, y_1) consideramos el valor que en él toma la derivada $y' = f(x_1, y_1)$, calcularemos el nuevo incremento:

$$\Delta y = (y_2 - y_1) \sim (x_2 - x_1) f(x_1, y_1)$$

y así sucesivamente.

Este método clásico de Euler no es admisible sino como aproximación grosera, pues la quebrada así formada se va separando más y más de la curva integral que buscamos.

Ejemplo. — Si en una corriente uniforme de un canal se interpone un obstáculo (un muro por ejemplo) el fondo del canal no es paralelo a la superficie del agua, sino que ésta se eleva formando una curva; la diferencia de ordenadas y entre el fondo y la superficie es $y = f(x)$.

La ecuación diferencial de tal curva es:

$$\frac{j \,.\, dx}{dy} = \frac{y^3 - k^3}{y^3 - h^3}$$

siendo k un coeficiente de rozamiento, j la pendiente del fondo del canal y h una constante. La ecuación [1] puede integrarse por cuadraturas. Pero aproximadamente, puede integrarse así: la [1] según lo dicho más arriba es:

$$\Delta y \sim j \,.\, \Delta x \; \frac{y^3 - h^3}{y^3 - k^3}$$

para un punto x_0 se puede medir la altura y_0 del agua, y se tiene la condición inicial del problema. Se toma para Δx un cierto valor y se calcula el incremento Δy que le corresponde. Se tiene un nuevo punto (x_1, y_1) con el cual se vuelve a operar como si fuera inicial. Se determina así por puntos la curva de la superficie del agua.

307. —Método de Runge.

Partiendo del punto inicial (x_0, y_0) el incremento Δy correspondiente al $\Delta x = h$, viene expresado por la fórmula [2]. El método de Euler se limita a considerar su primer término, aproximación demasiado deficiente, mientras que el método de Runge da los dos primeros y aún los tres.

La primera fórmula de Runge es la siguiente:

$$k' = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}f \cdot h) \qquad [3]$$

y su significado geométrico es éste: la tangente en A_0 a la curva integral corta a la recta $x = x_0 + \frac{1}{2}h$ en un punto A_1 que tiene las coordenadas $(x_0 + \frac{1}{2}h,\ y_0 + \frac{1}{2}f \cdot h)$ al cual corresponde una tangente; la paralela por A_0 determina en la reèta $x = x_0 + h$ un punto que aproximadamente pertenece a la curva integral de A_0.

En efecto, desarrollando por la fórmula de Taylor, resulta:

$$k' = hf + \tfrac{1}{2}h^2(f'_x + f'_y \cdot f) + \tfrac{1}{8}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{y^2} \cdot f^2) + \ldots .$$

desarrollo que coincide con [2] en los términos h y h^2, siendo el error de tercer orden.

Ejemplo. — Aunque para funciones algebraicas es más ventajoso el desarrollo en serie, he aquí un ejemplo para indicar la marcha del cálculo. Sea integrar $y' = x^2 + y^2$ para $x = y = 0$ siendo $h = 0{,}2$

x	y	f	$x + \frac{1}{2}h$	$y + \frac{1}{2}hf$	f
0	0	0	0,1	0	0,002
0,2	0,002	0,04	0,3	0,006	0,018
0,4	0,020	0,160	0,5	0,036	0,025

Segunda fórmula de Runge. — Calcúlense sucesivamente:

$$k_1 = f(x_0, y_0) \cdot h \qquad k_2 = f(x_0 + h,\ y_0 + k_1) \cdot h \qquad k_3 = f(x_0 + h\ ,\ y_0 + k_2) \cdot h$$

es decir: se calcula el incremento por la fórmula de Euler; en el punto obtenido se aplica nuevamente, y otra vez en el mismo punto corregido con el nuevo incremento k_2 en vez del k_1. El promedio

$$k'' = \tfrac{1}{2}(k_1 + k_3) = \tfrac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h,\ y_0 + k_2)) \cdot h$$

da un valor del mismo orden que el k', es decir, da exactamente los términos primero y segundo del desarrollo. En efecto:

$$k_1 = h \cdot f$$

$$k_2 = h \cdot f + h^2(f'_x + f'_y \cdot f) + \tfrac{1}{2}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{y^2} \cdot f^2) + \ldots .$$

$$k_3 = [f + h \cdot f'_x + k_2 f'_y + \tfrac{1}{2}(h^2 f''_{x^2} + 2h\, k_2 f''_{xy} + k_2^2 f''_{y^2}) + \ldots .]\, h =$$

$$= h \cdot f + h^2(f'_x + f'_y f) + \tfrac{1}{2}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{y^2} \cdot f^2) +$$

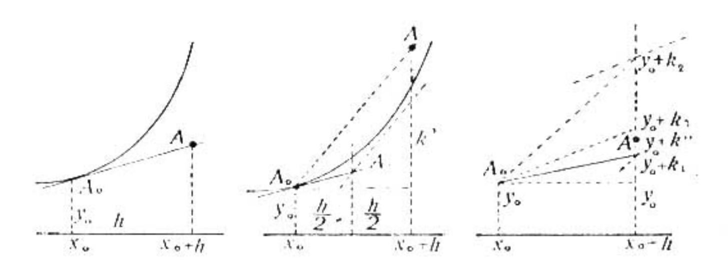
$$+ h^3\ (f'_x \cdot f'_y + f'^2_y \cdot f) + \ldots$$

y el promedio de k_1 y k_2 es:

$$k'' = h.f + \tfrac{1}{2}h^2(f'_x + f'_y.f) + \tfrac{1}{4}h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}h^3(f'_x.f'_y + f'_{y}{}^2 f) + \ldots.$$

que da un error de tercer orden; pero a nada conduciría obtener esta segunda fórmula del mismo orden que la más sencilla k', si no fuera porque combinadas ambas, resulta otra de orden superior, dada por la expresión:

$$K = (2k' + k'') : 3 \qquad [4]$$



En efecto ,los términos comunes a k' y k'', subsisten en K; y los términos de tercer grado producen éste:

$$h^3(f''_{x^2} + 2f''_{xy}.f + f''_{y^2}.f^2 + f'_x.f'_y + f'_{y}{}^2.f) : 6$$

que coincide con el que aparece en el desarrollo [2]. Luego el error de K es de cuarto orden.

EJERCICIOS

1. — Integrar por desarrollo en serie, la ecuación del péndulo:

$$\alpha'^2 = c + 2k.\cos\alpha$$

siendo α el ángulo con la vertical y $k = g/l$.

Obtener como primera aproximación la fórmula elemental $T = 2\pi : \sqrt{l}$.

2. — Siendo a la amplitud de la oscilación, póngase

$$k = \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\, a \quad ; \quad \text{sen}\, t = \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,\alpha : \text{sen}\, \tfrac{1}{2} a$$

y resulta t expresado por una integral elíptica de primera especie.

Sea $a = 30°$; $l = g$; y resulta mediante la tabla final:

$t =$ 0,07	0,12	0,19	0,26	0,33	......	1,60
$\alpha =$ 2°	4°	6°	8°	10°	......	30°

3. — Aplíquese el método de Euler y el de Runge al ejemplo anterior, comparando los resultados.

LECCIÓN 74

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

308. —Teorema general de existencia.

Las ecuaciones diferenciales de la Mecánica son de la forma: $y'' = f(t, y, y')$ siendo t el tiempo, y la coordenada que define el movimiento, y' la velocidad e y'' la aceleración.

Asimismo las ecuaciones diferenciales de la Geometría en que interviene la curvatura (línea elástica, catenaria, etc.) son de segundo orden ,es decir, relacionan la variable independiente, la función incógnita y sus derivadas primera y segunda.

Consideremos la ecuación diferencial general de segundo orden: $F(x, y, y', y'') = 0$. Suponiendo que esta función cumple la condición de las funciones implícitas, determinamos: $y'' = f(x, y, y')$ como función de x, y, y'; por derivación pueden calcularse $y''', y^{IV}, y^{V}\ldots$ Fijemos un punto (x_0, y_0) y demos arbitrariamente el valor y'_0 a la derivada en él; las expresiones anteriores determinan: $y''_0, y'''_0, y^{IV}_0 \ldots$ y, por tanto, desarrollando en serie de Mac-Laurin, obtenemos:

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 y''_0 + \cdots \qquad [1]$$

que, según demuestran todos los tratados de Análisis, converge en un cierto intervalo (*) y, por tanto, representa una función que satisface a la ecuación. Este método sirve, no sólo para demostrar la existencia de solución de la ecuación diferencial, sino también de regla práctica para calcularla.

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene, pues, infinitas integrales y cada una queda determinada fijando un punto y la tangente en él, es decir: x, y, y'.

La expresión general, también llamada integral general, contiene, pues, dos constantes arbitrarias que pueden ser y_0, y'_0, o bien dos parámetros libres c_1, c_2, a condición de que se puedan determinar de tal modo que para un valor dado x_0 resulten los valores prefijados y_0, y'_0.

(*) Ver p. ej., GOURSAT, vol. II. Es condición *suficiente* para la convergencia de la serie [1] que la función dada $f(x, y, y')$ sea analítica regular, es decir, desarrollable en serie de potencias crecientes de sus tres variables en el entorno de los valores dados (x_0, y_0, y_0').

Una expresión $y = f(x, c_1, c_2)$ que satisface a la ecuación, pero no cumple esta condición de quedar determinados c_1, c_2, al fijar x_0, y_0, y'_0 no es la integral general.

309. — Tipos de ecuaciones incompletas.

He aquí los tipos más sencillos:

Ecuaciones $y'' = const.$ — Se resuelven por dos cuadraturas, integrando dos veces y resulta un trinomio de segundo grado.

EJEMPLO. — Ecuación del movimiento uniformemente acelerado. Si la aceleración es α, la ecuación es:

$$y'' = \alpha \quad \therefore \quad y' = \alpha t + a \quad \therefore \quad y = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + at + b.$$

Las constantes a, b se determinan conociendo los valores iniciales y, y', por ejemplo, la abscisa inicial para $t = 0$ es b; la velocidad inicial es a.

Ecuaciones $y'' = f(x)$. — Basta integrar dos veces sucesivas.

EJEMPLO. — Ecuaciones de un movimiento en que la aceleración crece uniformemente

$$y'' = \alpha t + \beta \quad \therefore \quad y' = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + a \quad \therefore \quad y = \tfrac{1}{6}\alpha t^3 + \tfrac{1}{2}\beta t^2 + at + b$$

Ecuaciones $y'' = f(y)$. — Multiplicándola miembro a miembro por $y' \,.\, dx = dy$, resulta:

$$y'.dy' = f(y)dy \quad \therefore \quad \tfrac{1}{2}y'^2 = \int f(y)dy$$

y efectuada la integración se obtiene:

$$y' = \sqrt{\varphi(y) + c}$$

que se integra separando variables y aparece la segunda constante.

EJEMPLO. — La ecuación del movimiento de un punto atraído por otro con fuerza proporcional a la distancia es:

$$y'' = -k^2 y \quad \therefore \quad y'.dy' = -k^2 y.dy$$

e integrando sale:

$$y'^2 = -k^2 y^2 + (kc)^2$$

pues se puede dar esa forma a la constante arbitraria; y esta ecuación puede escribirse así:

$$\frac{dy}{k\sqrt{c^2 - y^2}} = dx \quad \therefore \quad kx + C = \text{arc sen}\,(y/c)$$

Resulta, pues, la integral general:

$$y = c.\text{sen}\,(kx + C)$$

A este mismo resultado llegaremos por otro camino en la lección próxima.

Ecuaciones $y'' = f(y, y')$. — La misma transformación anterior, que consiste en adoptar y como variable independiente conduce a una ecuación de primer orden respecto de la función y':

$$y' . dy' = f(y, y') dy$$

que, si se puede integrar ,expresa $y' = \varphi(y, c)$; e integrada esta nueva ecuación de primer orden, resulta la función y con dos constantes arbitrarias.

EJEMPLO. — Curvas en que el radio de curvatura es proporcional a la normal.

Resultan todas las circunferencias simétricas respecto del eje x.

Ecuaciones $y'' = f(x, y')$. — Adoptaremos $y' = z$ como función incógnita y se transforma en la ecuación de primer orden $z' = f(x, z)$; si se sabe integrar ésta, resulta z función de x con una constante arbitraria; y resultará otra al integrar z para despejar y.

En particular, si la ecuación dada no contiene x, siendo del tipo $y'' = f(y')$ la ecuación de primer orden $z' = f(z)$ se integra separando variables.

EJEMPLO. — Obtener las curvas cuya curvatura es constante en todos sus puntos. La ecuación se integra muy fácilmente con el cambio de variable utilizado en el párrafo siguiente, y resultan todas las circunferencias.

NOTA. — Por si el lector observa la ausencia del tipo $y'' = f(x, y)$, conviene advertir que aun en casos tan simples como $y'' = xy$, $y'' = x^2 y$, ... su integración exige recursos de Análisis superior, pues y es suma de una función de Bessel y una de Neumann. En cambio, es muy elemental el tipo $y'' = ay +$ polin. en x.

310. — Ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

Se llaman lineales las ecuaciones de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad [2]$$

Si los coeficientes son funciones de x no se pueden integrar elementalmente, sino por series, que dan origen a funciones nuevas.

Si los coeficientes son constantes, ensayemos como integral particular la expresión $y = e^{rx}$ y vemos que la condición necesaria y suficiente que debe cumplir r para que satisfaga a la ecuación es:

$$ar^2 . e^{rx} + br . e^{rx} + c . e^{rx} = 0 \quad \text{o sea:} \quad ar^2 + br + c = 0 \qquad [3]$$

es decir: la expresión $y = e^{rx}$ es una integral particular de la ecuación si r es raíz de la ecuación algebraica [3], llamada *característica*.

Llamando r_1, r_2 a las dos raíces, cuando éstas son distintas, obtenemos infinitas integrales por las fórmulas: $c_1 . e^{r_1 x}$ y $c_2 . e^{r_2 x}$, pero por satisfacer cada una a la ecuación, también la suma es una integral, luego:

$$y = c_1 . e^{r_1 x} + c_2 . e^{r_2 x} \qquad [4]$$

es la integral general, ya que fijados x_0, y_0, y'_0 tenemos dos ecuaciones:

$$y_0 = c_1 . e^{r_1 x_0} + c_2 . e^{r_2 x_0}$$

$$y'_0 = c_1 . r_1 . e^{r_1 x_0} + c_2 . r_2 . e^{r_2 x_0}$$

que determinan una integral particular, despejando c_1, c_2, ya que el determinante del denominador es:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 . e^{r_1 x_0} & r_2 . e^{x_0 r_2} \end{vmatrix}$$

y separados los factores exponenciales, queda:

$$r_2 - r_1 \neq 0.$$

Primer caso: *Raíces reales distintas.* — La curva tiene una rama y se extiende indefinidamente con un solo máximo o ninguno.

Segundo caso: *Raíces imaginarias.* — Aunque la expresión [4] fué definida suponiendo reales las raíces, veamos si en el caso de raíces imaginarias $\alpha \pm i\beta$, podrá utilizarse para él.

Recordemos del Algebra las definiciones:

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i \operatorname{sen}\beta$$

$$e^{-i\beta} = \cos\beta - i \operatorname{sen}\beta.$$

$$e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha} . e^{i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)$$

$$e^{\alpha-i\beta} = e^{\alpha} . e^{-i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta)$$

la expresión [4] se transforma en:

$$y = (c_1 + c_2) e^{\alpha x} . \cos\beta x + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x} . \operatorname{sen}\beta x$$

y llamando A y B a los coeficientes reales o imaginarios, resulta la integral general:

$$y = e^{\alpha x} [A \cos\beta x + B \operatorname{sen}\beta x] \qquad [5]$$

si en esta fórmula damos a A y B valores *reales arbitrarios*, obtenemos infinitas integrales de la ecuación dada (*).

(*) Sin necesidad de utilizar números complejos se ve directamente que [5] es la integral general, pues junta con la ecuación

$$y' = \alpha e^{\alpha x} [A \cos\beta x + B \operatorname{sen}\beta x] + \beta e^{\alpha x} [-A \operatorname{sen}\beta x + B \cos\beta x]$$

$$\text{o sea:} \quad y' = \alpha y + \beta e^{\alpha x} [-A \operatorname{sen}\beta x + B \cos\beta x]$$

determina A, B, fijados x_0, y_0, y'_0, ya que el determinante de los coeficientes, previa simplificación, vale 1.

NOTA. — A esta expresión puede dársele otra forma, eligiendo un ángulo φ definido por las relaciones

$$A = C.\operatorname{sen}\beta\varphi \quad , \quad B = C.\cos\beta\varphi$$

de donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$:

$$y = Ce^{\alpha x}.[\operatorname{sen}\beta\varphi\cos\beta x + \cos\beta\varphi\operatorname{sen}\beta x]$$

o sea

$$y = Ce^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta(x + \varphi)$$

donde las constantes son C y el ángulo φ.

Caso particular. — Si es $b = 0$, es decir, si la ecuación se reduce a: $y'' + cy = 0$, la ecuación característica es:

$$r^2 + c = 0, \qquad r = \pm i\sqrt{c}$$

y la integral se reduce a:

$$y = C\operatorname{sen}\beta(x + \varphi)$$

que es una función armónica.

TERCER CASO: *Raíces iguales.* — En tal caso sólo tenemos una integral particular: e^{rx}, de la que deducimos infinitas por la fórmula: ce^{rx}.

Otra integral es: $y = xe^{rx}$, pues resulta:

$$y' = rx\,e^{rx} + e^{rx}$$

$$y'' = r^2\,xe^{rx} + 2re^{rx}$$

y sustituyendo en la ecuación se verifica:

$$(ar^2 + br + c)xe^{rx} + (2ar + b)e^{rx} = 0$$

pues ambos paréntesis se anulan, ya que r no sólo es raíz de la ecuación característica, sino que también anula a su derivada $2ar + b$ por ser raíz doble. La expresión:

$$y = Ce^{rx} + C'\,xe^{rx}$$

es la integral general, puesto que se puede con ella satisfacer a condiciones iniciales arbitrariamente dadas (*).

(*) En efecto, el sistema:

$$Ce^{rx_0} + C'x_0\,e^{rx_0} = y_0$$

$$Cre^{rx_0} + C'(x_0\,re^{rx_0} + e^{rx_0}) = y'_0$$

tiene solución, puesto que el determinante de los coeficientes es distinto de 0.

311. — Ecuación de los movimientos vibratorios.

Estudiemos el movimiento de un punto sometido a una fuerza atractiva, desde un punto fijo O, cuando la fuerza es proporcional a la distancia. Tal sucede, por ejemplo, con un punto sujeto a O por una goma o un resorte análogo, cuya fuerza, entre ciertos límites de elasticidad, es proporcional a la distancia

La ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y \quad \text{o sea:} \quad y'' + k^2 y = 0$$

llamando k^2 a la constante de proporcionalidad.

La ecuación característica es: $r^2 + k^2 = 0$ y la integral general:

$$y = e^{ikt} + e^{-tik} = A \cos kt + B \operatorname{sen} kt.$$

Si en el momento inicial el punto tiene la abscisa a y la velocidad nula, tenemos las condiciones iniciales:

$$A = a, \quad Bk = 0 \quad \text{de donde} \quad B = 0$$

y la ecuación del movimiento es: $y = a \cos kt$.

Luego el movimiento es periódico, con período: $2\pi/k$ y fase nula. La gráfica que lo representa respecto de los ejes t, y, es una cosinusoide de amplitud a.

Estudiemos ahora el caso general. Si hay rozamiento: $2h\,y'$ proporcional a la velocidad ,con un factor de proporcionalidad $2h$, (como sucede, por ejemplo, aproximadamente, con el movimiento en el aire o en otro medio resistente cualquiera) la ecuación del movimiento es:

$$y'' = -k^2 y - 2h\,y' \quad \text{o sea:} \quad y'' + 2h\,y' + k^2 y = 0$$

la ecuación característica es :

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0 \quad \therefore \quad r = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

PRIMER CASO: *Raíces imaginarias.* — Llamando

$$\Delta = k^2 - h^2 \qquad r = -h \pm i\sqrt{\Delta}$$

La integral general es:

$$y = e^{-ht}\,[A \cos t\sqrt{\Delta} + B \operatorname{sen} t\sqrt{\Delta}].$$

Si las condiciones iniciales son: $t = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, como sucede en el caso del punto abandonado a la atracción de un resorte tenso, resulta como antes:

$$B = 0, \quad A = a, \quad y = e^{-ht}\,a \cos t\sqrt{\Delta}$$

que representa un movimiento *amortiguado*, cuya amplitud inicial a disminuye y tiende a cero al crecer t.

SEGUNDO CASO: *Raíces reales distintas.* — La ecuación característica tiene dos raíces reales r_1, r_2 y la ecuación del movimiento es:

$$y = C . e^{r_1 t} + C' . e^{r_2 t}$$

$$y' = r_1 C . e^{r_1 t} + r_2 C' . e^{r_2 t}$$

Las condiciones iniciales exigen que sea:

$$C + C' = a; \quad C r_1 + C' r_2 = 0$$

de donde se despejan C y C'; y según los valores de h y k resultará una curva distinta, pero siempre *aperiódica* y que para $t \to \infty$ se aleja indefinidamente.

TERCER CASO: *Raíces iguales.* — Entonces es: $r_1 = r_2 = -h$.

La integral general es:

$$y = C e^{-ht} + C' t e^{-ht} = e^{-ht}(C + C' t).$$

312. — Ecuación diferencial de la línea elástica.

La ecuación de la línea elástica es, como se explicó anteriormente:

$$\frac{dy'}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}} = f(x)\,dx.$$

separando las variables y' y x. Para integrarla ponemos: $y' = \operatorname{tg} t$

$$1 + y'^2 = 1/\cos^2 t \quad ; \quad dy' = dt/\cos^2 t$$

y la ecuación se reduce a: $\cos t . dt = f(x) . dx$.

Integrando resulta: $\operatorname{sen} t = \int f(x) dx + C = \varphi(x)$.

Despejando y', por ser

$$y' = \operatorname{tg} t = \operatorname{sen} t/\cos t$$

resulta en definitiva:

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}$$

$$y = \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-\varphi(x)^2}}\, dx + C'',$$

que es la ecuación exacta de la línea elástica, pero cuya integración sólo se podrá hacer elementalmente en casos muy especiales.

Por ejemplo: cuando $f(x)$ = constante = $1/r$ y suponiendo $C = 0$, entonces resulta:

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} + C$$

$$(y - C)^2 + x^2 = r^2,$$

que es una circunferencia de radio r, como era de esperar.

Comparación de la solución exacta y la aproximada. — Conviene llamar la atención sobre el carácter *aproximado* que tiene la solución dada en (149) al problema de la línea elástica. Para probar la diversa forma que resulta para la línea elástica según se haga la integración de la ecuación exacta o de la aproximada, consideremos el caso de una viga apoyada en sus extremos con dos pesos iguales equidistantes de ellos. Las reacciones de los apoyos son P Aplicado el método aproximado allí expuesto, resulta una curva compuesta de dos arcos de parábola cúbica y un arco de parábola de segundo grado.

En cambio, si tomamos la ecuación exacta ,resulta entre $-a$ y $+a$:

$$M(x) = Pl,$$

luego r = constante, es decir, el trozo de línea elástica entre $-a$, $+a$ es un arco de circunferencia. En el intervalo (a, b) es $M(x) = P.x$ y resulta la integral elíptica.

EJERCICIOS

1. — Estudiar el movimiento de un paracaídas, cuya ecuación es

$$y'' = y - ky'^2$$

2. — Reducir al primer orden la ecuación del péndulo $\alpha'' + h . \operatorname{sen} \alpha = 0$.

Lección 75

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN n

313. — Teorema general de existencia.

Dada una ecuación diferencial de orden n:

$$F(x, y, y', y'', \ldots . \; y^{(n)}) = 0 \qquad [1]$$

supongamos que despejando $y^{(n)}$ queda determinada

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \; \ldots . \; y^{(n-1)}) \qquad [2]$$

como función uniforme de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{n-1}$; cuando resulten varias funciones uniformes se estudia cada una por separado. Por derivación de la expresión [2] se van calculando las derivadas sucesivas $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ .... como funciones de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{(n-1)}$.

Fijados arbitrariamente los valores:

$$y_0, y'_0, y''_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$$

que corresponden a $x = x_0$, podremos, pues, calcular los valores $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n-1)}$, ... de todas las derivadas en el mismo punto x_n y el valor de y correspondiente a cualquiera de x viene dado por la serie de Taylor:

$$y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 y''_0 + \ldots .$$

Se demuestra en los tratados de Análisis que esta serie converge (si la función f es desarrollable en serie) y por tanto define en un cierto intervalo una función $y = \varphi(x)$ que satisface a la ecuación diferencial. Luego podemos enunciar:

Si en una ecuación diferencial de orden n la derivada $y^{(n)}$ es función analítica uniforme de $x, y, y' \; \ldots . \; y^{(n-1)}$, hay una función $y = \varphi(x)$ y sólo una que satisface a la ecuación diferencial y que para el valor dado $x = x_0$, ella y sus derivadas hasta la $y^{(n-1)}$ toman los valores prefijados: $y_0, y'_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$.

Por tanto; si encontramos una función: $y = \varphi(x, C_1, C_2 \ldots C_n)$ con n constantes arbitrarias que satisface a la ecuación diferencial y que cumple la condición de que fijados valores cualesquiera $x_0, y_0, y'_0 \; \ldots . \; y_0^{(n-1)}$, se pueden elegir las constantes de modo que la función y sus $n - 1$ primeras derivadas tomen estos valores prefijados, resulta que toda integral de la ecuación queda incluída en la fórmula $y = \varphi(x, C_1, C_2 \; \ldots . \; C_n)$ dando a las constantes valores convenientes, y esta fórmula constituye la *integral general* de la ecuación diferencial.

314. — Ecuaciones lineales con coeficientes variables.

La ecuación diferencial lineal de orden n con segundo miembro es del tipo:

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = Q(x)$$

donde $P_0(x)$, $P_1(x) \ldots P_n(x)$, $Q(x)$ son, en general, funciones de x.

En particular, es interesante el caso en que carece de segundo miembro, o sea $Q(x) = 0$

$$P_0(x) \cdot y^{(n)} + P_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = 0$$

Esta ecuación homogénea tiene las propiedades siguientes:

1.° Si y_1 es una integral particular, también lo es ky_1; pues al sustituir ky_1 en vez de y_1 el primer miembro queda multiplicado por k y por tanto se anula.

2.° Si y_1, y_2 *son integrales de la ecuación* también lo es la suma $y_1 + y_2$, pues las derivadas sucesivas de la suma, son las sumas de las derivadas sucesivas de las funciones y_1 e y_2 y el valor que toma el polinomio es suma de los valores que toma para y_1 y para y_2 es decir $0 + 0 = 0$.

Por tanto, conocidas n integrales particulares $y_1, y_2 \ldots y_n$ la expresión: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, es también una integral de la ecuación. Mas, para asegurar que es la integral general, será preciso demostrar que se pueden determinar las constantes de modo que y y sus derivadas tomen los valores iniciales; es decir, para cada valor de x han de tomar los valores correspondientes prefijados: $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$ (*).

(*) Estas condiciones son:

$$\begin{aligned} C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n y_n &= y_0 \\ C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n y'_n &= y'_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

y podrá asegurarse que hay un sistema de constantes $C_1, C_2 \ldots C_n$ que cumplen estas condiciones, si el determinante del sistema:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots\ldots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & \ldots\ldots & y''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots\ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero para todo valor de x. Este determinante suele llamarse *Wronskiano* de las n funciones $y_1, y_2 \ldots y_n$; y cuando se cumple esta condición $W \neq 0$ las n funciones se llaman *linealmente independientes.*

Si la ecuación tiene segundo miembro $Q(x)$ y es $y = \varphi(x)$ una integral particular, si se hace la sustitución $y = \varphi(x) + Y$ como el primer sumando da al primer miembro el valor Q, el segundo debe darle el valor 0, es decir, debe satisfacer a la ecuación sin segundo miembro. Por tanto: *se obtienen todas las integrales de la ecuación completa sumando a la integral particular* $\varphi(x)$ *la integral general de la ecuación incompleta.* La integral general de la ecuación completa es, por consiguiente:

$$y = \varphi(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

NOTA. — Las ecuaciones lineales de coeficientes variables no son, en general, integrables por funciones elementales y dan, por tanto, origen, a nuevas funciones que se presentan con frecuencia en Física. Así, por ejemplo, dada la ecuación de Bessel:

$$y'' + y'/x + y = 0$$

se integra poniendo

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

e identificando los coeficientes de ambos miembros resulta con cálculo sencillo la función siguiente: $a_0 [1 - x^2/(2.2) + x^4/(2.4)^2 - \ldots]$.

La función entre paréntesis tiene frecuentes aplicaciones y se llama función de Bessel de orden cero representándose por $J_0(x)$. Nótese que para $x = 0$ sólo puede darse arbitrariamente $y_0 = a_0$ pero no y'_0 como sucede, en general, con las ecuaciones de segundo orden; en esta ecuación la derivada y'_0 es siempre nula y el teorema general no es aplicable porque la expresión y'/x tiene el punto singular $x = 0$.

315. — Ecuaciones lineales de coeficientes constantes.

Ante todo veamos algunos tipos con 2.° miembro $Q(x)$ quq permiten obtener fácilmente una integral particular de la ecuación completa:

1.°) Si $Q(x)$ es polinomio de grado q, escríbase $y =$ polinomio de grado q con coeficientes indeterminados que se calculan identificando ambos miembros. Si en la ecuación faltan los últimos h términos, deberá ponerse $y = x^h$. (Pol. de grado q).

2.°) Si $Q(x)$ es producto de e^{hx} por polinomio, póngase en vez de y una expresión del mismo tipo.

3.°) Si $Q(x) = e^{hx}(A \cos ax + B \operatorname{sen} ax)$, también y es del mismo tipo, con coeficientes que se determinarán por identificación.

Sea la ecuación de coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0.$$

Generalizando el método seguido para las ecuaciones de segundo orden pongamos: $y = e^{rx}$ y el valor que toma el primer miembro es:

$$e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_{n-1} r + p_n) = 0$$

Para que e^{rx} satisfaga a la ecuación bastará, pues, elegir el exponente r de modo que sea raíz de la ecuación de grado n:

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n = 0,$$

llamada *ecuación característica* de la ecuación diferencial.

Calculadas sus n raíces tenemos la integral:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$

que es la integral general (*).

Las raíces imaginarias conjugadas: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$ dan origen a dos exponenciales:

$$C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$$

que agrupadas como se hizo en el caso de la ecuación de segundo orden dan una expresión:

$$e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \operatorname{sen} \beta x)$$

Si la raíz r es múltiple (por ej.: doble) el número de integrales particulares queda disminuído, pues dicha raíz nos da solamente e^{rx}, pero es fácil ver que también la función: $x e^{rx}$ es en este caso integral, pues se tiene:

$$\begin{aligned} y &= x e^{rx} \\ y' &= r x e^{rx} + e^{rx} \\ y'' &= r^2 x e^{rx} + 2r e^{rx} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= r^n x e^{rx} + n r^{n-1} e^{rx} \end{aligned}$$

Sustituyendo resulta:

$$x e^{rx}(r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n) +$$
$$+ e^{rx}(n r^{n-1} + p_1(n-1) r^{n-2} + \dots + 2p_{n-2} r + p_{n-1})$$

y como la raíz r no sólo satisface a la ecuación característica, sino

(*) El lector puede comprobar que el wronskiano de estas n funciones: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \dots e^{r_n x}$ es:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{r} (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)\dots(r_n - r_1) \\ (r_3 - r_2)\dots(r_n - r_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (r_n - r_{n-1}) \end{array} \right.$$

según se demuestra en Algebra, (ver p. ej. nuestro Análisis algebraico, p. 246, 2.ª ed.). Si todas las r_i son distintas, es por tanto $W \neq 0$.

también a su derivada (por ser raíz doble) se anula el paréntesis y por tanto $x e^{rx}$ es también integral de la ecuación diferencial.

Más general: Si r es raíz múltiple de orden m, no sólo e^{rx} es integral de la ecuación, sino también: $x e^{rx}$, $x^2 e^{rx} \ldots . x^{m-1} e^{rx}$, como puede comprobarse con cálculo análogo. Por tanto: cada raíz *múltiple* de la ecuación característica da m integrales particulares de la ecuación diferencial, y el número total de integrales particulares que obtenemos es siempre n.

310. — Ecuación de la viga apoyada en toda su longitud.

Se admite que la reacción del suelo es proporcional al hundimiento y, es decir, igual a $-4k^4y$, siendo k^4 un coeficiente positivo, que depende de la naturaleza del suelo.

Dada la función de cargas $y = p(x)$, la ecuación de la línea elástica es, por tanto (poniendo $EI = 1$, o suponiéndolo incluído en la constante y en la función de carga):

$$y^{IV} + 4k^4y = p(x)$$

La ecuación característica es:

$$r^4 + 4k^4 = 0 \quad \text{de donde} \quad r = k\sqrt{2}\,\sqrt{-1}$$

y como el número -1 tiene 4 raíces, se tienen los siguientes valores de r:

$$r_1 = k(1 + i) \quad ; \quad r_2 = k(1 - i) ;$$
$$r_3 = k(-1 + i) \quad ; \quad r_4 = k(-1 - i) ;$$

luego la integral general de la ecuación incompleta es:

$$y = (A . \cos kx + B . \operatorname{sen} kx)e^{kx} +$$
$$+ (C . \cos kx + D . \operatorname{sen} kx)e^{-kx}$$

Si la función de carga es de primero, segundo o tercer grado en x, una integral de la ecuación completa es evidentemente $y = p(x)/k^4$ que sumada a la expresión anterior da la integral general de la ecuación completa. Con las condiciones iniciales $y'' = 0$, $y''' = 0$, en ambos extremos, quedan determinadas las cuatro constantes A, B, C, D.

EJERCICIOS

1. — Integrar las ecuaciones de los tipos siguientes:

$$y^n = f(x) \quad , \quad y^n = f(y^{n-1}, x)$$

2. — Integrar la ecuación diferencial (89) que resulta al obtener los vértices de una curva. (Adóptese como variable independiente $y' = t$).

3. — Calcular la integral particular y la general de las ecuaciones lineales siguientes:

$$y'' + y = \cos x \quad , \quad y'' + y = \operatorname{sen} x.$$

(Soluciones particulares: $\frac{1}{2}x . \operatorname{sen} x$; $-\frac{1}{2}x . \cos x$).

$$y'' - 2y' + y = 2e^x.$$

(Solución particular: x^2e^x).

Lección 76

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

317. — Significado geométrico de los sistemas.

Así como una ecuación diferencial con una sola función incógnita y de una sola variable independiente x representa una familia de curvas *planas*, un sistema de dos ecuaciones diferenciales

$$\Phi(x, y, z, y', z' \ldots .) = 0, \quad \Psi(x, y, z, y', z' \ldots .) = 0,$$

que relacionan dos funciones incógnitas y, z, de una misma variable independiente x con sus derivadas sucesivas representa una familia de curvas alabeadas ,pues cada par de funciones $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, representa una curva referida a los ejes x, y, z.

Refiriéndonos para fijar las ideas al caso de dos ecuaciones de primer orden, sean éstas:

$$y' = \varphi(x, y, z) \qquad z' = \psi(x, y, z) \qquad [1]$$

sistema que suele escribirse en forma simétrica:

$$\frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)} \qquad [2]$$

pues de ésta se pasa a la anterior llamando φ, ψ a los cocientes de Y, Z por X. Las funciones X, Y, Z definen un campo vectorial.

Escrito en esta segunda forma, expresa la propiedad geométrica de que toda curva que lo satisfaga tiene como tangente en cada punto el vector (X, Y, Z) correspondiente, pues los cosenos directores de la tangente son proporcionales a dx, dy, dz. Es decir: las curvas integrales son las *líneas de fuerza* del campo vectorial. Ahora bien: dado éste arbitrariamente ¿existen tales líneas de fuerza, envolventes de sus vectores? Así resulta del teorema siguiente de existencia ,que resuelve este problema, planteado en (283).

318. — Integración de los sistemas de primer orden.

Fijado el punto inicial (x_0, y_0, z_0) en el campo en que las funciones $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ están definidas y carezcan de singularidades, las derivadas y'_0 z'_0 en ese punto están dadas por las mismas ecuaciones [1] y derivando se calculan y'', z''; mediante x, y, z, y', z', que ya están calculadas para dicho punto, se obtienen y''_0, z''_0, etc.

Conocidas así todas las derivadas de y para $x = x_0$, queda determinada esta función por la serie de Mac-Laurin y lo mismo la z. Queda por demostrar la convergencia de ambas series en un intervalo de x y ésta es la parte difícil de la demostración, que puede verse en los tratados de Análisis. Admitida esta convergencia, resulta el teorema fundamental:

Por cada punto (x_0, y_0, z_0) (que no sea singular para alguna de las *funciones* φ, ψ) *pasa una curva integral y solo una.* Lo mismo puede decirse del sistema [2], a condición de que no se anulen simultáneamente X, Y, Z en el punto elegido; basta que no se anule una, p. ej: $Z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, pues adoptando z como variable independiente las ecuaciones adoptarían la forma

$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \psi(x, y, z),$$

y estas funciones φ, ψ, no se hacen infinitas en el punto elegido.

Un sistema de curvas tal que por cada punto (x, y, z) pasa una sola se llama una *congruencia de curvas;* podemos, pues, expresar el teorema diciendo que el sistema [1] o el [2] representa una congruencia.

Recíprocamente: una familia de curvas doblemente infinita, es decir, con dos parámetros α, β, es una congruencia si por cada punto pasa una, es decir, si a cada terna x, y, z, corresponde un solo par α, β, que determina por tanto una sola curva; es decir: si se pueden despejar α, β, en la forma

$$u(x, y, z) = \alpha \qquad v(x, y, z) = \beta.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que representa esta congruencia se deduce inmediatamente diferenciando

$$u'_x . dx + u'_y . dy + u'_z . dz = 0$$
$$v'_x . dx + v'_y . dy + v'_z . dz = 0$$

de donde se despeja:

$$\frac{dx}{u'_y . v'_z - u'_z v'_y} = \frac{dy}{u'_z v'_x - u'_x v'_z} = \frac{dz}{u'_x v'_y - u'_y v'_x}$$

EJEMPLO 1. — Todas las rectas que pasan por el origen tienen las ecuaciones

$$x = \alpha z \quad , \quad y = \beta z$$

de donde

$$dx = \alpha dz \quad , \quad dy = \beta dz$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

La eliminación de los parámetros entre las ecuaciones y sus diferenciales, que arriba quedó hecha por la sola diferenciación, a causa de estar despejados α, β, se ha hecho aquí por división.

EJEMPLO 2. — Todas las rectas paralelas a la $x = az$, $y = bz$, tienen las ecuaciones

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta$$

de donde

$$dx = adz \quad , \quad dy = bdz$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

La eliminación ha quedado hecha por la diferenciación. He aquí, pues, las ecuaciones diferenciales de la congruencia de rectas paralelas.

319. — Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden.

Son los sistemas de integración más sencilla; el más simple es del tipo siguiente:

$$y' = p_1 y + p_2 z + p_3$$

$$z' = q_1 y + q_2 z + q_3$$

donde los coeficientes son, en general, funciones de la variable independiente x. Si Y, Z es una solución particular del sistema, las diferencias $y - Y$, $z - Z$ satisfacen al sistema que llamaremos *homogéneo*

$$y' = p_1 y + p_2 z$$

$$z' = q_1 y + q_2 z$$

y basta obtener la integral general de éste. Es decir: *la solución general del sistema no homogéneo se forma sumando una solución particular a la solución general del sistema homogéneo.*

Estudiemos especialmente los sistemas de ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes y ensayando soluciones del tipo:

$$y = \alpha e^{rx} \quad , \quad z = \beta e^{rx}$$

que sustituídas en el sistema conducen, después de simplificar, al sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\alpha r = p_1 \alpha + p_2 \beta \qquad (p_1 - r)\alpha + p_2 \beta = 0$$

$$\beta r = q_1 \alpha + q_2 \beta \qquad q_1 \alpha + (q_2 - r)\beta = 0$$

Condición de compatibilidad es la anulación del determinante de los coeficientes, o sea:

$$(p_1 - r)\,(q_2 - r) = q_1\, p_2$$

ecuación de 2.º grado que determina uno o dos valores de r; supo-

niendo que sean distintos, cada uno determina un sistema de soluciones y la suma de ambos es la integral general.

EJEMPLO. — Sea el sistema de ecuaciones homogéneas:

$$y' = y + 4z \quad , \quad z' = 2y - z.$$

El sistema de ecuaciones algebraicas características es:

$$\begin{matrix} \alpha r = \alpha + 4\beta \\ \beta r = 2\alpha - \beta \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 - r & 4 \\ 2 & -1 - r \end{vmatrix} = 0$$

como las raíces de esta ecuación $r^2 - 9 = 0$ son $+3$ y -3, las soluciones correspondientes son $\beta = \frac{1}{2}\alpha$. $\beta = -\alpha$ y la solución general del sistema propuesto:

$$y = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 e^{-3x}$$

$$z = \tfrac{1}{2}\alpha_1 e^{3x} - \alpha_2 e^{-3x}$$

El caso de raíces iguales se resuelve obteniendo la 2.ª solución del tipo xe^{rx}.

CASO GENERAL. — Consideremos por ejemplo el sistema:

$$x' = p_1x + p_2y + p_3z + p_4$$
$$y' = q_1x + q_2y + q_3z + q_4$$
$$z' = s_1x + s_2y + s_3z + s_4$$

donde los coeficientes pueden ser constantes o también funciones de t. Este sistema representa una congruencia de curvas en forma paramétrica.

Si las ecuaciones lineales son homogéneas ,es decir:

$$p_4 = q_4 = s_4 = 0$$

tienen las propiedades análogas a las ya estudiadas en el caso de una sola ecuación:

1.º Si x, y, z es una integral del sistema ,también las funciones Kx, Ky, Kz satisfacen al sistema. Las curvas son, pues, homotéticas respecto del origen.

2.º Si (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) son dos integrales del sistema, las funciones $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ también satisfacen al sistema.

Si los coeficientes son constantes, se obtienen integrales particulares del tipo

$$x = \alpha e^{rt}, \quad y = \beta e^{rt}, \quad z = \gamma e^{rt}$$

debiendo satisfacer r a una ecuación algebraica de tercer grado cada una de cuyas raíces determina los coeficientes α, β, γ; y las sumas de estas integrales, multiplicadas por constantes arbitrarias, también son integrales.

Cualesquiera que sean los coeficientes, derivando respecto de t dos veces, resultan seis ecuaciones lineales; si eliminamos entre las nueve ecuaciones las variables:

$$y, z, y', z', y'', z'', y''', z''',$$

resulta una ecuación lineal en x de tercer orden:

$$Ax''' + Bx'' + Cx' = D;$$

sustituída la función calculada x en las ecuaciones segunda y tercera tenemos un sistema de dos ecuaciones que determinan: y, z.

SISTEMAS DE ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

320. — Sistemas de ecuaciones de 2° orden.

Un sistema de dos ecuaciones de segundo orden es del tipo:

$$y'' = \varphi(x, y, z, y', z') \qquad z'' = \psi(x, y, z, y', z')$$

y para determinar cada curva integral puede darse arbitrariamente x_0, y_0, z_0, y además y'_0, z'_0, es decir, un punto y su tangente; con estos datos iniciales quedan determinados y''_0, z''_0; derivando se calculan y'''_0, z'''_0, etc.; y la fórmula de Mac-Laurin determina las dos funciones y, z, de x; la integral general contiene, por tanto, cuatro constantes arbitrarias y recíprocamente toda familia de curvas con cuatro parámetros (dos en cada ecuación) se puede representar por un sistema de ecuaciones que se deducen derivando cada una dos veces y eliminando los cuatro parámetros; o bien, si una ecuación tiene un parámetro y tres la otra, habrá que derivar cada una tantas veces como parámetros tenga y resultará un sistema con ecuaciones de órdenes distintos.

Ejemplo 1. — Las ecuaciones de todas las rectas no paralelas al plano y, z son:

$$y = ax + b \qquad z = cx + d$$

y derivando dos veces resulta el sistema $y'' = 0$; $z'' = 0$.

Ejemplo 2. — Todas las circunferencias horizontales de radio fijo (es decir, situadas en planos paralelos al x, y) vienen expresadas así

$$z = c \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

derivando una vez la primera y dos veces la segunda resulta el sistema:

$$z' = 0 \qquad r^2 = (1 + y'^2)^3/y''^2$$

Ejemplo 3. — Si las circunferencias son de radio cualquiera, hay que derivar una vez más la segunda ecuación y simplificando resulta el sistema

$$z' = 0 \qquad y'''(1 + y'^2) = 3y' y''^2$$

321. — Las ecuaciones de la Dinámica.

Los problemas de Mecánica de una sola dimensión, que hemos considerado en las lecciones anteriores, conducían a una sola ecuación diferencial, pero, en general, conducirán a dos o tres, según se trate del plano o del espacio; las funciones incógnitas son las coordenadas variables del punto móvil en función del tiempo; pues las ecuaciones del movimiento se obtienen igualando a las componentes de la fuerza ,las componentes de la aceleración multiplicada por la masa del punto móvil ,es decir:

$$mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z$$

donde las componentes X, Y, Z son funciones de t de x, y, z, y a veces también de las derivadas x', y', z componentes de la velocidad.

En el caso más elemental en que las ecuaciones son independientes, es decir, si en cada ecuación sólo figura una función desconocida, se integran por separado las diversas ecuaciones. Tal sucede en el ejemplo que sigue:

Movimiento de un proyectil en el vacío. — Las ecuaciones son: $m.x'' = 0$, $my'' = -gm$, que integradas separadamente dan:

$$x = at + a' \quad , \quad y = -\tfrac{1}{2}g\, t^2 + bt + b'$$

Condiciones iniciales: $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, de donde: $a' = 0$, $b' = 0$; por tanto las ecuaciones del movimiento son

$$x = at \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + bt$$

siendo (a, b) las componentes de la velocidad inicial.

La curva trayectoria resulta eliminando t y resulta una parábola que pasa por 0. El segundo punto intersección con el eje x es el de abscisa $x = 2b/g$.

Si hay rozamiento proporcional a la velocidad, aparecen en las ecuaciones nuevos términos en x', y'; y las ecuaciones lineales se integran como se explicó en los párrafos anteriores.

Movimiento gravitatorio. — He aquí otro ejemplo importante, en que la integración se hace por simplificaciones especiales. Dadas dos masas M y m que se atraen por la ley de Newton, el movimiento relativo de m respecto de M tiene por ecuaciones, adoptando ejes que pasan por M:

$$mx'' = -.k\, Fmx/r^3; \quad my'' = -k\, Mmy/r^3; \quad mz'' = -k\, Mmz/r^3$$

o abreviadamente:

$$x'' = -Kx/r^3; \quad y'' = -Ky/r^3; \quad z'' = -Kz/r^3.$$

Combinando las dos primeras resulta:

$$xy'' - yx'' = 0 \quad \text{e integrando sale:} \quad xy' - yx' = C_1$$

pues la derivada de ésta es aquélla. Análogamente:

$$yz' - zy' = C_2 \quad , \quad zx' - xz' = C_3$$

Multiplicando por z, x, y, y sumando, resulta:

$$C_2x + C_3y + C_1z = 0.$$

ecuación de un plano que pasa por M. Por tanto: *El movimiento de m respecto de M se verifica en un plano que pasa por M.*

Tomando el plano del movimiento como $x\,y$, el sistema se reduce a la ecuación

$$xy' - yx' = C$$

en que el primer miembro es la derivada del área A del sector, respecto del tiempo.

Resulta así: *La velocidad areolar del radio vector es constante.*

Pasando a coordenadas polares se integra la ecuación y resulta que la trayectoria es una cónica de foco M.

322. — Reducción del sistema a una sola ecuación.

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales que ligan las funciones x, y, z de la variable independiente t, con sus primeras, segundas, terceras, ..., derivadas, para reducirlo a una ecuación diferencial con una sola función desconocida x se derivan las ecuaciones un número suficiente de veces para poder eliminar entre las

ecuaciones dadas y las así obtenidas, las funciones y, z y sus derivadas, resultando una ecuación diferencial:

$$F(t, x, x', x'' \ldots .) = 0$$

que una vez integrada determina x y de esta función se deducen las otras. Apliquemos este método a un ejemplo.

Ejemplo. — En la teoría del péndulo de Foucault se presenta el sistema:

$$x'' - 2ay' + bx = 0 \qquad [1]$$

$$y'' + 2ax' + by = 0 \qquad [2]$$

Derivando dos veces la ecuación [1] y una vez la ecuación [2] tenemos:

$$x^{\text{IV}} - 2ay''' + bx'' = 0 \qquad [4]$$

$$y''' + 2ax'' + by' = 0 \qquad [5]$$

Eliminando y''' entre [4] y [5] resulta:

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + b)x'' + 2\,a\,b\,y' = 0$$

Eliminando y' entre ésta y [1]

$$x^{\text{IV}} + (4a^2 + 2b)x'' + b^2 x = 0$$

que es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden sin segundo miembro y con coeficientes constantes.

Resuelta esta ecuación mediante la ecuación característica, que es bicuadrada, da cuatro raíces: $r_1, -r_1, r_2, -r_2$, luego:

$$x = C_1\, e^{r_1 t} + C_2\, e^{-r_1 t} + C_3\, e^{r_2 t} + C_4\, e^{-r_2 t}$$

y el valor de y se despeja de [2]

$$y = -\frac{y''}{b} - \frac{2a \,.\, x'}{b}$$

sustituyendo y'' por su valor:

$$y'' = \frac{x'''}{2a} - \frac{bx'}{2a}$$

sacado de la ecuación que se obtiene derivando la [1].

EJERCICIOS

1. — Integrar el sistema de ecuaciones:

$$x''' = y + y' \quad , \quad y'' = x' + x''$$

(Eliminando y resulta: $x^{\text{v}} = x''' + 2x'' + x'$).

2. — Integrar las ecuaciones de Foucault, sabiendo que los coeficientes son:

$$a = w \,.\, \text{sen}\, \varphi \quad , \quad b = g/l$$

designando φ la latitud, $w = 0{,}000073$ la velocidad angular de la rotación terrestre, l la longitud del péndulo.

Lección 78

ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES

323. — Definiciones y notaciones.

Se llama ecuación en derivadas parciales a toda ecuación diferencial que relaciona una o varias funciones de varias variables independientes, con sus derivadas parciales respecto de éstas. Vamos a estudiar solamente las de primer orden con dos variables independientes x, y; si z es la función desconocida de x, y, y para abreviar llamamos p y q a las derivadas

$$\frac{\partial z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y}$$

la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden es del tipo

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

La ecuación se llama *lineal* cuando p y q figuran en primera potencia sin multiplicar entre sí, es decir, toda ecuación del tipo:

$$X(x, y, z) \, . \, p + Y(x, y, z) \, . \, q = Z(x, y, z) \qquad [1]$$

Así como las ecuaciones diferenciales ordinarias de una sola variable independiente resultan engendradas por las familias de curvas en el plano, las ecuaciones en derivadas parciales resultan de las familias de superficies. Vamos a estudiarlas y clasificarlas.

324. — Generación de superficies mediante curvas.

Una superficie está engendrada por una curva que se mueve; pero como al moverse varía, hay que definir lo que se entiende por movimientos de una curva. Supongamos dada una "congruencia" de curvas, o sea una familia "doblemente infinita" de curvas, es decir, dos ecuaciones $u(x, y, z) = \alpha$; $v(x, y, z) = \beta$ con dos parámetros arbitrarios α y β. Si imponemos alguna condición geométrica que ligue estos parámetros por una cierta relación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ la familia se llama "simplemente infinita" o "haz de curvas" y eliminando α, β entre las tres ecuaciones resulta una ecuación

$$\varphi \, [u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0, \qquad \text{o sea} \qquad F(x, y, z) = 0$$

que contiene todos los puntos de todas las curvas de esta familia, y por lo tanto representa la superficie que engendran.

La condición más frecuente que suele imponerse, es que la generatriz corte a una curva fija, llamada *directriz;* eliminando x, y, z entre las ecuaciones de ésta y las de la generatriz, resulta la condición buscada: $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Otras veces la condición será la de ser tangente a una superficie, etc. He aquí algunos ejemplos:

Superficies cilíndricas. — Consideremos la recta

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta$$

Como tiene cuatro parámetros, es una familia cuádruplemente infinita, pero si fijamos a y b, es decir, si las rectas se consideran paralelas a una dirección, la familia es doblemente infinita.

Elijamos una directriz cualquiera $\varphi(x, y) = 0$ en el plano xy. La traza de cada recta sobre este plano es $x = \alpha$, $y = \beta$, luego la condición para que se apoye en dicha directriz es $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Cualquiera que sea el punto de la recta es:

$$\alpha = x - az \quad ; \quad \beta = y - bz,$$

luego todos los puntos de las rectas que se apoyan en la directriz satisfacen a la ecuación:

$$\varphi(x - az, \ y - bz) = 0. \qquad [2]$$

Esta es, por tanto, la ecuación del cilindro definido por aquella directriz. Al variar arbitrariamente la función φ resultan los infinitos cilindros. La ecuación [2] representa, pues, todos los cilindros de dirección dada (a, b) no paralela al plano xy.

Superficies cónicas. — Las ecuaciones de una recta cualquiera que pasa por el origen de coordenadas son:

$$x = \alpha z \quad ; \quad y = \beta z. \qquad [3]$$

Dada una directriz cualquiera, expresando que la recta [3] se apoya en ella resulta una ecuación $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ y como en todos los puntos de todas las rectas [3] es:

$$\alpha = x/z \quad , \quad \beta = y/z$$

todas ellas satisfacen a la ecuación $\varphi(x/z, \ y/z) = 0$, que representa todos los conos de vértice O.

Obsérvese que esta ecuación es homogénea respecto de x, y, z, es decir, al multiplicar por un coeficiente λ cualquiera, sigue satisfaciéndose la ecuación. Análogamente, las superficies cónicas de vértice (a, b, c) están representadas por la ecuación

$$\varphi(x - a/z - b, \ y - b/z - c) = 0. \qquad [4]$$

Obténgase la ecuación de la superficie cónica que proyecta la intersección de dos superficies dadas por sus ecuaciones.

Superficies de revolución. — Una circunferencia de plano paralelo al xy, a la distancia α y radio r viene expresada así:

$$x^2 + y^2 = \beta = r^2 \quad , \quad z = \alpha.$$

Dada una directriz cualquiera por sus dos ecuaciones, la condición para que se corten se obtiene eliminando x, y, z entre las cuatro ecuaciones y resulta $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

Sustituyendo α, β por sus expresiones, se obtiene:

$$\varphi(z, x^2 + y^2) = 0$$

que representa todas las superficies de revolución de eje z.

325. — Integración de las ecuaciones lineales.

La integración de la ecuación lineal

$$Xp + Yq = Z \tag{5}$$

en la cual X, Y, Z son funciones de x, y, z; es decir, la obtención de todas las superficies $z = f(x, y)$ que satisfacen a la ecuación, se reduce a la integración del sistema de dos ecuaciones ordinarias:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{6}$$

En efecto, este sistema representa, como ya se demostró, una congruencia de curvas que se obtendrán integrando el par de ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X}$$

(suponiendo $X \neq 0$) y así resultará

$$u(x, y, z) = \alpha \qquad v(x, y, z) = \beta.$$

Esta familia de curvas doblemente infinita está formada precisamente por las líneas de fuerza del campo vectorial de componentes X, Y, Z; pues la tangente en cada punto tiene cosenos proporcionales a X, Y, Z. Tales curvas se llaman *características*.

Toda superficie formada por estas curvas características tiene la propiedad de que la tangente a cada curva, es decir, la recta

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

está en el plano tangente a la superficie

$$z - z_0 = (x - x_0)p + (y - y_0)q$$

luego substituyendo los numeradores por los denominadores, resulta

$$Xp + Yq = Z$$

es decir: *toda superficie*

$$\varphi\,[u(x, y, z),\ v(x, y, z)] = 0$$

formada por curvas características satisface a la ecuación lineal.

Recíprocamente, dada una superficie cualquiera: $z_1 = f(x, y)$ que satisfaga a la ecuación [5], si consideramos la curva característica

$$y = y(x), \qquad z = z(x)$$

que pasa por un punto cualquiera $A(x_0, y_0, z_0)$ tomado en dicha superficie y formamos la ecuación diferencial en x, y:

$$\frac{dx}{X(x, y, z_1)} = \frac{dy}{Y(x, y, z_1)}$$

ésta define en el plano x, y una curva que pasa por el punto (x_0, y_0), la cual es proyección de una curva C_1 de la superficie, que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y satisface a las relaciones lineales:

$$p.dx + q.dy = dz_1$$

$$p.X + q.Y = Z$$

aplicadas éstas a la proporción anterior, resulta una 3.ª razón dz/Z igual a aquellas dos. Resulta, pues, que la curva C_1 satisface al sistema [6], luego es la curva característica que pasa por A.

Queda así demostrado este teorema recíproco del anterior: ***Toda superficie integral de la ecuación* [1] *está formada por curvas características.***

Por tanto, la integral general de la ecuación es:

$$\varphi\,[u(x, y, z),\ v(x, y, z)] = 0$$

siendo φ una función arbitraria.

Cada integral está determinada por una curva cualquiera que no sea característica; pues esta directriz determina, como se demostró en (320), una superficie formada por las curvas características que se apoyan en ella.

Menos fácil es determinar la superficie por una directriz que también sea superficie, a la que deban ser tangentes las curvas características.

EJEMPLO 1.°. — Sea la ecuación $ap + bq = 1$.

El sistema equivalente es

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

que integrado da: $x = az + \alpha$; $y = bz + \beta$.

La integral general de la ecuación es, por tanto:

$$\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$$

que representa todos los cilindros de dirección (a, b).

EJEMPLO 2.° — La ecuación $px + qy = z$ se reduce al sistema

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

cuya integral general es: $x = \alpha z$; $y = \beta z$
luego la integral general de la ecuación lineal es

$$\varphi(x/z,\ y/z) = 0$$

que representa todos los conos de vértice O.

EJEMPLO 3.° — La ecuación diferencial de todas las superficies de revolución de eje z se obtendrá formando las ecuaciones diferenciales de la familia de circunferencias antes dada. (388).

$$x^2 + y^2 = \beta \quad ; \quad z = \alpha$$

y resulta diferenciando:

$x\,dx + y\,dy = 0$; $dz = 0$ que se puede escribir así:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$$

Luego la ecuación que representa las superficies de revolución de eje z es: $py - qx = 0$.

EJERCICIOS

1. — Obtener las superficies ortogonales de las esferas que pasan por O y tienen el centro en el eje x.

Resulta la ecuación diferencial: $(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$.

2. — Ecuación diferencial de las superficies de revolución en torno de la recta de coeficientes directores (a, b, c) que pasa por O.

Adóptense como curvas generatrices las circunferencias normales al eje, determinadas por planos y esferas de centro O.

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN EN DERIVADAS PARCIALES

326. — Definiciones, notaciones y ejemplos.

Si llamamos r, s, t, a las derivadas segundas de z, la ecuación general de segundo orden con dos variables independientes x, y, es del tipo:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

siendo $r = z''_{xx}$, $s = z''_{xy}$, $t = z''_{yy}$; y su estudio completo es objeto del Análisis superior (v. Goursat, t. III).

Así como en la integración de las ecuaciones de primer orden estudiadas en la lección anterior, aparecía una función arbitraria, en estas ecuaciones de segundo orden aparecen *dos* funciones arbitrarias. En aquellas bastaba dar una curva para determinar la superficie integral; en éstas hay que dar la curva y los planos tangentes a lo largo de ella a la superficie buscada, es decir, hay que dar una de las derivadas de z respecto de x o y a lo largo de la curva dada como directriz.

A modo de ejemplo ,sea la ecuación $s = 0$; escrita en la forma

$$\frac{\partial z'_x}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{o bien} \quad (z'_x)'_y = 0$$

resulta integrando $z'_x = f(x)$ arbitraria. Integrando de nuevo, y llamando F a una primitiva de f, resulta:

$$z = \int f(x)dx + \Phi(y) = F(x) + \Phi(y).$$

La integral general de la ecuación dada se obtiene, pues, sumando una función arbitraria de x con una función arbitraria de y. La determinación de estas funciones la haremos en el párrafo siguiente.

327. — La ecuación de d'Alembert.

Sea la ecuación clásica:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Efectuemos el cambio de variables:

$$X = x + at \qquad Y = x - at$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial z}{\partial Y} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \left[\frac{\partial z}{\partial X} - \frac{\partial z}{\partial Y}\right] a$$

Derivando otra vez

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y . \partial X} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} + \frac{2 . \partial^2 z}{\partial X . \partial Y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} - \frac{2\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}\right]$$

Al sustituir en la ecuación dada se reduce a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X . \partial Y} = 0$$

cuya integral general es:

$$z = \Phi(X) + \Psi(Y) \qquad \text{o sea:} \quad z = \Phi(x + a\,t) + \Psi(x - a\,t) \qquad [1]$$

Veamos cómo se determinan estas funciones Φ, Ψ, de modo que se cumplan las condiciones iniciales para $t = 0$, es decir, que la función y su derivada coincidan con funciones dadas $f(x)$ y $f_1(x)$:

$$\Phi(x) + \Psi(x) = f(x)$$

$$\Phi'(x) - \Psi'(x) = f_1(x) : a$$

e integrando la segunda sale:

$$\Phi(x) - \Psi(x) = F(x).$$

siendo F una primitiva cualquiera de $f_1(x) : a$.

De la primera y tercera resulta:

$$2\Phi(x) = f(x) + F(x)$$

$$2\Psi(x) = f(x) - F(x)$$

luego la integral general es:

$$z = \tfrac{1}{2}\,[f(x + at) + f(x - at) + F(x + at) - F(x - at)] \qquad [2]$$

328. — El problema de la cuerda vibrante.

Adoptada la recta de la cuerda tensa como eje x, la perpendicular en uno de los extremos como eje z, la ecuación de una cuerda que vibra es de la forma $z = f(x, t)$; para cada valor de t resulta la ecuación de la curva en dicho momento y para cada valor de x la ecuación define el movimiento vibratorio del punto que tiene esa abscisa. La ecuación diferencial de la cuerda vibrante es precisamente la de D'Alembert, que hemos estudiado en el párrafo anterior, siendo a una constante que depende del módulo de elasticidad del material, de la longitud y de la masa. Aunque hemos dado la integral general en el párrafo anterior, son importantes las integrales particulares sinusoidales.

Una integral particular se ve inmediatamente:

$$z = k \, . \cos m (t - \alpha) \, . \operatorname{sen} {}^m/_a \, x \qquad [3]$$

siendo k, m y α números arbitrarios; pues al derivar dos veces respecto de t resulta la misma función, cambiada de signo y multiplicada por m^2, y al derivar dos veces respecto de x, resulta la misma función cambiada de signo multiplicada por m^2/a^2; luego dicha función satisface a la ecuación diferencial.

Para $x = 0$ resulta $z = 0$, como debe ser; y también debe ser $z = 0$ para $x = l$, puesto que ambos extremos se suponen fijos. Tenemos, por consiguiente, la condición de *ligadura*:

$$\operatorname{sen} ml/a = 0 \quad \therefore \quad m\,l = n\,a\,\pi, \quad m = a\,n\,\pi/l$$

luego una función que satisface a la ecuación diferencial ,o mejor un tipo de funciones integrales, suponiendo $l = 1$, es:

$$z = k \, . \cos n\,\pi\,a\,(t - \varphi) \, . \operatorname{sen} n\,\pi\,x \qquad [4]$$

Esta es la ley más sencilla de movimiento; cuando la cuerda vibra según esta ley, el movimiento es periódico; el *período* es: $T = 2l/a\,n$, o sea el tiempo que dura cada vibración completa.

Significado físico. — El número de vibraciones por unidad de tiempo es, pues, el recíproco $w = \frac{1}{2}\,an/l$ llamado *pulsación*.

El tono del sonido depende de este número de vibraciones. Cuanto menor sea l mayor w y más alta la nota; el menor valor posible de n es $n = 1$; ningún punto de la cuerda, salvo los extremos, queda fijo, pues para todos es $z \neq 0$, excepto para los valores de t en que anulándose el coseno toda la cuerda pasa momentáneamente por el eje x.

Para $n = 2$ no sólo quedan fijos los extremos sino también el punto medio $x = \frac{1}{2}\,l$; el número de vibraciones w es doble del fundamental y resulta la *octava de la nota fundamental.*

Para $n = 3$ quedan **fijos** dos puntos intermedios $x = 1/_3\, l$, $x = 2/_3\, l$, la nota es la quinta de la octava; para $n = 4$ resulta la segunda octava ,etc. A los puntos fijos se les llama *nodos*. En estos casos cada trozo de la cuerda vibra independientemente y la nota es más alta por ser menor la longitud.

Para $t = 0$ debe resultar una sinusoide si $n = 1$ y una sinusoide reducida para $n > 1$; pero cuando se pulsa de cualquier otro modo, la expresión [4] no puede representar el movimiento. Sumando integrales del tipo (4) resulta una *integral más general (haciendo $l = 1$ para mayor sencillez):*

$$z = (a_1 . \cos \pi a t + b_1 . \operatorname{sen} \pi a t) \operatorname{sen} \pi x +$$
$$+ (a_2 . \cos 2\pi a t + b_2 . \operatorname{sen} 2 \pi a t) \operatorname{sen} 2 \pi x + \ldots . \qquad [5]$$

Si se logra determinar los coeficientes de modo que se verifiquen las condiciones iniciales, es decir, que para $t = 0$ la cuerda tenga la forma arbitraria que se le da y la velocidad inicial sea la dada, esta expresión será la integral general. Tal es el método de integración de Bernoulli.

Sean las condiciones iniciales:

$$z = f(x) \quad ; \quad z'_t = F(x) ;$$

para $t = 0$, es decir, se da la curva inicial y la velocidad inicial de cada punto: es preciso determinar los coeficientes de [5] de modo que sea:

$$a_1 . \operatorname{sen} \pi x + a_2 . \operatorname{sen} 2 \pi x + a_3 . \operatorname{sen} 3 \pi x + \ldots . = f(x).$$
$$\pi a (b_1 . \operatorname{sen} \pi x + 2 b_2 . \operatorname{sen} 2 \pi x + 3 b_3 . \operatorname{sen} 3 \pi x + \ldots .) = F(x).$$

Ahora bien, esto no se logra con un número finito de términos; pero, si adoptamos series indefinidas, entonces cualquiera que sea la función continua $f(x)$ con la sola condición de que sea finito el número de sus máximos y *mínimos, existe un desarrollo y solo uno en serie de Fourier y determinados* los coeficientes a_n y análogamente los b_n mediante el desarrollo de $F(x)$, se tiene la integral general en la forma [5].

Quizás vea el lector en la forma *impar* de estos desarrollos una restricción imposible de cumplir; pero variando x en $(0, 1)$ y el arco πx en $(0, \pi)$ basta suponer completadas las funciones en $(-1, 0)$ poniendo $f(-x) = -f(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

EJERCICIOS

1. — Integrar las ecuaciones de segundo orden:

$$z''_{xy} = c \quad , \quad z''_{xx} = c \quad , \quad z''_{xx} = f(x) + \varphi(y)$$

2. — Integrar la ecuación de la cuerda vibrante de longitud $l = 1$, que se pulsa en su punto medio, con una púa, sin velocidad inicial.

El significado físico del coeficiente a es

$$a^2 = Pg^2/p$$

siendo P la tensión inicial, p el peso de la cuerda y g la aceleración de la gravedad.

CAPITULO XIII

CALCULO DE VARIACIONES

Lección 80

ELEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

329. — Problema fundamental.

Tiene por principal objeto la determinación de funciones que sustituídas en una integral definida le den valor mínimo o máximo relativo, es decir, menor (mayor) que cualquiera otra función suficientemente próxima.

Este problema difiere esencialmente de los problemas de máximos y mínimos ordinarios; pues, así como allí se trataba de determinar un valor numérico de x que diera valor máximo o mínimo a una función conocida y, aquí se trata de determinar una función $y(x)$, que sustituída en una cierta integral definida, del tipo:

$$\int_a^b f(x, y, y')\,dx$$

le dé un valor máximo o mínimo relativo; tales problemas son p. ej.:

1.° Entre dos puntos de una superficie cualquiera, determinar cuál es la curva de longitud mínima; ésta se llama *geodésica*.

2.° Entre todas las curvas que pasan por dos puntos del plano determinar la que engendra la superficie de área mínima al girar en torno de un eje.

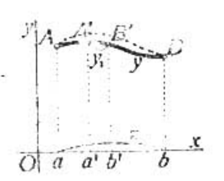
En estos y otros ejemplos el elemento geométrico (longitud, área, etc.), que se desea hacer mínimo, viene expresado por una integral donde figura la función desconocida $y(x)$ y su derivada $y'(x)$.

Si la función $y(x)$ hace *mínima o máxima una integral en el intervalo* (a, b) *tiene esta misma propiedad en cada intervalo parcial* (a', b'). En efecto, si la función $y(x)$ no hace mínima, por ejemplo, a la integral en el intervalo parcial, y es $y_1(x)$, resultará una nueva función o arco $AA'C'B'B$ en el cual la integral toma un valor menor que para la función $y(x)$, contra lo supuesto. Así, por ejemplo, las curvas geodésicas de una superficie son geodésicas entre dos cualesquiera de sus puntos.

330. — Ecuación de Euler.

Designaremos por y la función desconocida que para $x = a$, $y = b$, toma los valores prefijados $y(a) = A$, $y(b) = B$, es decir, representa la curva buscada que pasa por los puntos dados A, B.

Consideremos las funciones del tipo $y(x) + t.z(x)$ siendo z una función continua de x que se anula para $x = a$, $x = b$. Elegida arbitrariamente dicha función $z(x)$, al dar valores reales a t van resultando infinitas curvas que pasan por A, B. Entre ellas, para $t = 0$, resulta la misma $y(x)$. Este incremento $t.z(x)$ que se le da a y suele llamarse la *variación* de y, representándose así: δy. Entiéndase que esta letra δ indica simplemente la diferencia entre la función $y(x)$ y cualquier otra que tome los mismos valores en los extremos, es decir, su gráfica está formada por la diferencia de ordenadas entre la curva $y(x)$ y cualquier otra que pase por A y B. Así como el incremento Δy es la diferencia de valores de una *misma* función para diversos valores de x, la variación δy es la diferencia de valores de dos funciones para cada valor de x.



El valor que toma la integral [1] para cualquiera de dichas infinitas funciones $y + tz$ es:

$$J = \int_a^b f(x, y + tz, y' + tz')\,dx.$$

que depende de la función z y del número real t, pero una vez elegida $z(x)$, es J función de t.

Elegida arbitrariamente la función $z(x)$ tenemos infinitas curvas al variar t y la integral es función de t; su valor debe ser mínimo para $t = 0$, luego su derivada debe ser nula para $t = 0$; dicha derivada resulta derivando bajo el signo integral:

$$J'_t = \int_a^b (f'_y . z + f'_{y'} . z')\,dx = 0. \qquad [2]$$

El segundo sumando contiene la diferencial exacta $z'.dx = dz$ e integrándolo por partes resulta:

$$\int_a^b f'_{y'} . z' . dx = z . f'_{y'} \Big|_a^b - \int_a^b z . D_x f'_{y'} . dx \qquad [3]$$

pero z es nula para $x = a$ y para $x = b$, luego se anula el minuen-

do y sustituyendo el valor [3] en la [2] resulta:

$$\int_a^b z(f'_y - D_x f'_{y'})dx = 0 \qquad [4]$$

Esta integral debe, pues, anularse cualquiera que sea la función z y para ello es necesario que se anule en todo el intervalo propuesto (a, b) la expresión de Euler:

$$\boxed{f'_y - D_x f'_{y'} = 0} \qquad [5]$$

DEMOSTRACIÓN. — Las soluciones de [5] son las únicas funciones que cumplen la condición [4], es decir: si la integral [4] es nula cualquiera que sea la función z, debe ser nula la expresión [5] en todo el intervalo (a, b). Pues si en algún punto fuese positiva, por ejemplo, se conservaría positiva en todo un intervalo parcial (por la continuidad) y elegida z positiva, la integral en dicho intervalo sería positiva también, mientras que debe ser nula, por cumplirse la condición del mínimo en todo intervalo parcial, según se ha explicado en el párrafo anterior.

La determinación de la función $y(x)$ que hace mínima o máxima la integral J se reduce, pues, a integrar la ecuación [5] con las condiciones iniciales $y(a) = A$, $y(b) = B$.

He aquí, pues, una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (pues al derivar $f'_{y'}$, aparecerá y'') a la cual debe satisfacer la función buscada $y(x)$. Si la función integrando $f(x, y, y')$ carece de y, la integración reduce a la de ésta:

$$D_x f'_{y'} = 0 \quad \text{de donde:} \quad f'_{y'} = C;$$

e integrando esta ecuación de primer orden aparece una segunda constante arbitraria. Ambas constantes se determinarán por las condiciones iniciales $y(a) = A$, $y(b) = B$.

En el caso general en que bajo el signo integral figuren x, y, y' la ecuación [5] desarrollada es:

$$f'_y - f''_{xy'} - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0 \qquad [6]$$

ecuación *no lineal* en y', pues ésta figura en los coeficientes, que deben deducirse derivando la función $f(x, y, y')$. La integración conducirá a una función con dos constantes arbitrarias, que se determinarán como arriba se ha dicho.

NOTA. — Esta función $y(x)$ así determinada anula, pues, a la derivada J'_t y según que haga positiva o negativa a la derivada segunda, dará a la integral un valor menor o mayor que todas las funciones $y + tz$ de un cierto entorno $|t| < 6$, suponiendo fijada la función auxiliar $z(x)$. En la práctica no suele ser necesario recurrir a la derivada segunda, pues la índole del problema indica si se trata de máximo o mínimo; y como las únicas funciones que pueden satisfacer al problema son las que anulen a la expresión [5], sólo podrá

haber ambigüedad cuando haya más de una solución que satisfaga a las condiciones iniciales, como sucede en el ejemplo 3.°.

Pudiera creerse, por analogía con la teoría de los máximos y mínimos ordinarios, que el análisis de las derivadas sucesivas (*) permitirá resolver completamente el problema; pero no acontece así, como puede verse en las *Notas*.

331. — Problemas clásicos de cálculo de variaciones.

EJEMPLO 1. — Determinar las funciones $y(x)$ que hagan mínima la integral:

$$\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Siendo $f(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}$ igualando a cero la variación primera, resulta la ecuación de Euler [5], que, por no figurar y en la integral, se reduce a ésta:

$$D_x f'_{y'} = 0 \quad \text{de donde} \quad F'_{y'} = c, \quad \text{o sea:}$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \quad \therefore \quad y' = C \quad \therefore \quad y = Cx + C_1$$

es decir, una función lineal cuyas constantes se determinan por la condición de pasar la recta por los puntos dados. Dado el significado geométrico de la integral, el resultado era *a priori* conocido.

EJEMPLO 2. — Curva entre dos puntos, que engendra el cuerpo de revolución de volumen mínimo al girar alrededor del eje x.

$$V = \pi \int_a^b y^2 . dx, \quad \text{siendo} \quad f(x,y,y') = y^2.$$

La ecuación de Euler es en este caso:

$$f'_y - D_x f'_{y'} = 2y = 0$$

luego la curva coincide con el segmento (a,b) del eje x, más las ordenadas extremas, como era de esperar, dadas las condiciones del problema.

EJEMPLO 3. — *Superficies de revolución de área mínima.* — Entre todas las curvas de extremos dados determinar la que engendra la superficie de revolución de menor área al girar alrededor del eje x. La expresión del área es:

$$S = 2\pi \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int y \sqrt{1+x'^2}\,dy \quad ; \quad f(y,x,x') = y\sqrt{1+x'^2}$$

(*) Como la integral J es función de t, desarrollada por la fórmula de Taylor resulta:

$$J(t) = J(0) + \frac{t}{1!}\frac{dJ}{dt} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2J}{dt^2} + \dots$$

Sólo hemos considerado el término llamado variación primera: $\delta J = t.J'$; el estudio completo exigiría considerar las variaciones sucesivas:

$$\delta^2 J = t^2 J'' \quad , \quad \delta^3 J = t^3 J''' \quad , \quad \dots$$

pero ya anunciamos arriba que no es suficiente para vencer totalmente la dificultad del problema.

habiendo adoptado y como variable independiente y x como función desconocida, para simplificar; pues la ecuación de Euler, con este cambio de variables, es:

$$f'_x - D_y f'_{x'} = 0 \quad \text{que se reduce a} \quad D_y f'_{x'} = 0$$

e integrando resulta:

$$f'_{x'} = \alpha, \quad o \text{ sea: } \quad \frac{y\,x'}{\sqrt{1+x'^2}} = \alpha.$$

de donde:

$$x'^2(y^2 - \alpha^2) = \alpha^2 \quad \text{y separando variables} \quad dx = \frac{\alpha\,dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}$$

Hagamos el cambio de variable $y = \alpha . chz$; entonces:

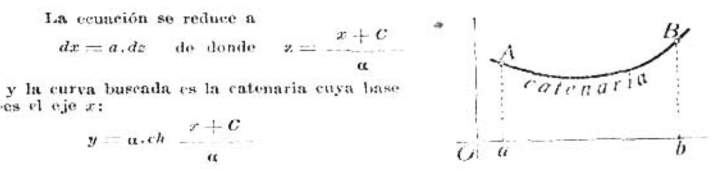
$$dy = \alpha . shz . dz \qquad \sqrt{y^2 - a^2} = \alpha . shz.$$

La ecuación se reduce a

$$dx = a . dz \quad \text{de donde} \quad z = \frac{x + C}{\alpha}$$

y la curva buscada es la catenaria cuya base es el eje x:

$$y = \alpha . ch \frac{x + C}{\alpha}$$



Las constantes α y C se determinan por la condición de que la curva pase por los dos puntos dados. En particular, si éstos son simétricos respecto del eje x, para $x = \pm a$ deben resultar valores iguales de y; como el ch es función monótona par, deben ser opuestos los arcos $a + C$, $-a + C$, luego $C = 0$.

Un estudio completo permite discutir los tres casos que pueden presentarse, según que por los dos puntos pasen dos catenarias, una o ninguna. (Ver, p. ej., *Curso cíclico*, t. II).

EJEMPLO 4. — *Problema de la braquistócrona.* — Un grave cae desde O a A por una curva OA y se trata de encontrar ésta de modo tal, que el tiempo invertido en recorrerla sea mínimo.

La velocidad, después de haber descendido la ordenada y, es:

$$v = \sqrt{2gy} \quad \text{luego} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

y el tiempo trascurrido es:

$$T = \int_0^A ds/\sqrt{2gy} = \tfrac{1}{2}\int_0^A \sqrt{1+x'^2}\,dy/gy$$

Para obtener la función que hace mínima la integral, hemos adoptado y como variable independiente y la ecuación de la variación primera que es:

$$f'_x - D_y f'_{x'} = 0$$

se reduce a $f'_{x'} = const$; *o sea, poniendo la constante en la forma* $1 : \sqrt{2r}$, *se* **tiene:**

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$$

$$\text{de donde} \quad x' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2r - y}}$$

Pongamos para racionalizar:

$$y = r(1 - \cos t) = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t$$

y el segundo miembro se simplifica así:

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2r - y}} = \frac{\sqrt{2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} t}}{\sqrt{2r \cos^2 \tfrac{1}{2} t}}$$

que se reduce a $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}t$; por otra parte:

$$dy = r \operatorname{sen} t \,.\, dt = 2r \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t \cos \tfrac{1}{2}t \,.\, dt$$

luego la ecuación se transforma en ésta:

$$dx = 2r \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}t \,.\, dt = r(1 - \cos t)dt$$

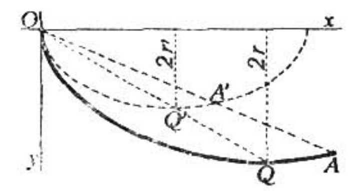
cuya integral general es:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t) + C.$$

y esta constante debe ser nula, pues para $y = 0$, $t = 0$ debe ser $x = 0$. Resultan así las ecuaciones:

$$x = r(t - \operatorname{sen} t)$$
$$y = r(1 - \cos t)$$

que representan una cicloide, cuya base es el eje x.



Esta rampa cicloidal se llama *curva braquistócrona,* que significa: *curva de tiempo mínimo.*

¿Cómo construir o determinar la cicloide que pasa por O y A? No es fácil resolver este problema algebraicamente, pero en cambio es muy sencilla la solución gráfica representada en la figura. Dibújese una onda cualquiera de cicloide y determínese el punto A' de intersección con la semirrecta OA. La homotecia de centro O que transforma A' en A da el arco de cicloide OA que resuelve el problema. La figura indica asimismo cómo se determina su radio r y se deduce fácilmente el argumento t que corresponde al punto A.

EJERCICIOS

1. — Dibujada la curva $y = ch\, x$ construir gráficamente el arco de catenaria de extremos A, B que engendra la superficie de revolución de área mínima.

2. — Calcular la pendiente que debe tener OA para que el punto móvil llegue horizontalmente a A; ídem ascendentemente (como en la figura); ídem en sentido descendente.

COMPLEMENTOS DE CALCULO DE VARIACIONES

332. — Casos especiales de la ecuación de Euler.

Ya hemos visto que si la función integrando $f(x, y, y')$ no contiene la y, es inmediata una primera integración de la ecuación de Euler, la cual se reduce a una de primer orden.

Si el integrando no contiene la x, hemos reducido este caso al anterior permutando las variables; pero este artificio exige que x sea función de y en el intervalo (A, B); es decir, que la solución buscada sea función monótona, y tal condición puede no cumplirse, por desgracia, en los dos problemas de la superficie mínima y de la braquistócrona. Veamos la solución rigurosa.

Si la función integrando carece de x, es decir, es del tipo $f(y, y')$ la ecuación de Euler [6] se reduce a ésta:

$$f'_y - f''_{yy'} \cdot y' - f''_{y'y'} \cdot y'' = 0 \qquad [1]$$

Designando por D la derivación total, respecto de la única variable independiente x, y comparando [1] con las expresiones:

$$Df = f'_y \cdot y' + f'_{y'} \cdot y''$$

$$D(f'_{y'} \cdot y') = f'_{y'} \cdot y'' + f''_{y'y} \cdot y'^2 + f''_{y'y'} \cdot y'y''$$

se ve que la diferencia de éstas es precisamente aquel trinomio multiplicado por y'; luego de la ecuación [1] se deduce

$$D(f - f'_{y'} \, y') = 0 \qquad \therefore \qquad f - f'_{y'} \cdot y' = a \qquad [2]$$

ecuación de primer orden que suministra la integral general, con dos constantes a, b.

Ejercicio. — Aplíquese la ecuación [1] al problema de la superficie de área mínima y al de la braquistócrona.

Nota. — Fácilmente se pasa de este método al aplicado en (333), quedando así justificada la permutación de variables. En efecto, allí procedíamos así:

$$\int f(y, y')\, dx = \int \varphi(y, x')\, dy$$

y suponiendo que $x = x(y)$ fuera uniforme en el intervalo (A, B) obteníamos como integral de la ecuación de Euler $\varphi'_{x'} = c$; pero siendo:

$$\varphi = f \cdot x' \qquad \therefore \qquad \varphi'_{x'} = f + f'_{x'} \cdot x'$$

y como $y' = 1/x'$, este binomio vale:

$$f + f'_{y'} \cdot x' (-1/x'^2) \quad \text{o sea} \quad f - f'_{y'} \cdot y'$$

Por ambos métodos se llega, por tanto, a la misma ecuación diferencial, quedando así justificado aquél, si es y función uniforme de x, aunque no exista función inversa.

333. — Geodésicas de una superficie.

Problema muy importante en Geometría y en Física relativista es el de las *geodésicas* de un espacio curvo. En el caso más sencillo, que es el de las superficies del espacio euclidiano, la expresión de la diferencial de arco (235) es

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2Fu.dv + G\,dv^2}$$

adoptando u como variable independiente, la función integrando es:

$$f = \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}$$

y la ecuación diferencial de las geodésicas resulta inmediatamente aplicando la ecuación de Euler:

$$(E'_v + 2F'_v.v' + G'_v.v'^2) : 2f = D_u\,[(F + Gv') : f]$$

EJEMPLO 1. — Si la superficie es plana, $E = G = 1$, $F = 0$, la ecuación se reduce a ésta:

$$D_u\,[v' : \sqrt{1 + v'^2}] = 0 \quad \therefore \quad v' = a \quad \therefore \quad v = au + b$$

es decir, las geodésicas son rectas.

EJEMPLO 2. — *Geodésicas de la superficie esférica.*

Si u es la latitud y v la longitud, el elemento de arco en la superficie esférica de radio 1 es:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 u. \qquad ds^2 = du^2 + \cos^2 u.dv^2$$

Más sencillo: efectúese el cambio de coordenadas, como ya se indicó en la Nota de (260).

Como no contiene la variable v, la ecuación de Euler, después de una primera integración, da:

$$\frac{v'.\cos^2 u}{\sqrt{1 + v'^2 \cos^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}$$

poniendo en esta forma la constante para facilitar la integración.

Despejando:

$$v'^2 = \frac{1}{(1 + c^2)\cos^4 u - \cos^2 u}$$

la integral es inmediata con el cambio de variable $\operatorname{tg} u = t$ y resulta:

$$c.\operatorname{sen}(v + \alpha) = \operatorname{tg} u \quad \text{o bien} \quad a\cos v + b\operatorname{sen} v = \operatorname{tg} u$$

que representa un arco de circunferencia máxima, sección por el plano $ax + by = z$.

334. — Curvas extremales en forma paramétrica.

La teoría que hemos expuesto es muy restringida, por considerar solamente aquellos arcos de extremos A, B, que son cortados en un solo punto por cada recta paralela al eje y. Para poder considerar todos los arcos AB es preciso adoptar la forma paramétrica:

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

y considerar las integrales del tipo:

$$\int f(x, y, x', y')\,dt \qquad [3]$$

Al cambiar el parámetro t por el u la diferencial queda dividida por u', mientras que x' y' quedan multiplicadas por u'. Para que la integral tenga significado intrínseco, independiente del parámetro elegido para representar el arco, es preciso que la función $f(x, y, x', y')$ quede multiplicada por u'; y como esto vale para todo número u', *debe ser homogénea de grado 1 respecto de las variables* x', y'.

Ejemplos. — La función integrando para la longitud del arco es $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, que cumple esta condición de homogeneidad.

Lo mismo sucede a la función $y\sqrt{x'^2 + y'^2}$ que aparece en el área de la superficie de revolución.

Para hacer variar el arco AB incrementaremos las coordenadas poniendo $x + r_1 z_1$, $y + r_2 z_2$ en lugar de x, y. Las funciones $z_1(t)$, $z_2(t)$ son continuas, nulas en los extremos A, B, y por comodidad las supondremos positivas en los puntos intermedios. Los números r_1, r_2, son reales y al anularse determinan el arco AB.

La integral [3] es una función $\Phi(r_1, r_2)$ de los parámetros r_1, r_2, y sus derivadas parciales primeras respecto de ellos deben anularse para $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, si es máxima o mínima en el arco AB la integral [3]. Es decir, debe verificarse:

$$\Phi'_1(0, 0) = \int (f'_x . z_1 + f'_{x'} . z'_1)\,dt = 0$$
$$\Phi'_2(0, 0) = \int (f'_y . z_2 + f'_{y'} . z'_2)\,dt = 0$$

Transformando por partes el 2.º sumando de la 2.ª integral resulta como ya se vió (332) la condición [5] de Euler; y lo mismo para la 1.ª integral. Resulta así el par de ecuaciones diferenciales de 2.º orden

$$\boxed{f'_x - Df'_{x'} = 0 \quad ; \quad f'_y - Df'_{y'} = 0.} \qquad [4]$$

donde el signo D indica derivación respecto de t.

Nota. — Como consecuencia de la homogeneidad de $f(x, y, x', y')$ se verifica la identidad fácil de demostrar:

$$(f'_x - Df'_{x'})x' = -(f'_y - Df'_{y'})y'$$

y por tanto, basta resolver una de las ecuaciones.

La demostración se reduce a derivar respecto de t los dos miembros de la igualdad:

$$f = x' f'_{x'} + y' f'_{y'}$$

que expresa la homogeneidad de f por el teorema de Euler (198), y simplificando la igualdad obtenida por reducción de los términos $x''f'_{x'} + y''f'_{y'}$ que aparecen en ambos miembros, resulta la igualdad propuesta.

He aquí un problema clásico cuya resolución completa no sería posible por el método expuesto en la lección anterior:

Problema de Newton. — *Determinar el cuerpo de revolución que al moverse en la dirección de su eje en un flúido encuentra resistencia mínima; suponiendo que la resistencia normal es proporcional al cuadrado de la componente normal de la velocidad.*

El área engendrada por el elemento ds, al girar al rededor del eje x, es $2\pi y . ds$; la componente normal de la velocidad v es $v . dy/ds$, luego la resistencia de la corona de superficie es $2\pi v^2 y . dy^2/ds$ por un factor numérico.

Como la componente normal al eje es nula, basta considerar la componente paralela, la cual se obtiene multiplicando por dy/ds, luego la resultante de todas es la integral

$$2\pi v^2 \int y . dy^3 . ds^{-2} = 2\pi \int \frac{y\, y'^3}{x'^2 + y'^2} dt$$

expresando las coordenadas en función de un parámetro cualquiera t.

La ecuación de Euler que debe integrarse es por tanto:

$$\frac{y\, x'\, y'^3}{(x'^2 + y'^2)^2} = a$$

y adoptando como parámetro $t = x'/y'$ resulta inmediatamente:

$$y = a(t^2 + 1)^2 : t$$

cuya derivada:

$$y' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t^2$$

permite despejar:

$$x' = a(t^2 + 1)(3t^2 - 1) : t = a(3t^3 + 2t - t^{-1})$$

e integrando resulta:

$$x = a(\tfrac{3}{4} t^4 + t^2 - \log t) + b.$$

Estas expresiones paramétricas indican que y no puede anularse, es decir, la curva no corta al eje x. El estudio de la curva (v. p. ej. *Vivanti*) permite construirla y la figura muestra claramente que el arco buscado debe pertenecer a una sola rama de la curva. Dados los extremos A, B, la construcción del arco AB puede hacerse gráficamente por semejanza.

335. — Principios extremales de la Física.

Desde la antigüedad se ha intentado edificar la Física sobre postulados de carácter extremal, de los cuales se deducen las ecuaciones y leyes fundamentales, y esta tendencia se acentúa más cada día. He aquí los más importantes:

PRINCIPIO DE MAUPERTUIS DE LA ACCIÓN MÍNIMA. (1740). *Un punto móvil de A a B sigue el camino tal que la integral de la velocidad a lo largo del mismo, es decir, $\int v . ds$, es mínima.*

De este principio, perfeccionado por Euler y modernamente generalizado por Hölder (1896) pueden deducirse las ecuaciones de la Mecánica. Por ejemplo, para el movimiento libre, las ecuaciones de Euler aplicadas a la integral que expresa la acción $\int (x'^2 + y'^2) dt$ dan $x' = a$, $y' = b$, es decir, el principio de inercia de Gálileo.

PRINCIPIO DE FERMAT (1629). — Una generalización importante del problema de la braquistócrona es ésta, que llamaremos problema de Fermat:

Siendo la velocidad de un móvil una función conocida $v(x, y)$, determinar el camino más breve entre dos puntos A, B, es decir, el arco tal que sea mínimo el tiempo total:

$$T = \int \frac{ds}{v(x, y)}$$

En el problema de Bernoulli, que conduce a la braquistócrona, esta velocidad es proporcional a $\sqrt{y}$, pero en el de Fermat es una función cualquiera. Si v es la velocidad de propagación de la luz (es decir, si $1/v$ es el índice de refracción) se tiene el auténtico principio de Fermat (o de Heron), fundamental en Optica, y que permite demostrar fácilmente las leyes de la reflexión y de la refracción. (V. *Curso Cíclico*, II).

PRINCIPIO DE HAMILTON (1834) Y ECUACIONES DE LAGRANGE (1788).

Un sistema mecánico con n grados de libertad está caracterizado por n parámetros o coordenadas: $q_1, q_2, \ldots, q_n$ funciones del tiempo. La *energía potencial* U es función de ellos; la *energía cinética* o *fuerza viva* L es función de ellos y de sus n derivadas respecto de t; la diferencia $L - C$ se llama *potencial cinético*, y con esta denominación, se enuncia así el *principio de Hamilton*:

Entre todos los movimientos posibles que en un tiempo dado hacen pasar un sistema de uno a otro estado, se realiza aquel movimiento para el cual es estacionario el potencial cinético medio:

$$\int_{t_0}^{t_1} (L - U) dt$$

Las ecuaciones de Euler [4] son en este caso las n siguientes:

$$DL_{q'}' - (T'_q - U'_q) = 0 \qquad (q = q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

que son precisamente las *ecuaciones dinámicas de* LAGRANGE.

Las ecuaciones de la Estática resultan como corolario:

$$C'_q = 0 \qquad (q = q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

es decir: *Condición necesaria y suficiente para que un sistema mecánico de*

energía potencial $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ está en equilibrio para ciertos valores de presentativa en el espacio de 3n dimensiones formada por los puntos cuyas estas coordenadas, es que la energía potencial sea estacionaria para esos valores.

Otros principios, también importantes en Mecánica, son éstos:

PRINCIPIO DE GAUSS DEL ESFUERZO MÍNIMO. — *El movimiento de un sistema material con vínculos bilaterales, está caracterizado entre todos los movimientos compatibles con los vínculos por la condición de esfuerzo mínimo de éstos.*

PRINCIPIO DE HERTZ. — *El movimiento de un sistema material de n puntos con vínculos bilaterales independientes del tiempo y no solicitado por fuerzas, se verifica con velocidad constante y con curvatura mínima de la gráfica recoordenadas son las coordenadas de los n puntos por las respectivas raíces cuadradas de sus masas.*

336. — Variación de las integrales múltiples.

El problema fundamental es análogo al resuelto en la lección anterior. Entre todas las funciones $u(x, y)$ definidas en un recinto D, que toman valores prefijados en el contorno c, determinar aquellas que dan valor máximo o mínimo relativo a la integral:

$$\int\int_D f(x, y, u, u'_x, u'_y)\,dx.dy \qquad [5]$$

Geométricamente: determinar los casquetes de contorno dado C que hacen máxima o mínima a la integral. Haciendo variar u, es decir, poniendo $u + rw$, donde r es un número real y $w(x, y)$ una función continua que se anula en el contorno C, la integral es función de la variable real r y anulando su derivada se llega a la condición necesaria de Euler:

$$\boxed{f'_u = D_x f'_p + D_y f'_q} \qquad [6]$$

$$(p = u'_x,\ q = u'_y)$$

He aquí algunos ejemplos muy importantes:

SUPERFICIES DE ÁREA MÍNIMA. — Aplicando la condición [6] al área de un casquete de contorno C

$$S = \int\int \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}.dx.dy = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}.dx.dy$$

resulta inmediatamente la ecuación de las superficies de área mínima:

$$z''_{xx}(1 + z'_y) - 2z''_{xy}.z'_x.z'_y + z''_{yy}(1 + z'^2_x) = 0$$

Compruébase que la satisface la ecuación de las superficies mínimas de revolución (superficies *catenoides*), obtenida en (333).

PRINCIPIO DE DIRICHLET. — Dado un recinto A, cualquiera que sea la función $u(x, y)$ que en el contorno tome valores prefijados, hace positiva a la integral:

$$I = \int \int [(u'_x)^2 + (u'_y)^2] \, dx \, dy$$

luego el conjunto de valores de I tiene un mínimo. ¿Será accesible, es decir, existirá alguna función u que dé a la integral I ese valor mínimo? Este postulado famoso se llama *principio de Dirichlet*. Tal función debe satisfacer a la ecuación [6] de Euler, que en este caso es:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad ; \qquad [7]$$

pero aun demostrada la existencia de solución de esta ecuación de Laplace, no queda probado que haga mínima a la integral. En cambio, admitido el principio de Dirichlet (que se puede demostrar directamente) se deduce, como hizo Riemann, la solución de [7].

EQUILIBRIO Y MOVIMIENTO DE CUERDAS, MEMBRANAS Y PLACAS.

Si se alabea el contorno de una membrana elástica situada en el plano xy, el área de la superficie $z = f(x, y)$ que forma la membrana es:

$$\int \int \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx . dy \sim \int \int dx . dy + \tfrac{1}{2} \int \int [(z'_x)^2 + (z'_y)^2] \, dx . dy$$

tomando solamente los dos primeros términos en el desarrollo de la raíz cuadrada. La dilatación sufrida por la membrana viene expresada por el 2.º sumando; y como la energía potencial es proporcional a la dilatación, resulta como condición de equilibrio: la función z debe hacer mínima la integral:

$$\int \int [(z'_x)^2 + (z'_y)^2] \, dx \, . \, dy$$

La ecuación de Euler [6], aplicada a esta integral, es:

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0$$

es decir, la ecuación de Laplace.

Análogamente resulta la ecuación de equilibrio de la placa elástica:
$\Delta\Delta z + f(x, y) = 0$, siendo f la fuerza exterior y representando Δ el laplaciano que, al aplicarlo dos veces, da una ecuación de 4.º orden.

También conduce el Cálculo de variaciones a las ecuaciones de los movimientos vibratorios de cuerdas, placas y membranas; la primera, que es la de d'Alembert, ha sido ya estudiada en la lección 79:

Ecuación de la cuerda vibrante:

$$\rho \, . \, z_{tt} = \mu z_{xx}$$

Ecuación de la membrana vibrante:

$$\rho . z_{tt} - f(x, y, t) = \mu \, . \, \Delta z$$

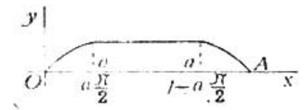
Ecuación de la placa vibrante:

$$\rho \, . \, z_{tt} + f(x, y, t) + \mu \, . \, \Delta\Delta z = 0 .$$

NOTAS

La teoría expuesta en la Lección 80 tiene toda la sencillez y toda la imperfección lógica de la Matemática del siglo XVIII; y aunque es suficiente para llegar a las fórmulas prácticas que necesita el técnico, conviene señalar sus lagunas e indicar, siquiera sea someramente, el modo de llenarlas.

Ya hemos advertido que la ecuación de Euler da una condición *necesaria* para las funciones extremales (que hacen máxima o mínima la integral); pero *no suficiente* ni siquiera ampliándola con las condiciones de signo relativas a las derivadas sucesivas; pues el ser mínima la integral para cada tipo de variación, es decir, dentro del haz $y + tz$, siendo z una función prefijada no implica que lo sea para el conjunto de todas ellas; de igual modo que acontecía con la teoría ordinaria, en ejemplos como el puesto en (215); pero aquí el conjunto de direcciones de variación, es decir, el conjunto de funciones z, es mucho más amplio y el problema mucho más complejo.



EJEMPLO. — Determinar la curva de extremos 0 1, que haga máxima o mínima a la integral siguiente:

$$\int (y'^2 - 4y^3)\,dx$$

La ecuación de Euler se reduce en este caso a la siguiente:

$$-12y^2 - D(2y') = 0 \quad ; \quad -12y^2 - 2y'' = 0$$

que se satisface por la solución $y = 0$, la cual cumple, en efecto, la condición de hacer mínima la integral para variaciones del tipo $t \cdot z(x)$, pues cualquiera que sea la función elegida $z(x)$, con derivada finita en (0,1), tomando t suficientemente pequeño, es la integral positiva. Sin embargo, existen funciones tan próximas a 0 como se quiera, que hacen negativa la integral. Basta construir curvas como la indicada en la figura, formada por un segmento rectilíneo al arco de sinusoide $y = a$ sen x/a, y el análogo en el otro extremo. Un cálculo fácil conduce a este resultado:

$$\int y'^2 \cdot dx = a(\pi + \tfrac{1}{2}) \qquad \int y^3\,dx > a(1 - 2\pi a)$$

luego para valores de a suficientemente pequeños, la integral resulta negativa.

Note el lector que la distinción entre entorno y aproximación radial es la misma estudiada en (215).

CONDICIÓN DE LEGENDRE. — Para poder aplicar a la ecuación de Euler los métodos generales de las ecuaciones de 2.° orden p. ej. el desarrollo en serie (310) es necesario despejar y'', operación posible si $f''_{y'y'} \neq 0$. Esta condición de Legendre se puede afinar, considerando la variación 2.ª y así resulta este doble criterio para que la solución de la ecuación de Euler haga mínima la integral:

Condición necesaria: $f''_{y'y'} > 0$

Condición suficiente: $f''_{y'y'}\, f''_{yy} - (f''_{yy'})^2 \gtreqless 0$

EJERCICIOS

1. — Determinar las geodésicas de las superficies cilíndricas y cónicas.

2. — Resolver en forma paramétrica el problema de la catenaria y el de la braquistócrona, para ver si existen curvas no uniformes respecto de x, que satisfagan a las condiciones impuestas en estos problemas.

APENDICE

TEORIA DE LOS ERRORES FORTUITOS DE OBSERVACION

1. — Errores sistemáticos y accidentales.

Al efectuar repetidamente la medida de una magnitud resultan números distintos de la verdadera medida de ésta; unas causas de error son conocidas y actúan en un sentido conocido; tal sucede, por ejemplo, si se mide una distancia llevando reiteradamente una regla, sin estar bien alineados los puntos intermedios, en cuyo caso resulta un error por exceso; o si la regla tiene un error por defecto o por exceso;... En general, todos los errores debidos a defectos del instrumento, se llaman *sistemáticos* y pueden calcularse aproximadamente; los números obtenidos en las medidas deberán corregirse de estas causas sistemáticas de error; pero aun hechas estas correcciones, los números así corregidos difieren del verdadero, unos por defecto y otros por exceso. Estos errores debidos a causas tan complejas que no es posible conocer ni evaluar, se llaman *errores accidentales,* y cuando el número de observaciones es muy grande tienden a compensarse, verificándose estas condiciones:

1.° Los errores son tanto más frecuentes cuanto más pequeños.

2.° Su promedio tiende hacia cero al crecer el número de obobservaciones.

3.° El número de errores superiores a cierto número es sensiblemente nulo.

Cuando el promedio de los errores tiende hacia un valor distinto de 0, es preciso buscar alguna causa de error sistemático; y si no tiende hacia ningún valor, se dice que el sistema no es normal.

Estas o análogas condiciones, igualmente insuficientes, suelen tomarse para caracterizar los errores *accidentales* o *fortuitos;* prescindamos de ellas y después daremos la definición rigurosa.

2. — Errores medio y promedio.

Sea X el valor exacto de la magnitud desconocida y x_r los n valores observados. Llamaremos *errores verdaderos* a los números $\delta_r = x_r - X$, y designaremos por δ el *promedio de los errores,* o sea:

$$\delta = \Sigma\delta_r : n = \Sigma(x_r - X) : n \qquad [1]$$

Si formamos la media aritmética M de los valores observados, como es:

$$\Sigma x_r = nM \quad \therefore \quad \delta = (nM - nX) : n = M - X \qquad [2]$$

Es decir: *el promedio de los errores verdaderos es igual al error del promedio de los valores observados.*

Llamaremos *errores aparentes* a las diferencias conocidas entre los valores observados y su media M, es decir:

$$\Delta_r = x_r - M \quad \therefore \quad \Sigma\Delta_r = \Sigma x_r - n \, . \, M = 0 \qquad [3]$$

Este número M está, pues, caracterizado por la condición $\Sigma(x_r - M) = 0$; pero además tiene la propiedad de hacer mínima la suma de cuadrados de diferencias con los n valores x_r. En efecto, siendo $\delta_r = \Delta_r - \delta$ al sumar los n cuadrados resulta:

$$\Sigma\delta_r^2 = \Sigma\Delta_r^2 + n\delta^2 \qquad [4]$$

pues el doble producto se anula, por ser $\Sigma\Delta_r = 0$; luego, cualquiera que sea X, la suma de cuadrados de distancias a las puntos x_r es mayor que para el punto M, y solamente es igual si $\delta = 0$, es decir: si $X = M$.

Distingamos dos problemas: 1.º) Conocido el valor exacto X, expresar por un número la precisión de la serie de medidas x_r. 2.º) Si se desconoce el valor exacto, acotar el error más probable del promedio M y el grado de precisión de las medidas x_r.

El 1.º se resuelve adoptando la medida siguiente:

Se llama *error medio cuadrático* o simplemente *error medio* de un sistema de valores a la raíz cuadrada del promedio de cuadrados de sus errores verdaderos, es decir, pondremos:

$$\mu^2 = \Sigma\delta_r^2 : n \quad \text{y análogamente} \quad m = \Sigma\Delta^2_r : n \qquad [5]$$

La relación [4] adopta así esta forma importante:

$$\boxed{\mu^2 = m^2 + \delta^2} \qquad [6]$$

en la cual es conocido m, promedio de los errores aparentes.

Conoceremos, pues, el promedio δ de errores, si conocemos el error medio μ; y recíprocamente. Para poder determinar uno y otro, se precisa otra relación, y ésta resulta de la igualdad,

$$(\Sigma\delta_r)^2 = \Sigma(\delta_r^2) + s$$

que se obtiene desarrollando el cuadrado de la suma $\Sigma\delta_r$ y designando por $s = \Sigma \, \delta_r \, \delta_s$. Dividiendo [7] por n^2 resulta la relación buscada:

$$\delta^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{s}{n^2} \qquad [7]$$

De [6] y [7] se despeja inmediatamente:

$$\mu^2 = \frac{nm^2}{n-1} + \frac{s}{n(n-1)}$$

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis ninguna sobre los errores; ni aun haciéndolas podríamos decir nada sobre el número s, pues aun con ellas cabe que la 2.ª fracción llegue hasta valer μ^2 (si $m = 0$, o sea $x_r = M$); y es, por tanto, aventurado el despreciarla, como suele hacerse; pero si consideramos, no una serie de medidas de X, sino muchas, los valores de s son unos positivos y otros negativos, y se admite que *su valor más probable es* 0; resultando así las fórmulas fundamentales:

$$\mu_0^2 = \frac{nm^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n-1}$$

$$\delta_0^2 = \frac{m^2}{n-1} = \frac{\Sigma\Delta_r^2}{n(n-1)}$$

que expresan el *error absoluto más probable* δ_0 del valor M, y el *error cuadrático más probable* μ_0 de la serie de medidas. Pero este concepto exige algunas nociones de probabilidades.

Ejemplo 1. — En una triangulación geodésica se midieron los ángulos de 9 triángulos, resultando estas discrepancias respecto de 180° para la suma de sus ángulos, que expresamos en segundos, ordenándolos de menor a mayor:

$$-2,780 \;;\; -2,352 \;;\; -1,349 \;;\; -0,764 \;;\; +0,009 \;;\; +1,246 \;;\; +1,613 \;;$$
$$+1,900 \;;\; +2,471$$

Fácilmente se calcula:

$$M = 1,609 \quad , \quad \Sigma\delta_r = -0,006 \quad , \quad \mu = 1,811$$

La pequeñez de $|\delta| = 0,006 : 9 < 0,0007$ indica que están muy compensados, pero ello carece de valor; pues si se prescinde, p. ej., de los dos primeros triángulos aumenta considerablemente. La medida de la precisión la da μ.

Ejemplo 2. — Las medidas de una longitud (desconocida) expresada en metros, son:

$$423,35 \;;\; 423,43 \;;\; 423,30 \;;\; 423,30 \;;\; 423,27$$

El promedio es: $M = 423,33$.

Errores aparentes:	−2 ,	−10 ,	+3 ,	+3 ,	+6
Cuadrados:	4 ,	100 ,	9 ,	9 ,	36

Valores más probables: $\delta_0 = 2,81$; $\mu_0 = 6,28$; $X_0 = 423,33 \pm 0,03$

Ejemplo 3. — Se han obtenido estas medidas de un segmento:
1,280; 1,282; 1,280; 1,283; 1,280; 1,290; 1,280; 1,290; 1,285; 1,290; 1,280.

El promedio es $M = 1,2836$; restando de cada uno y formando la suma de cuadrados es $\Sigma\Delta_r^2 = 0,000192$; el error medio y el promedio de errores son:

$$\mu_0 = \sqrt{0,0000192} = 0,0044 \quad ; \quad \delta_0 = 0,0044 : \sqrt{11} = 0,0013$$

y el valor más probable: $X_0 = 1,2836 \pm 0,0013$

3. — Definición de probabilidad.

Recordemos algunas definiciones de probabilidades: Cuando entre n casos posibles, nos fijamos en m casos especiales (que se llaman *favorables*), se llama probabilidad de éstos al cociente $m/n \leq 1$. Cuando es infinito el número de casos posibles y es finito el de casos favorables, su probabilidad es nula. Por ejemplo: en un número grande de disparos, la probabilidad de dar en el blanco, considerado como punto matemático es nula. La probabilidad de que el error de una observación sea 0,02 es también nula.

En cambio es un número finito la probabilidad de que el disparo quede a una distancia del blanco entre 3 cm. y 4 cm. o que el error de la medición hecha esté comprendido entre 0,02 y 0,03.

Ahora bien, si en vez del intervalo 3 cm. a 4 cm. consideramos de 10 cm a 11 cm. de igual magnitud, se observa que el número de disparos contenidos en esa zona es menor que en la otra; y si consideramos un intervalo mucho más lejano, el número de errores en él comprendido es sensiblemente nulo, de acuerdo con las leyes (1).

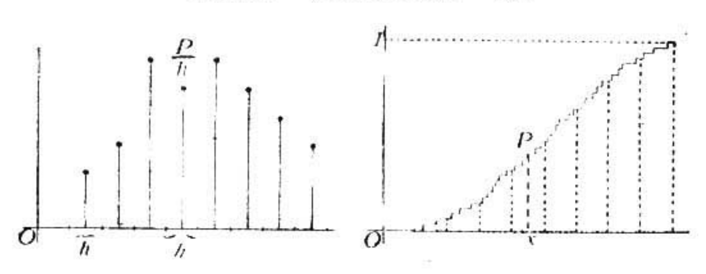
Según la definición de probabilidad resulta que ésta tiene la *propiedad aditiva*, es decir: la probabilidad en un intervalo suma de dos intervalos, es la suma de las probabilidades en ambos.

4. — Ley de distribución de los errores.

Si efectuamos numerosas medidas de una magnitud y llevamos como abscisas los números obtenidos x_r, se observa que se condensan hacia un cierto punto, espaciándose tanto más cuanto más se alejan de él. Si todos fueran equidistantes, se llamaría *densidad* por unidad de longitud a la parte alícuota ν/n del número total de puntos contenida en la unidad, o sea, elegido un segmento h, al cociente ν/nh, siendo ν el número de puntos contenidos en el segmento h. Como la distribución no es uniforme, este cociente varía con el segmento elegido $(x, x+h)$, y a esta función de x, h, la llamaremos *densidad* en dicho intervalo.

Como el cociente ν/n es la probabilidad de que un valor observado esté en el intervalo $(x, x+h)$ resulta:

$$densidad = \text{probabilidad}/h = P/h$$

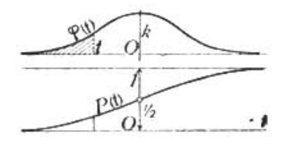


La función $f(x) =$ num.º de valores $x_r < x$, está representada por una línea escalonada cuyo máximo es el número total n; si dividimos por n, es decir, si adoptamos la ordenada $P(x) =$ probabilidad de los valores $x_r < x$, la ordenada máxima es 1 y la gráfica se llama de *probabilidades totales*.

Dividida la recta en intervalos h, si en el punto medio de cada uno llevamos como ordenada la densidad P/h, se obtiene una gráfica, que, al decrecer h y aumentar n, se va aproximando a una curva continua de forma campaniforme, y diremos que los errores son *accidentales*, si esta curva es del tipo llamado *normal* o de Gauss:

$$\varphi(x) = K \cdot e^{-k^2(x-c)^2} \qquad [8]$$

simétrica respecto de una recta $x = c$, y cuyas ordenadas decrecen muy rápidamente a ambos lados del punto c, siendo sensiblemente nulas desde un valor en adelante. Este número c, promedio o baricentro de los x_r es, por tanto, el valor *más probable*, esto es, el de *densidad máxima*. Poniendo $x - c = t$, el número de errores Δ_r contenidos en el intervalo $(t, t + h)$ es igual al de valores x_r en el intervalo $(x, x + h)$.



y su densidad viene expresada por la función de Gauss [8] que se reduce a:

$$\varphi(t) = Ke^{-k^2 t^2} \qquad [9]$$

Para $n \to \infty$ la probabilidad $P = \nu/n$ en el intervalo $(-\infty, t)$ tiene por hipótesis un límite $P(t)$, que llamaremos la *probabilidad total*; la probabilidad en $(t, t + h)$ es: $\Delta P(t) = P(t + h) - P(t)$ y la densidad en el punto t es:

$$\varphi(t) = \text{lím.}\ \Delta P(t) : h = P'(t)$$

la cual suponemos que viene expresada por la ley exponencial de Gauss; siendo, por tanto, la probabilidad de que un error esté comprendido entre a y b:

$$P(b) - P(a) = \int_a^b \varphi(t)\,dt = K \int_a^b e^{-k^2 t^2}\,dt \qquad [10]$$

Para el intervalo $-\infty, +\infty$ la probabilidad es 1, y como la integral, según se calculó en (282), vale $\sqrt{\pi} : k$, resulta $K = kc\sqrt{\pi}$.

Cuanto mayor es k, tanto más se eleva la curva en su parte central, y más rápidamente tiende a 0, estrechándose el intervalo de los errores posibles; es decir, aumenta la frecuencia de los pequeños errores y se hacen imposibles los grandes. Por esto se llama k la *medida de la precisión* del sistema considerado de medidas.

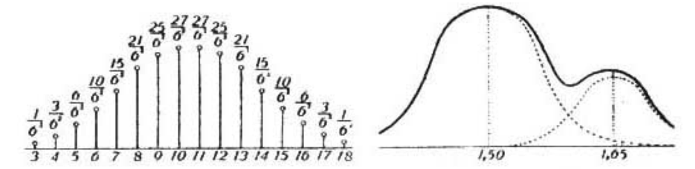
La definición basada en la función [8], que aparece en muchas cuestiones, no es arbitraria y puede justificarse así:

EJEMPLO 1. — Si se anotan las frecuencias de las sumas 2 hasta 12 logradas lanzando dos dados se observa que 2 y 12 son las menos frecuentes, porque sólo aparecen en los casos $1 + 1$ y $6 + 6$; mientras que las sumas intermedias se pueden formar de varios modos y este número es máximo para la suma.

$$7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1.$$

La gráfica de estas frecuencias tiene la forma campaniforme (la figura representa el caso de 3 dados) y al crecer el número de dados tiende, como se puede demostrar, a una curva de Gauss.

Este ejemplo es importante, porque señala el camino para *demostrar* que las frecuencias de los errores accidentales obedecen a la ley asintótica de Gauss, si se supone que resultan de la superposición de numerosos sumandos, llamados *errores elementales*, que se combinan de todos los modos posibles. Es preferible, sin embargo, desistir de tales demostraciones, siempre basadas en propiedades desconocidas de los errores accidentales y adoptar la ley normal como *definición* de éstos.



EJEMPLO 2. — Si se examinan las tallas de los conscriptos en un país de población homogénea y se divide el eje x en cm, llevando en el punto medio de cada uno como ordenada el número de reclutas cuya estatura está comprendida entre ambos números consecutivos, resulta una gráfica con un eje de simetría que corresponde a la estatura media $x = c$. Si se dividiera el eje x en mm. (suponiendo que sea posible apreciar el mm. en las tallas) las frecuencias serían aproximadamente 10 veces menores; pero si en lugar del número y llevamos tos de la gráfica tienden a formar una curva; si ésta es del tipo [8], se dice que la población es *normal*.

En cambio, si en un país hay un núcleo extranjero, la gráfica no será una curva normal o de Gauss, sino que presentará una forma como la indicada en la figura 2.ª. Hay métodos para descomponer tal función en suma de funciones normales y la figura indica que en este caso hay dos sumandos. La interpretación es clara: la estatura media de la mayoría del país es 1,50; y la estatura media de la minoría extraña es 1,65, siendo esta minoría aproximadamente ¼ de la población total, como se ve comparando las áreas.

5. — Errores de diversos órdenes.

La determinación de una magnitud por observaciones se puede comparar con un juego en el que solamente hay pérdidas, pues los valores observados siempre difieren del valor exacto, y el error, sea positivo o negativo, puede considerarse como una pérdida; es un juego en que sólo puede aspirarse a perder lo menos posible, y de igual modo que en los juegos de azar se mide el *riesgo* por la *esperanza de pérdida*, es decir, por el producto de la cantidad arriesgada por la probabilidad de perderla, en la teoría de errores se

puede definir el *riesgo de error* como suma de los diversos errores posibles δ_i por sus respectivas probabilidades, es decir, por la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta| \, \varphi(\delta) \, d\delta \qquad [11]$$

la cual no es sino el límite del promedio de valores absolutos $\Sigma \, | \delta | : n$ (*).

Por tanto, la integral [11] es aproximadamente igual al *promedio absoluto* de los errores, es decir, a la media aritmética de los valores absolutos de los errores.

Esta medida del riesgo de error no es la más satisfactoria, pues la importancia de cada error no debe medirse por su cuantía, sino por una función de esa cuantía, y según cual sea esa función $F(\delta)$ que se elija, resulta una medida distinta del riesgo de error.

Si adoptamos la función δ^2 el riesgo es el promedio de los cuadrados δ^2 de los errores, cuya raíz cuadrada hemos llamado *error medio cuadrático*: μ.

Si se adoptan δ^3 o δ^4 resultan los errores medios cúbico y bicuadrático μ_3 y μ_4 de uso menos frecuente que los anteriores.

Adoptada la ley de Gauss, resultan relaciones notables entre los errores medios y la precisión k. En efecto, las integrales respectivas se calculan directamente, o se deducen fácilmente (**) de la ya calculada:

$$2 \int_0^\infty e^{-k^2x^2} \, . \, dx = \sqrt{\pi}/k \qquad [12]$$

y son las siguientes:

$$2 \int_0^\infty x \; e^{-k^2x^2} \, . \, dx = 1/k^2 \qquad [13]$$

$$4 \int_0^\infty x^2 \, . \, e^{-k^2x^2} \, . \, dx = \sqrt{\pi}/k^3 \qquad [14]$$

$$2 \int_0^\infty x^3 \, . \, e^{-k^2x^2} \, . \, dx = 1/k^4 \qquad [15]$$

$$2 \int_0^\infty x^4 \, . \, e^{-k^2x^2} \, . \, dx = 3/4 \, \sqrt{\pi}/k^5 \qquad [16]$$

(*) **Más general**: cualquiera que sea la función continua $F(x)$ la suma de valores de $F(x)$ en los ν puntos δ_r del intervalo h es igual a ν veces su **media aritmética, la cual, por la continuidad, es uno de los valores $F(\xi)$ en el intervalo; luego para dicho intervalo es $\Sigma F(x)/n = \nu F(\xi)/n = P.F(\xi)$; y como la probabilidad P es la frecuencia por h, en el límite resulta la integral como límite de $\Sigma F(x)/n$ extendida a todo el campo de variación de x.**

(**) La integral [13] es inmediata, haciendo $kx = t$; la [14] resulta derivando [12] respecto del parámetro k; y derivando la [14] sale la [16]; análogamente, derivando [13] sale [15]. Aunque sólo hemos demostrado (20) la regla para intervalo finito, también es válida en este caso.

Multiplicando todas por $K = k/vn$, los primeros miembros son aproximadamente (véase la nota de página anterior): el error *promedio absoluto* μ_1; el cuadrado del error *medio cuadrático* μ_2^2 (o μ^2 sin subíndice); el cubo del error *medio cúbico* μ_3^3; y el bicuadrado del error *medio cuártico* μ_4^4.

Llamando $\lambda = 1/k$ (puede considerarse como medida de la imprecisión) resultan, por tanto, estas relaciones:

$$\mu_1 \sim \lambda : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_1 \sim \lambda . 0{,}564 \qquad [17]$$

$$\mu_2^2 \sim \lambda^2 : 2 \quad \therefore \quad \mu_2 \sim \lambda . 0{,}707 \qquad [18]$$

$$\mu_3^3 \sim \lambda^3 : \sqrt{\pi} \quad \therefore \quad \mu_3 \sim \lambda . 0{,}827 \qquad [19]$$

$$\mu_4^4 \sim \lambda^4 \; 3/4 \quad \therefore \quad \mu_4 \sim \lambda . 0{,}930 \qquad [20]$$

He aquí, pues, cuatro procedimientos para calcular la medida k de la precisión del sistema de observaciones, o su recíproco λ; y conviene utilizar los cuatro para juzgar si los errores son efectivamente fortuitos. (*).

EJEMPLO. — En la serie de medidas indicadas en el ejemplo 3 (p. 405) es:

$$\Sigma \mid \delta_r \mid \sim 0{,}0408 \quad \therefore \quad \mu_1 \sim 0{,}0037$$

Aplicando la primera fórmula [17] para la precisión resulta $\lambda \sim 0{,}0065$. En cambio, utilizando el valor ya calculado, $\mu_0 \sim 0{,}0044$

6. — Error probable de un sistema de observaciones.

La probabilidad de que un error esté comprendido entre $-x$ y x viene expresada por la integral:

$$(2k/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-k^2 x^2} . dx$$

la cual tiene las variables x y k; pero si hacemos el cambio de variable $kx = t$, se convierte en esta otra:

$$(2/\sqrt{\pi}) \int_0^{kx} e^{-t^2} . dt = \Theta(kx)$$

llamando $\Theta(t)$ a la función primitiva de e^{-t^2}, por la constante $2/\sqrt{\pi}$. Esta función se ha tabulado al final y con esa tabla se puede calcular la probabilidad, conocida la precisión k.

Tiene especial interés aquel valor $x = r$ tal que la probabilidad de que sea $\mid \delta_n \mid < r$ es igual a la probabilidad de que $\mid \delta_n \mid > r$. O sea: la probabilidad para el intervalo $(-r, r)$ debe ser $1/2$, es decir: $\Theta(kr) = 1/2$.

(*) Dice Bertrand: "Estas fórmulas singulares merecen tanta confianza, que un calculador que examine una serie de observaciones y encuentre que no satisfacen a estas relaciones, puede tener como seguro que han sido retocados y alterados los resultados de la experiencia."

Tratándose de fórmulas aproximadas, esta afirmación tan rotunda sólo es admisible cuando se excede cierto límite en las alteraciones.

Este número r se llama *error probable* o mejor *error mediano*, y mediante la tabla se calcula fácilmente que debe ser:

$$kr = 0{,}477 \quad \therefore \quad r = \lambda . 0{,}477 \qquad [21]$$

o bien, expresado en función del error medio:

$$r = \mu . 0{,}675 \qquad [22]$$

He aquí, pues, una nueva medida de la precisión del sistema de observaciones también proporcional inversamente a la precisión k.

A veces se toma como referencia el error probable. Si éste es, por ejemplo, 0,25, e interesa saber la probabilidad de que el error sea menor que dos veces éste, podemos calcularla de dos modos: con la tabla de $\Theta(t)$ pondremos $t = k\ 2 . 0{,}25$, y como según [21] $k . 0{,}25 = 0{,}477$, buscaremos en la columna de Θ el valor para $t = 2 . 0{,}477$. Se evita este trabajo con la tabla especial de la última columna, donde para $t = 2$, leemos: 0,823.

7. — Método general de cuadrados mínimos.

Cuando las magnitudes desconocidas x, y, z, no se miden directamente, sino que se calculan mediante una ecuación cuyos coeficientes se conocen por obsèrvación directa, y se repiten un gran numero de veces, se tiene un sistema de muchas ecuaciones de las cuales hay que despejar, no un sistema de valores de x, y, z que las satisfagan exactamente, ya que esto es imposible, sino el conjunto x, y, z que las satisfagan con mayor aproximación, y como medida de esta aproximación se adopta el error medio. Es decir: si las ecuaciones son $f_r(x, y, z) = 0$, llamaremos solución más probable a la que hace $\Sigma\delta_r^2$ mínimo, siendo δ_r el valor que toma f_r para dicha solución.

Si la función no es lineal, se desarrolla en serie, tomando solamente los términos lineales como aproximación, que en muchos casos es suficiente. Supondremos, pues, un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo con tres incógnitas:

$$a_r x + b_r y + c_r z = l_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Se llama sistema *normal* el sistema determinado:

$$(aa)x + (ab)y + (ac)z = (al)$$
$$(ba)x + (bb)y + (bc)z = (bl)$$
$$(ca)x + (cb)y + (cc)z = (cl)$$

designando $\Sigma a_r\, b_r = (a\, b)$ y análogamente las otras sumas.

Es fácil comprobar que su solución x_0, y_0, z_0 es la que hace mínima la suma

$$\Sigma\delta^2 = \Sigma(a_r x + b_r y + c_r z - l_r)^2$$

pues si se sustituye $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, $z = z_0 + \gamma$, y se tie-

nen en cuenta las ecuaciones a que satisfacen (x_0, y_0, z_0) resulta la anterior suma de cuadrados más otra suma de cuadrados (por anularse los dobles productos). O bien puede demostrarse formando las derivadas.

EJEMPLO. — Calcular la velocidad inicial y la aceleración de un movimiento uniformemente acelerado, conocidos los espacios recorridos en los tiempos siguientes:

$t = 0$	1	3	5	7	10
$e = 0$	5	20	38	58,5	101

La ecuación es: $e = vt + \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \therefore \quad vt + \frac{1}{2}\gamma t^2 - e = 0$

y las incógnitas son v, γ; los coeficientes son t, $\frac{1}{2}t^2$, e.

El sistema normal es:

$$184\, v + 748\, \gamma = 1674{,}5$$

$$748\, v + 3277\, \gamma = 7050{,}75$$

de donde se despeja la solución probable $v = 1{,}9$, $\gamma = 1{,}03$.

TABLA PARA CÁLCULO DE ERRORES

t	$\varphi(t) = e^{-t^2} : \sqrt{\pi}$	$\Theta(t) = 2/\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-t^2}.dt$	$2/\sqrt{\pi}\int_0^{0,477\,t} e^{-t^2}.dt$
0,0	0,564	0,000	0,000
0,1	0,559	0,112	0,054
0,2	0,542	0,223	0,107
0.3	0,516	0,329	0,160
0,4	0,481	0,428	0,213
0,5	0,439	0,520	0,264
0,6	0,394	0,604	0,314
0,7	0,346	0,678	0,363
0,8	0,297	0,742	0,411
0,9	0,251	0,797	0,456
1,0	0,208	0,843	0,500
1,1	0,168	0,880	0,542
1,2	0,134	0,910	0,582
1,3	0,104	0,934	0,619
1,4	0,079	0,952	0,655
1,5	0,059	0,966	0,688
1,6	0,044	0,976	0,719
1,7	0,031	0,984	0,748
1,8	0,022	0,989	0,775
1,9	0,010	0,993	0,800
2,0	0,007	0,995	0,823
2,1	0,004	0,997	0,843
2,2	0,003	0,998	0,862
2,3	0,002	0,999	0,879
2,4	0,001	0,999	0,895
2,5	0,001	1,000	0,908
2,6	0,000	1,000	0,921
2,7	0,000	1,000	0,931

EVOLUCION DEL CALCULO INFINITESIMAL

PRECURSORES DEL CALCULO INTEGRAL

Suele considerarse a Arquímedes como el iniciador del método infinitesimal para el cálculo de áreas, que había de conducir al cabo de los siglos al Cálculo integral, pero en verdad corresponde tal honor a su antecesor **Antifonte**, que hacia el año -430 define el área del círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscriptos cuyo número de lados crece suficientemente. En realidad el concepto de límite, es decir, la idea de crecimiento indefinido, no aparece todavía; y lo mismo acontece a su contemporáneo Brison, que completó el concepto, considerando también los polígonos circunscriptos y creyendo, equivocadamente, que el área del círculo es el promedio de las áreas de cada par de polígonos correspondientes.

Tanto estos precursores, como el propio Arquímedes (-287 -212) en su famosa cuadratura de la parábola, no utilizan el método qué hoy llamaríamos de la **integral**, sino el método de **exhaucción**, que consiste en descomponer la figura en una serie convergente de trozos y la suma de la serie de medidas de ellos da la extensión de la figura total. Así p. ej. la simple inspección de la figura indica claramente cómo llega Arquímedes a la serie geométrica:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{4}{3}$$

Esta la primera serie convergente que aparece en la Historia y Arquímedes logró calcular su suma tomando como unidad el área del triángulo A B C.

Su mérito sobresaliente es el de haber establecido además los fundamentos del Cálculo integral, con otro método de cuadratura de la parábola que no figura en la gran Historia de Cantor y que equivale en esencia al cálculo de la integral de x^2.

Juan Kepler (1571-1640). En los 19 siglos que separan a Arquímedes de Kepler no se encuentran progresos esenciales en la vía abierta por el siracusano. Fué un problema práctico (con motivo de la gran cosecha de uva en Austria, donde Kepler se encontraba) el que le indujo a estudiar la cubicación de toneles y en 1615 aparece su famosa **Stereometría doliorum** que contiene toda una teoría, muy imperfecta sin duda, de la cubicación de sólidos de revolución, resolviendo el problema para 92 tipos, que designa con los nombres de las frutas a que se asemejan.

Por consideraciones nada rigurosas, descomponiéndolo en pequeñas cuñas o husos por planos meridianos, llega a cubicar el toro; y también aborda el problema para los cuerpos de revolución engendrados por un segmento circular que gira alrededor de su cuerda, cuerpos que llama **meliformes** o **citriformes**, según que el segmento sea mayor o menor que un semicírculo, logrando obtener cilindros equivalentes. Finalmente enuncia una ley errónea que sospecha exacta para este 2º. caso: los volúmenes engendrados por el segmento circular al girar alrededor de su cuerda y de su eje de simetría son entre sí como la altura y la semicuerda del segmento circular.

En la misma obra hay atisbos del problema inverso de la tangente, que había de dar origen al Cálculo integral; se trata de distinguir la clase de cada cónica entre las diversas que pasan por un punto, según sea la posición de la tangente en él. También vislumbra el método infinitesimal para los máximos y mínimos, y por consideraciones infinitesimales logra probar que entre todos los poliedros inscriptos en la esfera el cubo tiene volumen máximo.

Finalmente, con motivo de sus famosas leyes planetarias, aborda la rectificación de la elipse, llegando a la fórmula aproximada π (a+b), y por artificios ingeniosos logra calcular la integral definida de la función sen x entre o y x, obteniendo el resultado exacto 1—cos x.

Buenaventura **Cavalieri** (1591?-1647), es otro gran precursor del Cálculo integral y su **Geometría indivisibilibus** (1645) significa progreso considerable en dirección distinta a la de Kepler. Mientras el gran astrónomo alemán persiste en la vía arquimediana de sumar los elementos infinitesimales en que se descompone cada figura, vano empeño casi siempre, el jesuata italiano evita la sumación directa y se limita a comparar dos figuras para deducir la extensión de una mediante la otra. Cada recinto plano lo considera como suma de infinitos segmentos paralelos y cada cuerpo como suma de sus infinitas secciones paralelas. Tales segmentos y tales secciones planas son los **indivisibles** de Cavalieri. Cuáles fueran los indivisibles de Galileo, que también estaba en posesión de una teoría análoga, es cosa ignorada, pues nada llegó a publicar, pero en sus **Discorsi** (1638) efectúa una verdadera integración de la función gt para llegar a la ley de caída de los graves: $^1/_2$ gt^2.

El resultado capital de la Geometría de Cavalieri es su famoso principio: **Dos figuras planas o espaciales que tienen equivalentes sus secciones paralelas son equivalentes.** Con él logra cubicar los conos, cuadrar la parábola, la elipse y la espiral de Arquímedes, problemas ya resueltos por el siracusano; pero estimulado por los ataques de sus competidores, llega a perfeccionar el método comparando figuras cuyas secciones son tales que la extensión de una es potencia de la otra y así llega (1649) a resultados que equivalen, con el tecnicismo actual, a calcular las integrales de las potencias x^n de exponente natural.

Su exposición ha sido muy censurada, llegando a decir Marie que si hubiera premios para la oscuridad, lo ganaría sin disputa. Tal oscuridad, agregamos por nuestra parte, perdura a través de Newton y hasta nubla muchos tratados actuales por su fecha, aunque no por su contenido; oscuridad inevitable mientras se pretende descomponer las figuras en elementos **invariables**, sean **indivisibles** o **infinitésimos**. Tales tratados, escritos especialmente para técnicos, que hablan de puntos **consecutivos** de una curva, y definen la tangente por la condición de tener dos puntos de la curva **confundidos** en uno, y dan definiciones metafísicas de los infinitésimos (cuando tan fácil es en nuestro tiempo darla sencilla y rigurosa) están conceptualmente atrasados respecto de Cavalieri, quien con excelente sentido, no pretende definir los indivisibles, ni explicar la paradoja del continuo, limitándose a dar imágenes intuitivas y a enunciar con todo rigor y claridad su fecundo principio.

El uso de indivisibles curvos (que hoy llamamos cuadratura en coordenadas polares) permitió a Cavalieri hacia 1623 y poco después al P. San Vicencio, calcular el área definida por la espiral de Arquímedes. A este jesuata se debe también la cubicación de ciertos cuerpos que hoy hacemos con integrales dobles.

Pablo Guldin (1577-1643), religioso como Cavalieri, pero declarado enemigo suyo, publicó en 1645 su obra titulada **Centrobaryca,** que contiene multitud de determinaciones de baricentros; y en su segundo tomo (1640)

da los dos teoremas que le han dado celebridad; el 4º volumen está dedi-Cavalieri de haber plagiado a Kepler, acusación sumamente injusta, pues mientras los indivisibles carecen de espesor y son innumerables, los elementos de Kepler son pequeños trozos de la figura, como hace notar Cavalieri en su réplica; el cual, siguiendo la vieja táctica de defenderse atacando, acusa a su vez a Guldin de haber tomado de Kepler sus dos famoses reglas, acusación igualmente injusta. Perdió en cambio una mortífera arma arrojadiza, por desconocer Cavalieri los escritos del griego Pappo (s. III) (que Guldin conocía en cambio muy bien) y en los cuales se encuentra el teorema del volumen del sólido de revolución, como producto del área del recinto por el camino del baricentro.

Otra figura muy digna de mención entre los precursores del Cálculo integral es Gil Persone, conocido por Roberval (1602-75), nombre de la aldea en que nació. De él habremos de ocuparnos al tratar del Cálculo Diferencial. De sus pretensiones de haber descubierto el método de los indivisibles y resuelto el problema de la tangente a toda curva, hay mucho que descontar; pero quedan como apreciables aportaciones la cuadratura de la cicloide (1636), también lograda por Descartes en 1638; la rectificación de la misma y la cubicación de los dos cuerpos de revolución que engendra al girar alrededor de su base o de su eje de simetría.

Blas Pascal (1623-62), discípulo de Roberval, dejó también en el Cálculo integral huellas de su genio, aclarando el concepto de integral, calculando algunas áreas que equivalen a las integrales definidas entre O y a de las potencias de $\sqrt{a^2 - x^2}$, y otras funciones que hoy conducen a integrales de productos de senos y cosenos. Pero sobre todo llegó a las fórmulas que hoy llamamos de *integración por partes*, y cálculo de *integrales dobles*, por dos integraciones simples.

Cuadraturas análogas a las hechas por Pascal, realizó Fermat (1657), quien integró la potencia de exponente fraccionario o negativo; además cuadró el folio cartesiano y la curva que después se llamó *versiera*:

$$y = 1/(1 + x^2).$$

Gran progreso estaba reservado a la incipiente disciplina por obra de Juan Wallis (1616-1703), que abandona el método geométrico de los matemáticos continentales, abordando la integración aritméticamente; y para poner de manifiesto su designio, titula su obra *Arithmetica infinitorum* (1655). He aquí los más importantes progresos debidos al genial inglés: integración de potencias de cualquier exponente (aunque sin utilizar el simbolismo); integral de $\sqrt{1 - x^2}$, esto es, área del círculo en forma de producto de infinitos factores; de otro modo: desarrollo de π en producto infinito, fórmula cuya importancia bastaría para inmortalizarlo; demostración de la cuadratura dada por Huygens para la cisoide, etc.

Pero con ser importantes estos hallazgos afortunados, el mérito más trascendental de Wallis reside en haber establecido claramente la noción de *límite*, en la clara y rigurosa forma hoy vigente, esto es, con la condición de que la diferencia entre la variable y el límite sea *quavis assignabili minor*.

Precursores de Wallis en el concepto de límite, pero en forma geométrica muy confusa, fueron los jesuitas San Vicencio y Tacquet.

Deber de justicia es citar asimismo al portugués Alvaro Thomas que hacia 1500 logró sumar diversas series convergentes, avanzando siglo y medio respecto de su época. Entre las muchas series que logró sumar este genial escolástico en su Liber de triplice motu (1509), que brillan como piedras preciosas en la frondosa hojarasca tomística que llena el grueso volumen, están las potencias de series geométricas; y aunque fracasa al abordar la serie logarítmica, obtiene ingeniosas acotaciones.

Creado el concepto de límite, la teoría de las series, que tiene su natural origen en las progresiones geométricas, evoluciona rápidamente. El italiano **Mengoli** (1659), y más tarde e independientemente el alemán **Mercator** (1668), desarrollan la función logarítmica y su integral. El inglés **Lord Brouncker** en el mismo año 1668 obtiene como área del trapezoide de hipérbola el valor log 2 en forma de serie y entre todos preparan el advenimiento de Newton que da formidable impulso a la teoría de las series.

La figura de Mengoli, descubierta muy recientemente, está llamada a ocupar un altísimo lugar en la Historia del Análisis. Contemporáneo de Wallis creó la teoría de límites, definió claramente la convergencia de series, sumó muchas de ellas, y estableció con todo rigor el concepto de integral, anticipándose casi dos siglos a Cauchy.

PRECURSORES DEL CALCULO DIFERENCIAL

Mientras los geómetras citados prosiguen la vía abierta por Arquímedes, las dos figuras matemáticas más eminentes de la 1ª mitad del siglo colocan los cimientos de la disciplina que había de dar origen al Cálculo diferencial.

Pedro **Fermat** (1601-65) descubre hacia 1629 un método para calcular los máximos y mínimos de funciones de una variable: se sustituye **x** por $x + h$, se igualan $f(x)$ y $f(x + h)$, se simplifica la igualdad suprimiendo términos comunes y dividiendo por **h**; se hace $h = 0$ y la ecuación permite despejar **x**. Por ejemplo, si la función es $x^2 + 2x$ escribiremos sucesivamente con notaciones actuales:

$$(x + h)^2 + 2(x + h) = x^2 + 2x$$

$$2xh + h^2 + 2h = 0 \quad \therefore \quad 2x + 2 = 0 \quad , \quad x = -1.$$

Asoma en este artificio el concepto de cociente de incrementos y su valor límite para $h = 0$, esto es, la derivada; pero Fermat no llegó a tener la idea de límite y así resulta artificiosa su determinación de tangentes, que reduce a un problema de máximo.

Renato DESCARTES (1596-1650), se preocupa exclusivamente de las curvas algebraicas y en su inmortal *Geometría* (1637) determina la tangente en cada punto imponiendo la condición de que la resultante de ambas ecuaciones tenga una raíz doble. Este método algebraico ha perdurado en la Geometría algebraica, conjuntamente con el **infinitesimal** de Fermat, que pronto había de perfeccionarse y que para las curvas no algebraicas es el único eficaz, salvo excepciones como la cicloide, cuyas tangentes pueden deducirse también por consideraciones cinemáticas. Tenemos así el tercero de los métodos para la determinación de tangentes, que parecen haber descubierto simultánea e independientemente Descartes, Roberval y Torricelli hacia 1644.

Claramente planteado el problema y resuelto en principio por tres vías diferentes, quedó emparejado su progreso con el del Cálculo integral: pero hay un capítulo de éste en cierto modo intermedio entre ambas disciplinas que quedó retrasado, por su mayor dificultad; es el de la rectificación de curvas, que talentos eximios como Descartes consideraban imposible, por la heterogeneidad sustancial de recta y curva. Fué TORRICELLI quien abrió el camino con su rectificación de la espiral logarítmica (1640); el inglés **Neil** rectificó después la parábola semicúbica (1657); su compatriota **Wren** la cicloide (1658), y **Huygens** la parábola, llegando además a la cuadratura de ciertas superficies de revolución, o al menos a su reducción a áreas planas.

BARROW, NEWTON Y LEIBNIZ

Contemplamos en esta breve reseña dos ríos caudalosos de ideas que avanzan paralelos. Uno tiene su origen en el **problema del área** y va incorporando a sus aguas otros problemas análogos, para formar un cuerpo de doctrina que se puede llamar Cálculo integral, el cual avanza lentamente, resolviendo los problemas uno a uno, con artificios especiales, a veces ingeniosísimos, porque la sumación se presenta de modo distinto en cada uno, y se carece de método general. El otro caudal de ideas está formado por las numerosas aportaciones al **problema de la tangente**; se persigue un procedimiento general válido para todas las curvas y cada matemático inventa uno distinto en apariencia, pero todos basados en el cálculo con infinitésimos: Fermat (1630), De Sluse (1652), y más tarde Tschirnhaus (1682), Huygens (1693), Roberval y Torricelli (1644), ...; sin contar los métodos algebraicos de Descartes y Hudde.

Cada país del continente dispara su flecha sin dar plenamente en el blanco, gloria reservada a un teólogo inglés, aficionado a las matemáticas, el cual ideó la determinación de la tangente por el cociente de incrementos. Tal es la sencilla idea de Barrow, que oscureció a todas las demás.

El Cálculo diferencial encontró su cauce con Isaac **Barrow** (1630-77), pero sus aguas habrían corrido estérilmente, mientras el Cálculo integral, incomparablemente más fecundo, quedaba estancado en su progreso. Faltaba la idea genial que fundiese en uno ambos caudales de pensamiento y también fué Barrow quien dió la solución. El área es una función primitiva del integrando; o bien, con el lenguaje de entonces: el problema del área es inverso del problema de la tangente. El dificilísimo problema de la sumación de elementos quedaba así reducido al cálculo de tangentes, mucho más sencillo. Y el mismo año memorable de 1669 en que desata este nudo inextricable con el que forcejearon cientos de gigantes durante dos mil años, cede su cátedra de Geometría a su discípulo predilecto Newton y se consagra de nuevo a la Teología.

Desde ese momento culminante en que confluyen las dos grandes corrientes, solo falta elaborar el algoritmo diferencial, ir complicando los problemas, crear la notación adecuada. Todo ello es simple cuestión de tecnicismo; y si a la técnica se suma el genio se comprende cómo pudo crecer inconmensurablemente en tan breve período, en manos de Isaac Newton (1642-1727) y de Guillermo Leibniz (1646-1716).

Comienza Newton por elaborar la teoría de las series de potencias y ya en 1670 logra desarrollar la exponencial, el logaritmo, la potencia del binomio cualquiera que sea el exponente, las funciones circulares sen x, cos x, arc sen x, es decir, toda la materia expuesta en los actuales tratados de Cálculo, salvo el desarrollo de arc tg x (y por tanto de π) que es de **Mengoli** (1659), obtenido después por Gregory (1671).

En el Cálculo integral resuelve los problemas de rectificación de arcos y cuadratura de superficies y construye tablas de integrales para facilitar la resolución efectiva de tales cuestiones (casi todas las de nuestra tabla y algunas otras). En el Cálculo diferencial resuelve los problemas de máximos y mínimos, concavidad, convexidad e inflexión, calcula el radio de curvatura, etc. En la teoría de ecuaciones diferenciales plantea el doble problema de formar la ecuación diferencial de una familia de curvas o de superficies y el de la integración, que resuelve en algunos casos.

Newton era ante todo físico y como tal le interesaba el Cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos. Así define la tangente por la condición de contener dos puntos consecutivos de la curva, y el círculo osculador tres puntos consecutivos; así es metafísico su concepto de fluxión. En cambio su contrincante Leibniz es filósofo y se interesa ante todo por el rigor lógico y pureza de los concep-

tos; sus definiciones de función algebraica y trascendente, de parámetros, de coordenadas curvilíneas, son intachables; su definición de diferencial es perfecta y sus notaciones son las que han perdurado hasta nuestros días. **Esta notación diferencial es el resorte que ha impulsado al Cálculo en su rápido progreso.**

Independientemente de Newton obtuvo Leibniz muchos de sus resultados, dando origen tal coincidencia a una lamentable polémica que más bien fué guerra a muerte entre dos escuelas, dos países y dos tendencias políticas. Otros resultados suyos no obtenidos por Newton son: **la convergencia de las series alternadas, derivación parcial, diferenciación de productos, cocientes y exponenciales, derivada n-sima e integral n-sima de un producto, ecuación explícita de la cicloide, derivación de integrales respecto de parámetros, cálculo de envolventes, ecuación de las curvas paralelas ,evolutas y evolventes, resolución del problema florentino o de Viviani** (esto es: construir en una bóveda hemisférica ventanales cuadrables) **integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples, etc.**

A modo de ilustración damos el cuadro de notaciones usadas por ambos egregios contrincantes:

Notaciones de Newton	Notaciones de Leibniz	Notaciones actuales
Quantitas correlata		Variable independiente: t
Fluente		Función: y
o	dt (antes t/d)	Incremento: dt
Fluxión: $\dot{y}$	dy/dx	Derivada: y' = dy/dx
Momento: $\dot{y}$. o	Diferencial: dy	Diferencial: dy
Integral: y̍	Omnia: ∫l ; ∫ y . dx.	Integral: ∫ y . dx

PROGRESOS DEL CALCULO INFINITESIMAL EN EL SIGLO XVIII

La nueva ciencia fué acogida muy diversamente por los matemáticos de fines del siglo XVII. Christian **Huygens** (1629-95), el genial holandés, se esforzó en su famoso tratado de los relojes de péndulo (1673) en eludir el nuevo algoritmo, usando con preferencia los métodos clásicos. Así estudia las evolutas y evolventes, y descubre el **tautocronismo** de la cicloide, esto es, la notable propiedad de que todo punto abandonado sobre ella en cualquier punto, tarda el mismo tiempo en llegar al vértice o punto más bajo de la curva, propiedad descubierta simultáneamente por el jesuita Pardies. También resolvió este problema propuesto como desafío a diversos matemáticos: curva descrita por un grave arrastrado con una cadena cuyo otro extremo recorre una recta; tal curva fué llamada **tractoria** por Huygens y después se llamó **tractriz.**

El aristócrata francés Guillermo François, **marqués de l'Hospital**, (1661-1764), fué uno de los más entusiastas propagandistas del nuevo método, abandonando la vida mundana para consagrarse a él; su tratado de 1696 fué el primero de Cálculo diferencial y en él aparece la famosa fórmula que lleva su nombre, aunque Juan Bernoulli reclamó su prioridad, al parecer con fundamento. Su nomenclatura es extraña: la **coupée** es la abscisa; **cercle baisant** es el círculo osculador; **diferencial** es la derivada.

Figuras de segundo orden, a las que se debe sin embargo aportaciones dignas de nota, son entre otras las siguientes:

Brook Taylor (1685-1731), matemático, músico, pintor, publicó en 1715 un folleto que con su centenar de páginas ha ejercido perdurable influjo en el desarrollo del Análisis, a pesar de la oscuridad de su estilo y de su impresión. En él está contenida la famosa fórmula que lleva su nombre y también la que se designa como de Mac-Laurin, a pesar de que este insigne geómetra la cita en su tratado (1742) como debida a Taylor. Ni uno ni otro se preocupan de la convergencia ni de la evaluación del resto o **mantisa.**

Abraham De Moivre (1667-1754), francés emigrado a Inglaterra, que estudió las series recurrentes (1722) y perfeccionó la integración de las funciones racionales.

James **Stirling** (1696-1770), célebre por la importante fórmula asintótica para la factorial n! (1730).

Al lado de estos continuadores de Newton, es oportuno citar al famoso obispo Berkeley, que sometió el Cálculo de fluxiones a duras críticas, en gran parte justificadas. Tal es por ejemplo la que señala una evidente contradicción en el método newtoniano, donde el incremento se designa por la letra **o** (que no debe confundirse con el cero) pero al final se hace $o = 0$.

Propulsor máximo del Cálculo infinitesimal fué Jacobo **Bernoulli** (1654-1705). Su primera contribución (1690) fué la integración de la **curva isocrona**; llamaba así Leibniz a la rampa que amortigua la caída acelerada haciéndola uniforme, es decir, la curva tal que un punto cae sobre ella con movimiento uniforme respecto de la coordenada vertical. Su ecuación, ingrada por Jacobo es:

$$\sqrt{b^2y - a^3}.dy = \sqrt{a^3}.dx$$

y en esta memoria introduce por primera vez la palabra **integral**, que ha perdurado.

Otro problema resuelto por Jacobo fué el de la línea elástica, que designó con el nombre de **lemniscata**, después usado en otro sentido.

El problema de la **catenaria**, que ya preocupó a Galileo, sospechando que era parabólica, fué propuesto por Jacobo y con noble emulación lo atacaron Huygens, con recursos clásicos, mientras lo resolvían mediante el Cálculo integral Leibniz y Juan Bernoulli, hermano menor y discípulo de Jacobo, que así inicia su brillante carrera.

Con ser tan importantes los descubrimientos de Jacobo, en la teoría de series (baste recordar los números que llevan su nombre) y sobre todo su creación del Cálculo de probabilidades, estaba orgulloso de las propiedades de la espiral logaritmica que llamaba **curva maravillosa** porque engendra curvas análogas ligadas a ella (como también acontece con la cicloide) y por ello pidió que fuese grabada sobre su tumba, con esta leyenda: **eadem mutata resurgo.**

La obra de Juan **Bernoulli** (1667-1748), es también importante. Baste un ligero índice: separación de variables en las ecuaciones diferenciales (1694), integración de las ecuaciones homogéneas en **x, y**; ecuación de las trayectorias isogonales y en particular ortogonales, de las familias de curvas (1697); resolución de las ecuaciones diferenciales que llevan el nombre de Bernoulli y que en verdad pertenecen a ambos, pues fué propuesto el problema por Jacobo.

La emulación científica entre ambos degeneró en violenta lucha en que las armas esgrimidas eran problemas matemáticos y de la que salió gananciosa la ciencia, pues así nació el cálculo de variaciones. El problema de la curva de tiempo mínimo fué propuesto por Juan en 1696 y fué resuelto por su hermano así como también por l'Hospital y por Leibniz, quien propuso el nombre de **tachystoptota**; pero predominó el de **braquis-**

tócrona propuesto por Juan Bernoulli. Otro problema propuesto como desafío por Jacobo y resuelto inmediatamente por Juan, fué éste: encontrar la cicloide de base dada tal que por ella llegue el punto en el tiempo mínimo a una vertical prefijada; otro, propuesto por éste y resuelto por aquél es el de las **geodésicas** de una superficie convexa; y así muchos otros problemas cuya dificultad puede sospecharse por la intención y categoría de los proponentes.

Después de estas figuras que atacan problemas concretos aparece el coloso de la nueva técnica, Leonardo **Euler** (1707-83), que no deja capítulo alguno por explorar; y no sólo en el Cálculo y en el Algebra, sino también en la Física matemática. Su obra inmensa desborda los estrechos límites de este libro, pero en diversos capítulos hemos encontrado su nombre. Comenzando por el concepto clásico de función, como expresión compuesta con la variable por los signos aritméticos (incluso el límite) y la notación f (x) hoy usada en lugar de la **fx** de Bernoulli; la expresión de la exponencial como límite de la potencia $(1+x/n)^n$; la representación por la letra **e** de la base de logaritmos naturales, y de la letra **i** para la unidad imaginaria, la relación entre la exponencial y las funciones circulares; las reglas para calcular límites indeterminados que completan la de l'Hospital; la teoría completa de máximos y mínimos para varias variables; las integrales elípticas; las integrales eulerianas (entre ellas la función que después fué llamada **gamma**); la integración aproximada de las ecuaciones de primer orden; las ecuaciones características de las funciones analíticas (impropiamente llamadas de Cauchy-Riemann); la ecuación fundamental del Cálculo de variaciones; etc., etc. Pero este índice no da idea de la infinidad de contribuciones eulerianas que en este libro no han tenido cabida.

Podríamos decir, en resumen, que toda la materia de este libro era conocida y en gran parte creada por Euler, si no hubiera algunas excepciones: las soluciones singulares, descubiertas ya por Taylor fueron estudiadas por **Clairaut** (1713-65), genio precoz al que mucho debe la teoría de ecuaciones diferenciales, no siendo lo más importante la ecuación que lleva su nombre; los sistemas de ecuaciones diferenciales fueron estudiados por **d'Alembert** (1747) y sabido es que lleva su nombre el problema de la cuerda vibrante, propuesto por Taylor y resuelto por caminos diversos por d'Alembert y por **Daniel Bernoulli** (hijo de Juan), que con Nicolás I y II y Juan III. completan la dinastía de los seis Bernoulli matemáticos.

Pero si toda la materia de esta obra fué obra de los siglos anteriores al XIX, el espíritu crítico novecentista asoma en varios de sus capítulos, en la medida que consiente su finalidad práctica. El concepto euleriano de funcion no permite explicar el problema de la cuerda vibrante, la cual puede adoptar forma inicial arbitraria no representable por una expresión aritmética; y fué precisamente esta contradicción, que dejó perplejo a Euler, sin atinar con la solución, la que señala el comienzo de la Matemática moderna, edificada sobre el concepto de función debido a Dirichlet, que es el adoptado en toda esta obra, y que permite llegar al magno descubrimiento de **Fourier** (1822). Este mismo concepto de función ha permitido abordar el problema de las funciones implícitas, los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales y otras cuestiones capitales que fueron oscuramente esbozadas en el siglo XVIII y sobre las cuales arrojó la centuria siguiente vivísima luz.

La magna trinidad de matemáticos franceses que brilla en los confines de los siglos XVIII y XIX: **Lagrange**, **Legendre**, **Laplace**, y los no menos excelsos nombres de **Gauss**, **Cauchy**, **Riemann**, **Weierstrass**, que llenan el siglo XIX, aparecen más de una vez en estas páginas, proyectando sobre ellas la sombra de algunas de sus creaciones inmortales.

TABLA DE FUNCIONES PRIMITIVAS

Funciones racionales

Función derivada	*Función primitiva*
$\dfrac{A x + B}{x - a}$	$A x + (A a + B)\, l(x - a)$
$\dfrac{A x + B}{(x - a)\,(x - b)}$	$\dfrac{A a + B}{a - b}\, l(x - a) - \dfrac{A b + B}{a - b}\, l(x - b)$
$\dfrac{A x^2 + B x + C}{(x - a)\,(x - b)\,(x - c)}$	$\dfrac{f(a)\, l(x - a)}{(a - b)\,(a - c)} + \dfrac{f(b)\, l(x - b)}{(b - a)\,(b - c)} + \dfrac{f(c)\, l(x - c)}{(c - a)\,(c - b)}$
$\dfrac{1}{(x^2 + a^2)n}$	$\dfrac{x}{(2 n - 2) a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \dfrac{2 n - 3}{2 n - 2}\, \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\int \dfrac{d x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$

Funciones circulares.

$\operatorname{sen}^2 x$; $\quad - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x . \cos x \quad \frac{1}{2} x$

$\operatorname{sen}^3 x$; $\quad - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 x . \cos x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen}^4 x$; $\quad - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x . \cos x -$

$\quad - \frac{3}{8} \operatorname{sen} x . \cos x + \frac{3}{8} x$

$\operatorname{sen}^n x$; $\quad - \frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x . \cos x +$

$\quad + \dfrac{n - 1}{n} \displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x . dx$

$\cos^2 x$; $\quad \frac{1}{2} \cos x . \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} x$

$\cos^3 x$; $\quad \frac{1}{3} \cos^2 x . \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \cos x$

$\cos^4 x$; $\quad \frac{1}{4} \cos^3 x . \operatorname{sen} x +$

$\quad + \frac{3}{8} \cos x . \operatorname{sen} + \frac{3}{8} x$

$\cos^n x$; $\quad \frac{1}{n} \cos^{n-1} x . \operatorname{sen} x +$

$\quad + \dfrac{n - 1}{n} \displaystyle\int \cos^{n-2} x . dx$

$\frac{1}{\operatorname{sen} x}$; $l \operatorname{tg} x/_2$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$; $-\cot x$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}$; $-\frac{1}{2} \cos x/\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2}\, l \operatorname{tg} x/_2$

$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$; $l \operatorname{tg} x$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$; $-\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^6 x}$; $-\cos x - {}^2/_3 \cos^3 x - {}^1/_5 \cos^5 x$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}$; $-\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}$

$\frac{1}{\cos x}$; $l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{1}{\cos^2 x}$; $\operatorname{tg} x$

$\frac{1}{\cos^3 x}$; $\frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{1}{\cos^4 x}$; $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$

$\frac{1}{\cos^6 x}$; $\operatorname{tg} x + {}^2/_3 \operatorname{tg}^3 x + {}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x$

$\frac{1}{\cos^n x}$; $\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$

$\frac{1}{\cos^{2m} x}$; $\operatorname{tg} x + \frac{m-1}{1!3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!5} \operatorname{tg}^5 x + \ldots$

$\frac{1}{\operatorname{sen}^{2m} x}$; $-\cot x - {}^2/_3 \cot^3 x - \frac{(m-1)(m-2)}{2!5} \cot^5 x + \ldots\ldots$

$\operatorname{tg} x$; $-l \cos x$

$\operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{tg} x - x$

$\operatorname{tg}^3 x$; $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + l \cos x$

$\operatorname{tg}^4 x$; $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

$\operatorname{tg}^5 x$; $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$

$\operatorname{tg}^6 x$; ${}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x$

$\operatorname{tg}^n x$; $\frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x . dx$

$\cot x$; $l \operatorname{sen} x$

$\cot^2 x$; $-\cot x - x$

$\cot^3 x$; $-\frac{1}{2} \cot^2 x - l \operatorname{sen} x$

$\cot^4 x$; $-\frac{1}{3} \cot^2 x + \cot x + x$

$\cot^5 x$; $-\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x + l \operatorname{sen} x$

$\cot^6 x$; $-{}^1/_5 \cot^5 x + \frac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x$

$\cot^n x$; $-\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x . dx$

$\operatorname{sen} m x . \cos n x$; $-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}$

$\operatorname{sen} m x . \operatorname{sen} n x$; $\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)}$

$\cos m x . \cos n x$; $\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{2(m+n)}{\operatorname{sen}(m+n)x}$

TABLA DE FUNCIONES PRIMITIVAS

Funciones racionales

Función derivada	*Función primitiva*
$\dfrac{A x + B}{x - a}$	$A x + (A a + B)\, l(x - a)$
$\dfrac{A x + B}{(x - a)(x - b)}$	$\dfrac{A a + B}{a - b}\, l(x - a) - \dfrac{A b + B}{a - b}\, l(x - b)$
$\dfrac{A x^2 + B x + C}{(x - a)(x - b)(x - c)}$	$\dfrac{f(a)\, l(x - a)}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{f(b)\, l(x - b)}{(b - a)(b - c)} + \dfrac{f(c)\, l(x - c)}{(c - a)(c - b)}$
$\dfrac{1}{(x^2 + a^2)^n}$	$\dfrac{x}{(2n - 2) a^2 (x^2 + a^2)^{n-1}} + \dfrac{2n - 3}{2n - 2}\, \dfrac{1}{a^2} \displaystyle\int \dfrac{d x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$

Funciones circulares.

$\operatorname{sen}^2 x$;	$-\frac{1}{2} \operatorname{sen} x . \cos x \quad \frac{1}{2} x$	$\cos^2 x$;	$\frac{1}{2} \cos x . \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} x$ ..
$\operatorname{sen}^3 x$;	$-\frac{1}{3} \operatorname{sen}^2 x . \cos x + {}^2/_3 \operatorname{sen} x$	$\cos^3 x$;	$\frac{1}{3} \cos^2 x . \operatorname{sen} x + {}^2/_3 \cos x$
$\operatorname{sen}^4 x$;	$-\frac{1}{4} \operatorname{sen}^3 x . \cos x - \frac{3}{8} \operatorname{sen} x . \cos x + \frac{3}{8} x$	$\cos^4 x$;	$\frac{1}{4} \cos^3 x . \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} \cos x . \operatorname{sen} + \frac{3}{8} x$
$\operatorname{sen}^n x$;	$-{}^1/_n \operatorname{sen}^{n-1} x . \cos x + \dfrac{n-1}{n} \displaystyle\int \operatorname{sen}^{n-2} x . dx$	$\cos^n x$;	${}^1/_n \cos^{n-1} x . \operatorname{sen} x + \dfrac{n-1}{n} \displaystyle\int \cos^{n-2} x . dx$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ ;\quad l \operatorname{tg} x/_2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ ;\quad -\cot x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x}\ ;\quad -\tfrac{1}{2} \cos x/\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg} x/_2$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\ ;\quad l \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}\ ;\quad -\cos x - \tfrac{1}{3} \cos^8 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^6 x}\ ;\quad -\cos x - {}^2/_3 \cos^3 x - {}^1/_5 \cos^5 x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^n x}\ ;\quad -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\ ;\quad l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\ ;\quad \operatorname{tg} x$$

$$\frac{1}{\cos^3 x}\ ;\quad \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \tfrac{1}{2}\, l \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\cos^4 x}\ ;\quad \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$$

$$\frac{1}{\cos^6 x}\ ;\quad \operatorname{tg} x + {}^2/_3 \operatorname{tg}^3 x + {}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x$$

$$\frac{1}{\cos^n x}\ ;\quad \frac{1}{n-1}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

$$\frac{1}{\cos^{2m} x}\ ;\quad \operatorname{tg} x + \frac{m-1}{1\,!\,3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{(m-1)(m-2)}{2\,!\,5} \operatorname{tg}^5 x + \ldots$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^{2m} x}\ ;\quad -\cot x - {}^2/_3 \cot^3 x - \frac{(m-1)(m-2)}{2\,!\,5} \cot^5 x + \ldots\ldots$$

$$\operatorname{tg} x;\quad -l \cos x$$

$$\operatorname{tg}^2 x;\quad \operatorname{tg} x - x$$

$$\operatorname{tg}^3 x;\quad \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + l \cos x$$

$$\operatorname{tg}^4 x;\quad \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$$

$$\operatorname{tg}^5 x;\quad \tfrac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$$

$$\operatorname{tg}^6 x;\quad {}^1/_5 \operatorname{tg}^5 x - \tfrac{1}{3}\, tg^3 x + \operatorname{tg} x - x$$

$$\operatorname{tg}^n x;\quad \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\,.\,dx$$

$$\cot x;\quad l \operatorname{sen} x$$

$$\cot^2 x;\quad -\cot x - x$$

$$\cot^3 x;\quad -\tfrac{1}{2} \cot^2 x - l \operatorname{sen} x$$

$$\cot^4 x;\quad -\tfrac{1}{3} \cot^2 x + \cot x + x$$

$$\cot^5 x;\quad -\tfrac{1}{4} \cot^4 x + \tfrac{1}{2} \cot^2 x + l \operatorname{sen} x$$

$$\cot^6 x;\quad -{}^1/_5 \cot^5 x + \tfrac{1}{3} \cot^3 x - \cot x - x$$

$$\cot^n x;\quad -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,.\,dx$$

$$\operatorname{sen} m x\,.\cos n x;\quad -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\operatorname{sen} m x\,.\operatorname{sen} n x;\quad \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)}$$

$$\cos m x\,.\cos n x;\quad \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{2(m+n)}{\operatorname{sen}(m+n)x}$$

Irracionales cuadráticos

$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad \text{arc sen } x/a$

$\frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\frac{y}{a^2 x}$

$\frac{1}{x^4\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\frac{y}{3a^2x^3} - \frac{2y}{3a^4x}$

$\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\frac{1}{a}\, l\, \frac{a+y}{x}$

$\frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\frac{y}{2a^2x^2} - \frac{y}{2a^3}\, l\, \frac{a+y}{x}$

$\frac{1}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\frac{y}{(n-1)a^2x^{n-1}} +$

$$+ \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \sqrt{a^2+x^2}=y$

$\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{1}{3}x^2y - \frac{2}{3}a^2y$

$\frac{x^5}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{1}{5}x^4y - \frac{4}{15}a^2x^2y +$

$$+ \frac{8}{15}a^4y$$

$\frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad -1/a\, l\,(a+y) + 1/a\, l\, x$

$\frac{1}{x^3\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{y}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\, l\, \frac{x}{a+y}$

$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad l\,(x+y)$

$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}a^2\, l\,(x+y)$

$\frac{x^n}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad 1/n\, x^{n-1}y -$

$$-\frac{n-1}{n}a^2\int\frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

$\frac{1}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{y}{a^2x}$

$\frac{1}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{y}{3a^2x^3} - \frac{2y}{3a^4x}$

$\frac{1}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}$; $\quad \frac{y}{(n-1)a^2x^{n-1}} - \frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}$

$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -\sqrt{a^2-x^2}=y$

$\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -a^2y + \frac{1}{3}y^3$

$\frac{x^5}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -a^4y + \frac{2}{3}a^2y^3 - \frac{1}{5}y^5$

$\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\quad -a^{2n}y + \frac{n}{3}a^{2(n-1)}y^3 - \frac{n(n-1)}{2!\,5}a^{2(n-2)}y^5 + \dots \pm \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$

Funciones racionales de x, sen *x*, cos *x*

$x \operatorname{sen} x; \quad -x \cos x + \operatorname{sen} x$

$x^2 \operatorname{sen} x; \quad -x^2 \cos x + 2x . \operatorname{sen} x + 2 \cos x$

$x^n \operatorname{sen} x; \quad -x^n \cos x + n \int x^{n-1} . \cos x . dx$

$\dfrac{1}{1 + \cos x}; \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x$

$x \cos x; \quad -x \operatorname{sen} x + \cos x$

$x^2 \cos x; \quad x^2 \operatorname{sen} x + 2x . \cos x - 2 \operatorname{sen} x$

$x^n \cos x; \quad x^n \operatorname{sen} x - n \int x^{n-1} . \operatorname{sen} x . dx$

$\dfrac{1}{1 - \cos x}; \quad - \cot \tfrac{1}{2} x$

$$\frac{1}{a + b \cos x}; \quad \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \operatorname{tg} x/_2 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \; l \; \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} . \operatorname{sen} x}{a + b \cos x} \quad \text{si} \quad a^2 < b^2$$

$$\frac{\cos x}{a + b \cos x}; \quad \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

$$\frac{x + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}; \quad x \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x}; \quad \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1 - a^2} . \operatorname{tg} x \right) \quad \text{si} \quad a^2 < 1$$

$\operatorname{arc\,sen} x; \quad x . \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}$

$x . \operatorname{arc\,sen} x; \quad \tfrac{1}{4} (2x^2 - 1) \operatorname{arc\,sen} x + \tfrac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2}$

$x . \operatorname{arc\,cos} x; \quad \tfrac{1}{4} (2x^2 - 1) \operatorname{arc\,cos} x - \tfrac{1}{4} x \sqrt{1 - x^2}$

$x . \operatorname{arc\,tg} x; \quad \tfrac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} x$

$x . \operatorname{arc\,cot} x; \quad \tfrac{1}{2} (x^2 + 1) \operatorname{arc\,cot} x + \tfrac{1}{2} x.$

Exponenciales y potencias

$x . e^x; \quad x . e^x - e^x$

$x^2 e^x; \quad x^2 e^x - 2 x . e^x + 2 e^x$

$x^3 e^x; \quad x^3 e^x - 3 x^2 e^x + 6 x e^x - 6 e^x$

....

$x^n e^x; \quad x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx.$

$x^n e^{ax}; \quad e^{ax} [(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1) (ax)^{n-2} - \ldots . \pm n!] a^{-n-1}$

$x^n a^x = x^n e^{x\,l\,a}$ póngase $\alpha = l\,a.$

$$\frac{e^x}{x^n}; \quad - \frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x dx}{x^{n-1}}$$

Potencias, exponenciales, logaritmos y circulares.

$l\,x$; $\quad x(l\,x - 1)$

$x\,l\,x$; $\quad \frac{1}{2} x^2 (l\,x - \frac{1}{2})$

$x^2\,l\,x$; $\quad \frac{1}{3} x^3 (l\,x - \frac{1}{3})$

$x^3\,l\,x$; $\quad \frac{1}{4} x^4 (l\,x - \frac{1}{4})$

$x^n\,l\,x$; $\quad \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left(l\,x - \frac{1}{n+1} \right)$

$(l\,x)^2$; $\quad x\,(l\,x)^2 - 2\,x . l\,x + 2\,x$

$(l\,x)^3$; $\quad x(l\,x)^2 - 3\,x(l\,x)^2 + 6\,x . l\,x - 6\,x$

$(l\,x)^n$; $\quad x\,(l\,x)^n - n \int (l\,x)^{n-1}\,dx$

$\frac{l\,x}{x}$; $\quad \frac{1}{2} (l\,x)^2$

$\frac{l\,x}{x^2}$; $\quad - \frac{l\,x + 1}{x}$

$\frac{l\,x}{x^3}$; $\quad - \frac{l\,x + \frac{1}{2}}{2\,x^2}$

$\frac{l\,x}{x^n}$; $\quad - \frac{l\,x + 1/(n-1)}{(n-1)\,x^{n-1}}$

$\frac{(l\,x)^2}{x}$; $\quad \frac{(l\,x)^3}{3}$

$\frac{(l\,x)^3}{x}$; $\quad \frac{(l\,x)^4}{4}$

$\frac{(l\,x)^n}{x}$; $\quad \frac{(l\,x)^{n+1}}{n+1}$

$\frac{1}{1 + e^x}$; $\quad x - l\,(1 + e^x)$

$\frac{1}{a + b\,e^{m\,x}}$; $\quad \frac{1}{am} [m\,x - l\,(a + b . e^{m\,x})]$

$e^{a\,x} . \text{sen}\, b\,x$; $\quad \frac{a\,\text{sen}\,b\,x - b\cos b\,x}{a^2 + b^2} e^{a\,x}$

$e^{a\,x} . \cos b\,x$; $\quad \frac{a\cos b\,x + b\,\text{sen}\,b\,x}{a^2 + b^2} e^{a\,x}$

$\text{sen}\,(l\,x)$; $\quad \frac{1}{2} x\,[\text{sen}\,(l\,x) - \cos l\,x)]$

$\cos\,(l\,x)$; $\quad \frac{1}{2} x\,[\text{sen}\,(l\,x) + \cos\,(l\,x)]$

Integrales definidas.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x\,d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,d\,x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5 . 3 . 1}{2n\,(2n-2)\ldots 6 . 4 . 2} . \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x . d\,x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x . d\,x = \frac{2n\,(2n-2)\ldots 4 . 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3 . 1}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,d\,x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,d\,x = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}\,b\,x}{x}\,d\,x = \frac{1}{2}\pi \qquad (b > 0) \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos b\,x}{x}\,d\,x = \infty$$

TABLA DE INTEGRALES ELÍPTICAS DE PRIMERA ESPECIE

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$t =$ 2°	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
4	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
6	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105
8	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140	0.140
10	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175	0.175
12	0.209	0.209	0.210	0.210	0.210	0.210	0.211	0.211	0.211	0.211
14	0.244	0.244	0.245	0.245	0.245	0.246	0.246	0.247	0.247	0.247
16	0.279	0.279	0.280	0.280	0.281	0.281	0.282	0.282	0.283	0.283
18	0.314	0.314	0.315	0.315	0.316	0.317	0.318	0.319	0.319	0.320
20	0.349	0.349	0.350	0.351	0.352	0.353	0.354	0.355	0.356	0.356
22	0.384	0.384	0.385	0.386	0.388	0.390	0.391	0.393	0.394	0.394
24	0.419	0.419	0.420	0.422	0.424	0.426	0.428	0.430	0.431	0.432
26	0.454	0.454	0.456	0.458	0.460	0.463	0.466	0.468	0.470	0.470
28	0.489	0.489	0.491	0.493	0.497	0.500	0.504	0.507	0.509	0.509
30	0.524	0.524	0.526	0.529	0.533	0.538	0.542	0.546	0.548	0.549
32	0.558	0.559	0.562	0.566	0.570	0.576	0.581	0.586	0.589	0.590
34	0.593	0.594	0.597	0.602	0.608	0.614	0.621	0.626	0.630	0.632
36	0.628	0.629	0.633	0.638	0.645	0.653	0.661	0.668	0.673	0.674
38	0.663	0.665	0.669	0.675	0.683	0.693	0.702	0.710	0.716	0.718
40	0.698	0.700	0.704	0.712	0.721	0.732	0.744	0.753	0.760	0.763
42	0.733	0.735	0.740	0.749	0.760	0.773	0.786	0.798	0.806	0.809
44	0.768	0.770	0.776	0.786	0.799	0.814	0.829	0.843	0.853	0.857
46	0.803	0.805	0.812	0.823	0.838	0.855	0.873	0.890	0.902	0.906
48	0.838	0.840	0.848	0.861	0.877	0.897	0.918	0.938	0.952	0.958
50	0.873	0.876	0.884	0.898	0.917	0.940	0.965	0.988	1.004	0.011
52	0.908	0.911	0.920	0.936	0.958	0.984	1.012	1.039	1.059	1.066
54	0.942	0.946	0.957	0.974	0.998	1.028	1.060	1.092	1.115	1.124
56	0.977	0.981	0.993	1.012	1.039	1.073	1.110	1.146	1.174	1.185
58	1.012	1.017	1.030	1.051	1.081	1.118	1.161	1.203	1.236	1.249
60	1.047	1.052	1.066	1.090	1.123	1.164	1.213	1.262	1.301	1.317
62	1.082	1.087	1.103	1.128	1.165	1.211	1.266	1.323	1.370	1.389
64	1.117	1.122	1.139	1.167	1.207	1.259	1.321	1.387	1.443	1.466
66	1.152	1.158	1.176	1.206	1.250	1.308	1.377	1.454	1.520	1.549
68	1.187	1.193	1.213	1.246	1.294	1.357	1.435	1.523	1.603	1.638
70	1.222	1.229	1.250	1.285	1.337	1.407	1.494	1.596	1.692	1.735
72	1.257	1.264	1.286	1.325	1.381	1.457	1.555	1.672	1.788	1.843
74	1.291	1.299	1.323	1.365	1.425	1.509	1.618	1.752	1.892	1.962
76	1.327	1.335	1.360	1.404	1.470	1.561	1.681	1.835	2.005	2.097
78	1.361	1.370	1.397	1.444	1.515	1.613	1.746	1.921	2.129	2.253
80	1.396	1.406	1.434	1.485	1.560	1.666	1.813	2.012	2.265	2.436
82	1.431	1.441	1.472	1.525	1.605	1.719	1.880	2.106	2.416	2.660
84	1.466	1.477	1.509	1.565	1.650	1.773	1.948	2.202	2.581	2.949
86	1.501	1.512	1.546	1.605	1.696	1.827	2.017	2.302	2.761	3.355
88	1.536	1.547	1.583	1.646	1.741	1.881	2.087	2.403	2.954	4.048
90	1.571	1.583	1.620	1.686	1.787	1.936	2.157	2.505	3.153	∞

Tabla de integrales elípticas de segunda especie

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$t =$ 2°	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035	0.035
4	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
6	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105	0.105
8	0.140	0.140	0.140	0.140	0.139	0.139	0.139	0.139	0.139	0.139
10	0.175	0.175	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174	0.174
12	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209	0.209	0.208	0.208	0.208	0.208
14	0.244	0.244	0.244	0.244	0.243	0.243	0.243	0.242	0.242	0.242
16	0.279	0.279	0.279	0.278	0.278	0.277	0.277	0.276	0.276	0.276
18	0.314	0.314	0.314	0.313	0.312	0.311	0.310	0.310	0.309	0.309
20	0.349	0.349	0.348	0.347	0.346	0.345	0.344	0.343	0.342	0.342
22	0.384	0.384	0.383	0.382	0.380	0.378	0.377	0.376	0.375	0.375
24	0.419	0.418	0.417	0.416	0.414	0.412	0.410	0.408	0.407	0.407
26	0.454	0.453	0.452	0.450	0.448	0.445	0.442	0.440	0.439	0.438
28	0.489	0.488	0.486	0.484	0.481	0.478	0.474	0.472	0.470	0.469
30	0.524	0.523	0.521	0.518	0.514	0.510	0.506	0.503	0 501	0.500
32	0.558	0.558	0.555	0.552	0.547	0.542	0.537	0.533	0.531	0.530
34	0.593	0.592	0.590	0.585	0.580	0.574	0.568	0.563	0.560	0.559
36	0.628	0.627	0.624	0.619	0.612	0.605	0.598	0.593	0.589	0.588
38	0.663	0.662	0.658	0.652	0.644	0.636	0.628	0.622	0.617	0.616
40	0.698	0.697	0.692	0.685	0.676	0.667	0.657	0.650	0.645	0.643
42	0.733	0.731	0.726	0.718	0.708	0.697	0.686	0.677	0.671	0.669
44	0.768	0.766	0.760	0.751	0.739	0.727	0.714	0.704	0.697	0.695
46	0.803	0.800	0.794	0.783	0.770	0.756	0.742	0.730	0.722	0.719
48	0.838	0.835	0.828	0.816	0.801	0.785	0.769	0.755	0.746	0.743
50	0.873	0.870	0.861	0.848	0.832	0.813	0.795	0.780	0.770	0.766
52	0.908	0.904	0.895	0.880	0.862	0.841	0.821	0.804	0.792	0.788
54	0.942	0.939	0.929	0.912	0.892	0.869	0.846	0.827	0.814	0.809
56	0.977	0.973	0.962	0.944	0.922	0.896	0.871	0.849	0.834	0.829
58	1.012	1.008	0.996	0.976	0.951	0.923	0.895	0.871	0.854	0.848
60	1.047	1.043	1.029	1.008	0.980	0.949	0.918	0.891	0.873	0.866
62	1.082	1.077	1.062	1.039	1.009	0.975	0.941	0.911	0.890	0.883
64	1.117	1.112	1.095	1.070	1.038	1.007	0.963	0.930	0.903	0.899
66	1.152	1.146	1.129	1.101	1.066	1.026	0.985	0.949	0.923	0.914
68	1.187	1.180	1.162	1.132	1.094	1.051	1.006	0.966	0.938	0.927
70	1.222	1.215	1.195	1.163	1.122	1.075	1.027	0.983	0.951	0.940
72	1.257	1.249	1.228	1.194	1.150	1.099	1.047	0.999	0.964	0.951
74	1.291	1.284	1.261	1.225	1.177	1.123	1.066	1.014	0.976	0.961
76	1.327	1.318	1.294	1.255	1.205	1.146	1.085	1.029	0.987	9.970
78	1.361	1.353	1.327	1.286	1.232	1.169	1.104	1.043	0.996	0.978
80	1.396	1.387	1.360	1.316	1.259	1.193	1.122	1.057	1.005	0.985
82	1.431	1.421	1.392	1.346	1.286	1.215	1.141	1.069	1.013	0.990
84	1.466	1.456	1.425	1.377	1.313	1.238	1.158	1.082	1.021	0.995
86	1.501	1.490	1.458	1.407	1.340	1.261	1.176	1.094	1.028	0.993
88	1.536	1.525	1.491	1.437	1.336	1.283	1.194	1.106	1.034	0.999
90	1.571	1.559	1.524	1.467	1.393	1.305	1.211	1.118	1.040	1.000

ÍNDICE ONOMÁSTICO

Las cifras indican las páginas en que está citado cada autor o las fórmulas, teoremas o métodos que llevan su nombre.

INDICE ALFABETICO DE TEMAS

Las cifras designan números de párrafo.

INDICE GENERAL

CAPITULO I. — Límites de las funciones de una variable.

CAPITULO II. — Derivadas de las funciones de una variable.

CAPITULO III. — Derivadas y diferenciales sucesivas.

CAPITULO IV. — Las series de potencias.

CAPITULO V. — Integrales simples y sus aplicaciones geométricas.

CAPITULO VI. — Funciones periódicas y series de Fourier.

CAPITULO VII. — Geometría analítica diferencial.

CAPITULO VIII — Superficies de segundo grado.

CAPITULO IX. — Derivadas y diferenciales de las funciones de varias variables.

CAPITULO X — Teoría de las curvas y superficies.

CAPITULO XI — Integración de las funciones de varias variables.

CAPITULO XII. — Ecuaciones diferenciales.

CAPITULO XIII. — Cálculo de variaciones.

Terminóse la impresión el día 30
de noviembre de 1944 en la
"Editorial Mayo", Callao 335,
Buenos Aires.